MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

4. cvičení (14. března 2019)

Derivace funkce jedné proměnné

A. Geometrický význam derivace

Def. 3.1 *Derivaci funkce v bodě x_0 nazveme limitu*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme $f(x)'$ resp. y'. Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

V Geogebře je zadaná funkce $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$

1. Spočítejme $f(4), f(-1)$, v Geogebře vyznačíme body $S1 = [4, f(4)], S2 = [-1, f(-1)]$.
   `S1 = (4, f(4)); S2 = (-1, f(-1))`
2. Zkonstruujme přímka procházející body S1, S2 (sečnu grafu funkce $f(x)$)
   `Primka(S1, S2)`
3. Směrnice této přímky $y = x - 3$ je rovna 1. Spočítejme hodnotu $\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}$ a porovnejme se směrnicí sečny.
   `k = (f(4)-f(-1))/(4-(-1))`
4. V **definici 3.1** hraje roli x číslo 4, roli x_0 číslo -1.
5. Vytvoříme nyní klesající posuvník a začínající ve 4 a končící v -1. Bod S1 nastavíme na souřadnice posuvníkového bodu.
   `S1 = (a, f(a))`
6. Upravíme definici směrnice k, aby odpovídala posuvníkovým bodům blížícím se k $x = -1$.
   `k = (f(a)-f(-1))/(a-(-1))`
7. Rozjedeme animaci a sledujeme sečnu, rovnici přímky i hodnotu parametru k.

B. Využití základních vzorců

Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

2. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

3. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

5. $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

C. Derivace složené funkce

Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = \sin^4 x$

2. $f(x) = e^{x^2-2x+1}$

3. $f(x) = \ln^3(x^2 - 1)$

4. $f(x) = \mathrm{tg}^3 2x$

5. $f(x) = 5^{x^2-1} + 3$

6. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1 + x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{(5 - 2x)^2}$

8. $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1 + x}{1 - x}$

D. Úprava funkce před stanovením derivace

Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = x^x$

2. $f(x) = x^{\ln x}$

3. $f(x) = x^{\sin x}$

E. Tečna a normála funkce

1. Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v bodě $T = [x_0, y_0]$.

$a)\ f(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 3}, T = [2, ?]$

$b)\ f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}, T = \left[-\dfrac{1}{2}, ?\right]$

$c)\ f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}, T = [2, ?]$

$d)\ f(x) = x \cdot \ln x\,, T = [e, ?]$

2. Napište rovnici tečny a normály

a) ke kružnici $x^2 + y^2 = 2$ v jejím bodě $[1, -1]$

b) k parabole $y^2 = x$ v jejím bodě $[4, -2]$

Výsledky

B. Využití základních vzorců

1. $\left[\frac{11}{6} \cdot \sqrt[6]{x^5}\right]$, 2. $\left[\frac{(x-1)\cdot\sqrt{x}}{2x^2}\right]$, 3. $\left[\frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]$, 4. $[x \cdot (2\ln x + 1)]$, 5. $\left[-\frac{4x}{(x^2-1)^2}\right]$, 6. $\left[\frac{1}{1-\sin x}\right]$

C. Derivace složené funkce

1. $[4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x]$, 2. $\left[2(x-1) \cdot e^{x^2-2x+1}\right]$, 3. $\left[\frac{6x \cdot \ln^2(x^2-1)}{x^2-1}\right]$, 4. $\left[\frac{6\sin^2 2x}{\cos^4 2x}\right]$,

5. $\left[2x \cdot 5^{x^2-1} \cdot \ln 5\right]$, 6. $\left[\frac{x(2+3x^2) \cdot \sqrt{1+x^2}}{x^2+1}\right]$, 7. $\left[\frac{4}{(5-2x)^3}\right]$, 8. $\left[-\frac{1}{\cos x}\right]$, 9. $\left[\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\right]$,

10. $\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$

D. Úprava funkce před stanovením derivace

1. $[x^x \cdot (\ln x + 1)]$, 2. $\left[2 \cdot \ln x \cdot x^{\ln x - 1}\right]$, 3. $\left[x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)\right]$

E. Tečna a normála funkce

1a. $T = \left[2, \frac{5}{7}\right]$, tečna: $y = \frac{11}{49}x + \frac{13}{49}$, normála: $y = -\frac{49}{11}x + \frac{741}{77}$

1b. $T = \left[-\frac{1}{2}, -1\right]$, tečna: $y = -2x - 2$, normála: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

1c. $T = [2, 1]$, tečna: $y = -\frac{1}{2}x + 2$, normála: $y = 2x - 1$

1d. $T = [e, e]$, tečna: $y = 2x - e$, normála: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}e$

2a. Tečna: $y = x - 2$, normála: $y = -x$

2b. Tečna: $y = -\frac{1}{4}x - 1$, normála: $y = 4x - 18$