MA0004 MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

9. cvičení (25. dubna 2019)

Definiční obor funkce dvou proměnných

1. Vyšetřete definiční obor následujících funkcí dvou proměnných a následně jej zakreslete v kartézském souřadném systému (O, x, y).

a) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-9}$ [3]

b) $f(x,y) = \ln(x \cdot \ln(y-x))$ [3]

c) $f(x,y) = \sqrt{(1-\ln y) \cdot \ln(-x)}$ [3]

d) $f(x,y) = \ln(x^2-y) + \sqrt{x-2y+4}$ [3]

e) $f(x,y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ [3]

f) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$ [3]

g) $f(x,y) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \cdot (x^2+y^2-6x)}$ [2]

h) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$ [2]

Limita funkce dvou proměnných

Věta 2.2.2. *Nechť* $\lim_{X\to X_0} f(X) = 0$, *funkce* f *je definovaná v ryzím okolí bodu* X_0 *a funkce* g *je ohraničená v tomto ryzím okolí bodu* X_0 *(tj. existuje konstanta* $K \geq 0$ *taková, že* $|g(X)| \leq K$ *v tomto ryzím okolí). Pak*

$$\lim_{X\to X_0} f(X)g(X) = 0.$$

2. Vypočítejte následující limity.

a) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [1, 5]

b) $\lim_{(x,y)\to(-4,-1)} \frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}$ [1, 2]

c) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ [3, 5]

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ [3, 5]

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ [3, 5]

f) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$ [5]

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cdot \cos\frac{1}{xy^2}$ [2]

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \sin\frac{1}{y}$ [1]

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) \cdot \sin\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{y}$ [2]

j) $\lim_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y}$ [2]

k) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$ [2]

l) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$ [1, 2]

Postupné limity

Věta 6.2 *Označme*

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L_1 \qquad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_2.$$

Existuje-li limita

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L,$$

pak platí $L = L_1 = L_2$.

Uvědomte si, že tato věta je implikací a představuje pouze podmínku nutnou, což značí, že bude sloužit k důkazu neexistence limity.

Možné transformace

- Polární souřadnice: $x = x_0 + \rho\cos\varphi$, $y = y_0 + \rho\sin\varphi$ (přibližování po kružnicích)
- $y = kx$ (přibližování po přímkách)
- $y = kx^2$ (přibližování po parabolách)

3. Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$ [3]

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ [3]

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$ [1]

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ [2, 4]

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ [1]

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ [5]

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2}$ [5]

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ [5]

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$ [3]

j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ [3]

Spojitost funkce

4. Určete body, v nichž není funkce spojitá (cvičení 2.6 v [2])

a) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$

c) $f(x,y) = \frac{x\cdot y}{x+y}$

d) $f(x,y) = \sin\frac{1}{xy}$

e) $f(x,y) = \frac{1}{\sin x\cdot\sin y}$

f) $f(x,y) = \ln|1-x^2-y^2|$

Zdroje

[1] KUBEN J., MAYEROVÁ Š., RAČKOVÁ P., ŠARMANOVÁ P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf

[2] DOŠLÁ Z., DOŠLÝ O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf

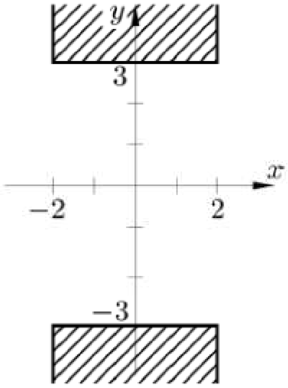
[3] KLAŠKA J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

[4] KURÁŇOVÁ S., VONDRA J. *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2009. Dostupné z: https://is.muni.cz/elportal/estud/prif/ps09/sbirka/web/index.html

[5] KADEŘÁBEK Z. *Limity funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. 2007. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/xpb8v/Limity_funkci_vice_promennych.pdf

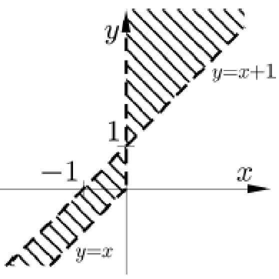
Výsledky

1. a)



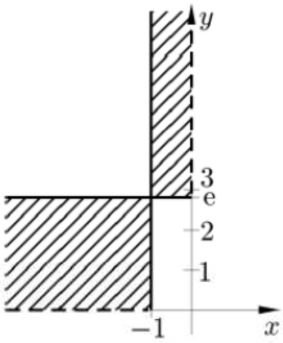
Obr. 1

b)



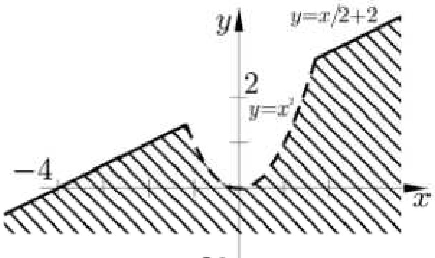
Obr. 2

c)



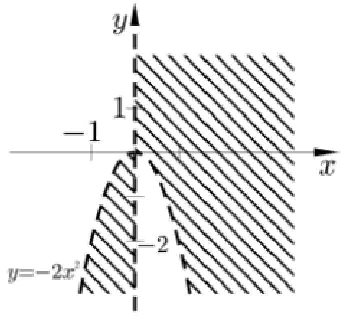
Obr. 4

d)



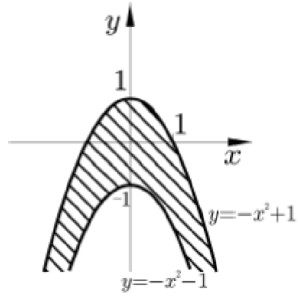
Obr. 5

e)



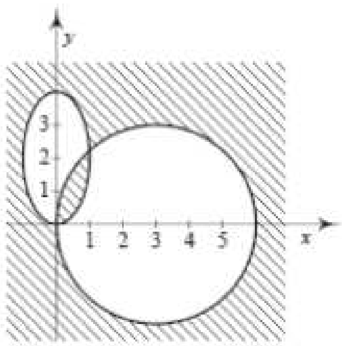
Obr. 6

f)

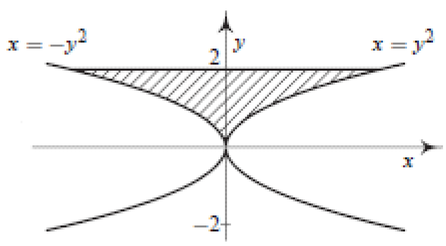


Obr. 7

g)



h)



2. a) $\ln 2$, b) 0, c) $\frac{3}{8}$, d) 12, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{4}{5}$, g) 0, h) 0, i) 0, j) 0, k) 2, l) 2

3. a) neex., b) neex., c) neex., d) neex., e) 0, f) neex., g) 0, h) 0, i) neex., j) neex.

4. a) [0, 0], b) $\{[x, y]; x = -y\}$, c) $\{[x, y]; x = -y\}$, d) $\{[x, y]; x = 0 \vee y = 0\}$, e) $\{[x, y]; x = k\pi,$ $y = k\pi, k \in \boldsymbol{N}\}$, f) $\{[x, y]; x^2 + y^2 = 1\}$