MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

8. cvičení (11. dubna 2019)

Vyšetřování průběhu funkce

C. Asymptoty funkce
D. Celkový postup vyšetřování průběhu funkce

Přibližné vyjádření funkce

A. Diferenciál
B. Taylorův polynom

C. Asymptoty funkce

Definice 21. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty.$$

Věta 22. *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

1. Určete asymptoty bez směrnice u funkce

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ [1]

b) $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$ [1]

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ [2]

2. Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech $\pm\infty$) u následujících funkcí.

1. $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}, D(f) = \boldsymbol{R} - \{1\}$ [1]

2. $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}, D(f) = \boldsymbol{R} - \{\pm 2\}$ [1]

3. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}, D(f) = \boldsymbol{R} - \{-1\}$ [1]

D. Celkový postup vyšetřování průběhu funkce

- Definiční obor
- Lichost, sudost, periodičnost
- Charakteristika bodů nespojitosti (výpočet jednostranných limit)
- Řešení rovnice $f(x) = 0$ (intervaly, kdy je funkce nad osou x či pod osou x)
- Řešení rovnice $f'(x) = 0$ (intervaly monotónnosti, lokální extrémy)
- Řešení rovnice $f''(x) = 0$ (intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexní body)
- Asymptoty

1. U funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ byl vyšetřen její průběh. Načrtněte graf funkce dle dostupných informací promítnutých na plátně (soubor Příklad 266 - vzorový.docx).

2. Vyšetřete průběh následujících funkcí a načtrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}, f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}, f''(x) = \frac{2x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$ [1]

b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2}, f''(x) = \frac{1}{x^3}$ [1]

c) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}, f'(x) = \frac{2-\ln x^2}{x^2}, f''(x) = \frac{2\ln x^2-6}{x^3}$ [1]

3. Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf.

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [1]

b) 2. $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$ [1]

c) 3. $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ [1]

A. Přibližné vyjádření funkce pomocí diferenciálu

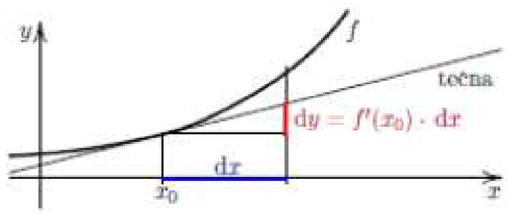
Věta 26. *Funkce* f *má v bodě* x_0 *diferenciál (je diferencovatelná v* x_0*) právě tehdy, když existuje vlastní derivace* $f'(x_0)$. *Přitom platí*

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h, \quad \textit{píšeme též } df(x) = f'(x)\,dx.$$

Pro dostatečně malé h platí:

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \text{též } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ pro } x \to x_0.$$

Geometrický význam diferenciálu



Obr. 6.7: Diferenciál je přírůstek funkce na tečně.

Pomocí diferenciálu určitě přibližnou hodnotu následujících výrazů.

$a)$ $\sin 29°$ $b)$ $\sqrt{80}$ $c)$ $\log 11$

$d)$ $\operatorname{arctg} 1{,}1$ $e)$ $\sqrt[3]{70}$ $f)$ $\cos 151°$

$g)$ $2^{1{,}003}$ $h)$ $\ln 1{,}1$

B. Přibližné vyjádření funkce pomocí Taylorova polynomu

Věta 27 (Taylorova věta). *Nechť má funkce* f *v okolí bodu* x_0 *vlastní derivace až do řádu* $n+1$ *pro nějaké* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Pak pro všechna* x *z tohoto okolí platí tzv.* *Taylorův vzorec*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

$$\textit{kde} \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ *je vhodné číslo ležící mezi* x_0 *a* x. *Chyba* $R_n(x)$ *se nazývá* *zbytek*

- Zbytek uvedený v Taylorově větě je v tzv. *Lagrangeově tvaru*, což není jediná možnost jeho vyjádření.
- Pokud v Taylorově vzorci vynecháme zbytek, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*.
- Pokud v Taylorově větě položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův vzorec*, resp. tzv. *Maclaurinův polynom*.

Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě x_0 pro funkci $f(x)$.

$a)$ $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1$ $b)$ $f(x) = e^x, x_0 = 1$

$c)$ $f(x) = \sin x\,, x_0 = 0$ $d)$ $f(x) = \cos x\,, x_0 = 0$

$e)$ $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, x_0 = 0$ $f)$ $f(x) = e^x \cdot \sin x\,, x_0 = 0$

Zdroje:

[1] ZEMÁNEK, Petr, HASIL, Petr. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I. Brno, jaro 2012. Dostupné z: https://is.muni.cz/elportal/?id=980552[1]

[2] Ústav matematiky, FSI VUT Brno. MATEMATIKA online – Matematika I. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx[2]

Výsledky:

C. Asymptoty: 1. a) x = 0, b) neexistuje, c) x = 1 2. a) $y = 3x + 3$, b) $y = -x$, c) $y = 0$

A. Diferenciál: a) $0{,}484885$, b) $8{,}9445$, c) $1{,}0434294$, d) $0{,}83539$, e) $4{,}125$, f) $-0{,}874752$, g) $2{,}004$, h) $0{,}1$

B. Taylorův polynom:

a) $1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$,
b) $e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3$,
c) $x - \frac{x^3}{3!}$
d) $1 - \frac{x^2}{2!}$
e) $1 - \frac{x^2}{2}$
f) $x + x^2 + \frac{x^3}{3}$

[1] Příklady vybrány z kapitoly I.5 Vyšetřování průběhu funkce
[2] Příklady vybrány z kapitol Monotonnost a extrémy funkce, Průběh funkce