MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

11. cvičení (9. května 2019)

Diferenciál funkce více dvou proměnných

Definice 4.1. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \qquad (4.1)$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h, k se nazývá *diferenciál funkce* v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $df(x_0, y_0)(h, k)$, příp. $df(x_0, y_0)$.

Diferenciál a jeho využití

$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k$

Je-li $x = x_0 + h, y = y_0 + k$, pak lze pomocí diferenciálu vypočítat přibližnou hodnotu funkce f v bodě $[x, y]$ vypočítat takto:

$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

Příklady

1. Spočtěte totální diferenciály 1. řádu funkce f v obecném bodě $[x, y]$:

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3$ [1]

b) $f(x, y) = y \cdot \ln 2x$ [1]

c) $f(x, y) = x^y$ [1]

d) $f(x, y) = \arctan xy$ [1]

e) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ [1]

2. Vypočtěte totální diferenciál funkce f v bodě A pro dané dx, dy.

a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}, A = [2, 2], dx = 0{,}03, dy = 0{,}01$ [1]

b) $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, A = [3{,}4], dx = 0{,}1, dy = 0{,}2$ [1]

c) $f(x, y) = e^{xy}, A = [1{,}2], dx = -0{,}1, dy = 0{,}1$ [1]

d) $f(x, y) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}, A = [2, 1], dx = 0{,}01, dy = 0{,}05$ [1]

3. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu následujících výrazů.

a) $\arctan \frac{1{,}02}{0{,}95}$ [2]

b) $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$ [2]

c) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$ [2]

d) $\ln(0{,}97^2 + 0{,}05^2)$ [2]

e) $e^{0{,}05^3 - 0{,}02}$ [2]

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Definice 5.4. Řekneme, že bod (x_0, y_0) je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže platí $f_x(x_0, y_0) = 0$ a $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Věta 5.6. *Nechť funkce f má v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť (x_0, y_0) je její stacionární bod.*
Označme

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y).$$

Pak platí:

1) *Jestliže je $J(x_0, y_0) > 0$, je v bodě (x_0, y_0) ostrý lokální extrém.*
   Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, je to minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, je to maximum.
2) *Jestliže je $J(x_0, y_0) < 0$, není v bodě (x_0, y_0) lokální extrém.*
3) *Jestliže je $J(x_0, y_0) = 0$, nedává věta odpověď (extrém zde může být, ale nemusí).*

4. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných.

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$ [3]

b) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$ [3]

c) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ [3]

d) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$ [3]

e) $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$ [3]

Zdroje

[1] KUBEN J., MAYEROVÁ Š., RAČKOVÁ P., ŠARMANOVÁ P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf

[2] DOŠLÁ Z., DOŠLÝ O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf

[3] KLAŠKA J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

Výsledky

1. a) $df(x,y) = 6x \cdot dx - 6y \cdot dy$
b) $df(x,y) = \frac{y}{x} \cdot dx + \ln 2x \cdot dy$
c) $df(x,y) = x^{y-1} \cdot (y \cdot dx + x \cdot \ln y \cdot dy)$
d) $df(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^2} \cdot (y \cdot dx + x \cdot dy)$
e) $df(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x \cdot dx + y \cdot dy)$

2. a) 0,02; b) $\frac{4}{50} = 0{,}08$; c) $-\frac{e^2}{10} \doteq -0{,}739$, d) $\frac{9}{500} = 0{,}018$

3. a) $\frac{\pi}{4} + 0{,}035$, b) 2,95, c) $\frac{\pi}{6} - \frac{0{,}09}{\sqrt{3}}$, d) $-0{,}06$, e) $1{,}13$

4. a) lokální minimum v bodě $\left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$
b) lokální minimum v bodě $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$
c) lokální minimum v bodě $[0,0]$, lokální maximum v bodě $\left[-\frac{5}{3}, 0\right]$, stac. body, v nichž extrém nenastává: $[-1,2]$; $[-1,-2]$
d) lokální minimum v bodě $\left[\sqrt{2}, 1\right]$, lokální maximum v bodě $\left[-\sqrt{2}, 1\right]$, stac. body, v nichž extrém nenastává: $\left[0{,}1+\sqrt{6}\right]$; $\left[0{,}1-\sqrt{6}\right]$
e) lokální minimum v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, stacionární bod, v němž extrém nenastává: $[0,0]$