ALGEBRAICKÉ STRUKTURY S JEDNOU OPERACÍ

① Určete typ algebraické struktury $(M, \circ)$, je-li $M = \{a, b, c\}$ a operace $\circ$ je dána tabulkou:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

$\underline{ND} \wedge \underline{A} \wedge \underline{K} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI} \wedge \cancel{ZR}$

$e = a$

$g = c$

<u>vyšetříme asociativitu:</u>

- existuje $e = a$ => nemusíme vyšetřovat trojice, kde se vyskytuje prvek a (27-19 = 8 možností)
- existuje $g = c$ => nemusíme vyšetřovat trojice, kde se vyskytuje prvek c (8 - 7 = 1 možnost: bbb)
- vzhledem k vlastnosti K není potřeba vyšetřovat možnost bbb

=> $\circ$ je asociativní

$(M, \circ)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem

② Určete typ algebraické struktury $(\mathbb{Z}, \circ)$, kde

$$\circ = \{[[x,y],z] \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} : z = x+y+1\}$$

$\underline{ND} \wedge \underline{A} \wedge \underline{K} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI} \wedge \underline{ZR}$

$ND_{\checkmark}$: $(\forall a,b \in \mathbb{Z})(\exists z \in \mathbb{Z})[z = a+b+1]$

$K_{\checkmark}$: $(\forall a,b \in \mathbb{Z})[a \circ b = b \circ a]$

$a \circ b = a+b+1$

$b \circ a = b+a+1$

$a \circ b = b \circ a$

$a+b+1 = b+a+1$ pro každé $a,b \in \mathbb{Z}$

$A_{\checkmark}$: $(\forall a,b,c \in \mathbb{Z})[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$

$(a \circ b) \circ c = (a+b+1) \circ c = a+b+1+c+1 = a+b+c+2$

$a \circ (b \circ c) = a \circ (b+c+1) = a+b+c+1+1 = a+b+c+2$

$EN_{\checkmark}$: $(\forall a \in \mathbb{Z})(\exists e \in \mathbb{Z})(a \circ e = e \circ a = a)$

$a \circ e = a$

$a+e+1 = a$

$\underline{\underline{e = -1}}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$

$e \circ a = a$

ok => nemusíme vyšetřovat

$EI_{\checkmark}$: $(\forall a \in \mathbb{Z})(\exists \bar{a} \in \mathbb{Z})(a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = e)$

$a \circ \bar{a} = -1$

$a + \bar{a} + 1 = -1$

$\underline{\underline{\bar{a} = -2-a}}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$

$\bar{a} \circ a = -1$

ok => nemusíme vyšetřovat

ZR: $(\forall a,b \in \mathbb{Z})(\exists x,y \in \mathbb{Z})(a \circ x = b \wedge y \circ a = b)$

$a \circ x = b$

$a+x+1 = b$

$\underline{\underline{x = b-a-1}}$

$x \in \mathbb{Z}$ $\forall a,b \in \mathbb{Z}$

$y \circ a = b$

$y+a+1 = b$

$\underline{\underline{y = b-a-1}}$

$y \in \mathbb{Z}$ $\forall a,b \in \mathbb{Z}$

- z důvodu komutativity operace o není potřeba tuto rovnost vyšetřovat

$\underline{(M,\circ)}$ je komutativní grupa

③ Určete typ algebraické struktury s jednou operací $(\mathbb{Q}, \circ)$

$$\circ = \left\{ [[x,y], z] \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q} : z = \frac{x+y}{2} \right\}$$

$\underline{ND} \wedge \cancel{A} \wedge \underline{K} \wedge \cancel{EN} \wedge \cancel{EI} \wedge \underline{ZR}$

$ND_{\checkmark}$: $(\forall a,b \in \mathbb{Q})(\exists z \in \mathbb{Q})[\, z = \frac{a+b}{2} \,]$

$K_{\checkmark}$: $(\forall a,b \in \mathbb{Q})[\, a \circ b = b \circ a \,]$

$L: a \circ b = \frac{a+b}{2}$

$P: b \circ a = \frac{b+a}{2}$ $\qquad \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} \Rightarrow \circ$ je komutativní $\forall a,b \in \mathbb{Q}$

$\cancel{A}$: $(\forall a,b \in \mathbb{Q})[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$

$L: (a \circ b) \circ c = \left(\frac{a+b}{2}\right) \circ c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2}$

$P: a \circ (b \circ c) = a \circ \left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4}$

$\exists a,b,c \in \mathbb{Q}$ tak, že $L \neq P$

EN: $(\forall a \in \mathbb{Q})(\exists e \in \mathbb{Q})[\, a \circ e = e \circ a = a \,]$

$a \circ e = a$ $\qquad e \circ a = a$ ... ok $\Rightarrow$ nemusíme vyšetřovat

$\frac{a+e}{2} = a$

$a + e = 2a$

$e = -a$ $\qquad \left.\begin{matrix} a=1 & e=-1 \\ a=0 & e=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cancel{EN}$

$\cancel{EN} \Rightarrow \cancel{EI}$

ZR: $(\forall a,b \in \mathbb{Q})[\exists x,y \in \mathbb{Q}][\, a \circ x = b \wedge y \circ a = b \,]$

$a \circ x = b$

$\frac{a+x}{2} = b$

$x = 2b - a$ ... existuje $x \in \mathbb{Q}$ pro lib $a,b \in \mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q}, \circ)$ je komutativní grupoid

(4) $M = \{-1, 0, 1\}$; $(M, \circ)$ – určete typ alg. struktury dané operační tabulkou

$\circ$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

$\underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI} \wedge \cancel{ZR}$

$e = 1$

$g = 0$

A: stačí vyšetřit jen trojici:

$\underline{-1 -1 -1}$: $(-1 \circ -1) \circ -1 = -1 \circ (-1 \circ -1)$

$1 \circ -1 = -1 \circ 1$

$\underline{-1 = -1} \Rightarrow \circ$ je A

$(M, \circ)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem

(5) Je dána množina $M = \{a, b\}$. Určete typ struktury $(P(M), \cup)$.

$P(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \emptyset\}$

$\cup$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$

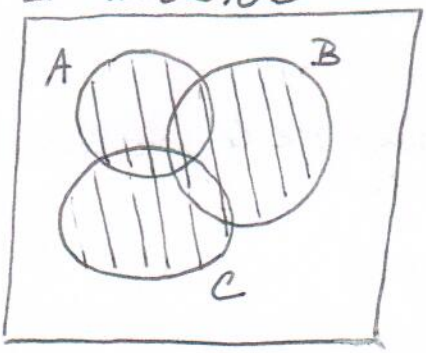
$\underline{ND} \wedge \underline{A} \wedge \underline{K} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI} \wedge \cancel{ZR}$

$e = \emptyset$

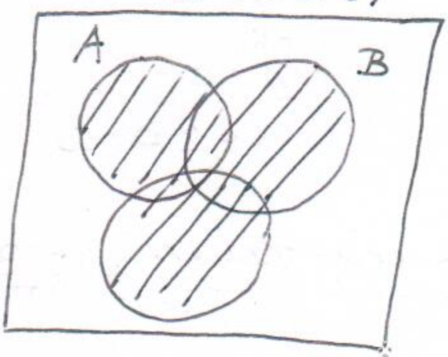
$(P(M), \cup)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem

Asociativita: vyšetřuje se pomocí Vennových diagramů

$L = (A \cup B) \cup C$



$P = A \cup (B \cup C)$



$P = L$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$\Rightarrow$ sjednocení na $P(M)$ je A