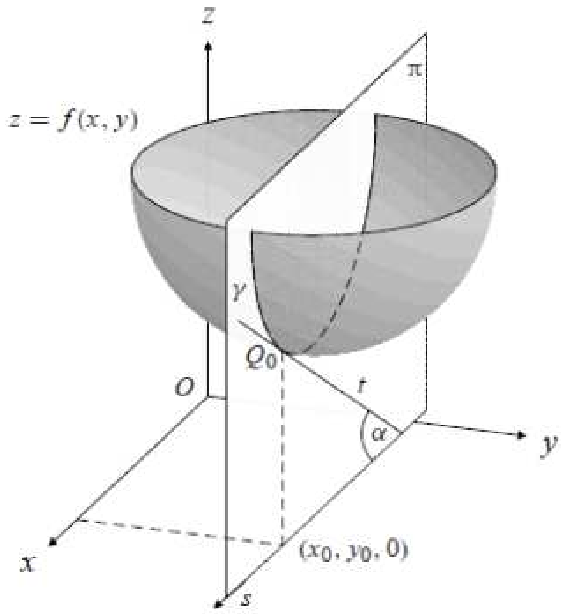
MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

10. cvičení (2. května 2019)

Parciální derivace – geometrický význam

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a G_f je její graf. Nechť π je rovina daná rovnicí $y = y_0$. Za rozumných předpokladů (např. spojitost funkce f) je průsečíkem $G_f \cap \pi$ křivka γ v rovině π a parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny t k této křivce v bodě $Q_0 = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, viz vedlejší obrázek. (Připomeňme, že směrnice tečny t je $\operatorname{tg} \alpha$).

Podobně, derivace $f_y(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny ke křivce v bodě Q_0, která vznikne průsečíkem plochy G_f s rovinou $x = x_0$.



Věta 3.2. (Schwarzova[1]) *Nechť funkce f má spojité parciální derivace f_{xy}, f_{yx} v bodě $[x_0, y_0]$. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{3.2}$$

Příklady

1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100$ [2]

b) $z = \frac{x}{y}$ [1]

c) $z = (x^2y + y)^4$ [3]

d) $z = x^y$ [1]

e) $z = x \cdot \ln(x^2 - y^2)$ [1]

f) $z = \sqrt{x + \sin xy}$ [1]

2. Spočtěte parciální derivace 1. řádu funkce f v bodě A:

a) $f(x, y) = y^2 + y \cdot \sqrt{1 + x^2}, A = [2, 5]$ [2]

b) $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right), A = [1, 2]$ [2]

c) $f(x, y) = \arctan\frac{y}{x}, A = [0, 1]$ [1]

3. Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^2 + xy - 3xy^3$ [1]

b) $z = \frac{xy+x}{y}$ [2]

c) $z = e^{2y} \cdot \sin x$ [3]

Zdroje

[1] KUBEN J., MAYEROVÁ Š., RAČKOVÁ P., ŠARMANOVÁ P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf

[2] DOŠLÁ Z., DOŠLÝ O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf

[3] KLAŠKA J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

Výsledky

1\. a) $z_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4, z_y = 2x^2 + 6xy - 5,$

b) $z_x = \frac{1}{y}, z_y = -\frac{x}{y^2}, y \neq 0$

c) $z_x = 8xy^4(x^2+1)^3, z_y = 4y^3(x^2+1)^4$

d) $z_x = yx^{y-1}, z_y = x^y \ln x \,, x > 0$

e) $z_x = \ln(x^2 - y^2) + \frac{2x^2}{x^2-y^2}, z_y = -\frac{2xy}{x^2-y^2}, x^2 - y^2 > 0$

f) $z_x = \frac{1+y\cdot\cos xy}{2\sqrt{x+\sin xy}}, z_y = \frac{x\cdot\cos xy}{2\sqrt{x+\sin xy}}, x + \sin xy > 0$

2\. a) $f_x([2,5]) = 2\sqrt{5}, f_y([2,5]) = 10 + \sqrt{5}$

b) $f_x([1,2]) = 0, f_y([1,2]) = \frac{1}{4}$

c) $f_x([0,1]) = 1, f_y([0,1]) = 0$

3\. a) $z_x = 2x + y - 3y^3, z_y = x - 9xy^2, z_{xx} = 2, z_y = -18xy, z_{xy} = z_{yx} = 1 - 9y^2$

b) $z_x = \frac{y+1}{y}, z_y = -\frac{x}{y^2}, z_{xx} = 0, z_{yy} = \frac{2x}{y^3}, z_{xy} = z_{yx} = -\frac{1}{y^2}$

c) $z_x = e^{2y}\cos x \,, z_y = 2e^{2y}\sin x \,, z_{xx} = -e^{2y}\sin x \,, z_{yy} = 4e^{2y}\sin x \,, z_{xy} = z_{yx} = 2e^{2y}\cos x$