

MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

1. cvičení

Posloupnosti, vlastnosti, limita posloupnosti

Zopakovat ze střední školy:

- posloupnosti a jejich vlastnosti (pojem posloupnost, rekurentní určení posloupnosti, některé vlastnosti posloupností)
- aritmetická posloupnost
- geometrická posloupnost

Literatura:

Bušek, I. (1985). *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. Praha: SPN.

Odvárko, O. (1995). *Matematika pro gymnázia - Posloupnosti a řady*. Praha: Prometheus.

Petáková, J. (1998). *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké škole*. Praha: Prometheus.

Příklady:

1. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní:

a) $\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

2. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená:

a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left((-1)^n \cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$

3. Pojem limita posloupnosti: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + n}{2n} = \frac{1}{2}$

4. Vypočítejte:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3 - n^2}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} - \frac{6n^3}{n^2 - 3} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-2)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 3})$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{6n+1}{2n-3}}$ h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n+1}{\sqrt{n^2 + 3}}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3^n}{3^n - 2}$ j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^2}$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$ l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

$$\text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3} - \frac{3+5+7+\dots+(2n+1)}{n-5} \right)$$

$$\text{n) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

$$\text{o) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)^n$$

$$\text{p) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n} \right)^{9n-7}$$

Výsledky:

1. a) rostoucí, b) není monotónní, c) klesající

2. a), omezená, b) omezená, c) není omezená

4. a) -2, b) $-\infty$, c) $\frac{15}{2}$, d) 0, e) 0, f) $-\frac{3}{2}$, g) 27, h) $\ln 2$, i) 1, j) ∞ , k) 0, l) $\frac{1}{2}$, m) $-\frac{19}{3}$, n) $\frac{4}{3}$, o) $e^{-\frac{1}{3}}$,
p) e^3

Teorie (viz přednášky):

Def. 1.1 Posloupnost je zobrazení z množiny \mathbb{N} do množiny \mathbb{R} .

Tuto definici můžeme přepsat do tvaru *Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel.*

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $[n; f(n)]$. Místo $f(n)$ bývá zvykem psát a_n a mluvíme o n -tém členu posloupnosti. Posloupnost můžeme zadat výčtem členů, obecným vzorcem či rekurentním vzorcem. Tyto způsoby si ukážeme na příkladech.

Def. 1.2 Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

rostoucí, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} > a_n$,

klesající, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} < a_n$,

nerostoucí, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \leq a_n$,

neklesající, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \geq a_n$,

ohraničená (omezená) shora, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$

platí $a_n \leq K$,

ohraničená (omezená) zdola, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$

platí $a_n \geq k$.

Posloupnost, která je ohraničená shora i zdola se nazývá ohraničená.

Def. 1.3 Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu L , jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$. Má-li posloupnost vlastní limitu, říkáme, že konverguje (k číslu L).

Věta 1.1 Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.

Def. 1.4 Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $K \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > K$. Podobným způsobem lze definovat nevlastní limitu $-\infty$. Má-li posloupnost nevlastní limitu, říkáme, že diverguje.

Věta 1.2 Každá posloupnost má nejvýš jednu limitu.

Věta 1.3 Nechť platí $\lim\{a_n\} = A$ a $\lim\{b_n\} = B$, přičemž platí $A, B \in \mathbb{R}$. Pak je

1. $\lim\{|a_n|\} = |A|,$

2. $\lim(\{a_n\} \pm \{b_n\}) = A \pm B,$

3. $\lim(\{a_n\} \cdot \{b_n\}) = A \cdot B,$

4. $\lim \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \frac{A}{B},$ je-li $B \neq 0.$