MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

5. cvičení (21. března 2019)

A. Tečna ke grafu funkce
B. Výpočet limity funkce pomocí L'Hospitalova pravidla

A. Tečna ke grafu funkce

1. Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 4x + 3$, která svírá úhel $\varphi = 45°$ s osou x.

2. Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 2x + 3$, je-li tečna rovnoběžná s přímkou $p: 3x - y + 5 = 0$.

B. Limita funkce pomocí L'Hospitalova pravidla

Věta 11 (l'Hospitalovo pravidlo). *Buď* $x_0 \in \mathbb{R}^*$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
- $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka:

- Tímto pravidlem se přímo řeší limity typu $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$.
- Limity typu $[\infty - \infty]$ se řeší úpravou výrazu a převodem na výše uvedené typy, např. takto:
$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
- Limity typu $[0 \cdot \infty]$ se řeší úpravou
$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
- Limity typu $[0^0], [\infty^0], [1^\infty]$ se řeší úpravou
$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = [e^{0\cdot\infty}]$$
a následným výpočtem limity z výrazu $g(x) \cdot \ln f(x)$, což vede na předchozí případ.

Vypočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)}$

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

6. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \cdot \ln \dfrac{1}{x}$

7. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x$

9. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$

10. $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x \cdot \ln(x - 1)$

11. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$

12. $\lim\limits_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$

13. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

15. $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\cos \dfrac{\pi}{2} x\right)^{\ln x}$

16. $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x \cdot \sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

18. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

Zdroj:

ZEMÁNEK, Petr, HASIL, Petr. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I. Brno, jaro 2012.
Dostupné z: https://is.muni.cz/elportal/?id=980552

Výsledky

A. Tečna ke grafu funkce

1. $T = \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right]$, tečna: $y = x - \frac{13}{4}$

2. $T = \left[\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right]$, tečna: $y = 3x - \frac{13}{4}$

B. Výpočet limity funkce pomocí L'Hospitalova pravidla

1. $\left[\frac{4}{3}\right]$, 2. $\left[\frac{1}{2}\right]$, 3. $\left[-\frac{2}{\pi}\right]$, 4. $[0]$, 5. $[0]$

6. $[0]$, 7. $[\infty]$, 8. $[0]$, 9. $[0]$, 10. $[0]$

11. $\left[e^{-\frac{9}{2}}\right]$, 12. $\left[\frac{1}{e}\right]$, 13. $\left[\frac{1}{e}\right]$, 14. $\left[e^{-\frac{1}{6}}\right]$, 15. $[1]$

16. $\left[\frac{1}{2}\right]$, 17. $\left[\frac{1}{6}\right]$, 18. $[0]$