9. cvičení: **TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL 1. ŘÁDU A JEHO VYUŽITÍ**

1. Vypočítejte totální diferenciál funkce:

a) $u = 3x^2 - 2y^3$

$[du = 6x\,dx - 6y^2\,dy]$

b) $u = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$

$[du = (2xy^4 - 3x^2y^3 + 4x^3y^2)\,dx + (4x^2y^3 - 3x^3y^2 + 2x^4y)\,dy]$

c) $u = y \cdot \ln 2x$

$[du = \frac{y}{x}\,dx + \ln 2x\,dy]$

d) $u = \operatorname{arctg} xy$

$[du = \frac{1}{1+x^2y^2}(y\,dx + x\,dy)]$

e) $u = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$

$[du = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}]$

f) $u = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$

$[du = \frac{2}{y^2 \sin\frac{2x}{y}}(y\,dx - x\,dy)]$

g) $u = x^y$

$[du = x^y\left(\frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy\right)]$

2. Vypočítejte hodnotu totálního diferenciálu funkce v daném bodě:

a) $u = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ v bodě $P[2,2]$, pro $dx = 0{,}03$, $dy = 0{,}01$

$[0{,}02]$

b) $u = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ v bodě $P[2,1]$, pro $dx = 0{,}01$, $dy = 0{,}03$

$[\frac{1}{36}]$

3. Vypočítejte přibližnou hodnotu daného výrazu

a) $V = \sqrt[4]{0{,}97} \cdot \sqrt[3]{0{,}99}$

$[\frac{1187}{1200}]$

b) $V = \sqrt{1{,}02^3 + 1{,}99^3}$

$[2{,}99]$

c) $V = 1{,}08^{3{,}96}$

$[1{,}32]$

d) $V = \sin 29° \cdot \operatorname{tg} 46°$

$[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{180}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)]$

4. Válec má poloměr 2 *dm* a výšku 10 *dm*. Jak se změní jeho objem, jestliže se při deformaci poloměr zvětší na 2,05 *dm* a výška naopak zmenší na 9,8 *dm*? (zvětší se přibližně o 3,77 dm^3)

5. Při deformaci kužele se jeho poloměr zvětšil z 30 *cm* na 30,1 *cm* a výška se zmenšila z 60 *cm* na 59,5 *cm*. Vypočítejte přibližně změnu objemu. (zmenší se přibližně o 94,2 cm^3)

6. Jak se změní velikost úhlopříčky obdélníku se stranami o velikostech 6 *m*, 8 *m*, jestliže kratší z nich se zvětší o 2 *mm* a delší se zmenší o 5 *mm*. (zmenší se přibližně o 2,8 *mm*)

7. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, měřené s přesností na 0,1 *cm*, byly rovny 12 *cm* a 16 *cm*. Určete přibližnou chybu při výpočtu přepony. (0,14 *cm*)

Extrémy funkce dvou proměnných

1. Nalezněte lokální extrémy funkce $z = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$.
[lokální minimum v b. [0;0]; lokální maximum v b. [−4,0]]

2. Určete lokální extrémy funkce $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$.
[lokální minimum v b. [7,−3]]

3. Určete lokální extrémy funkce $z = -3x^4 - 5y^4$
[o extrému nemůžeme rozhodnout, je však zřejmé, že v b. [0,0] bude maximum]

4. Určete lokální extrémy funkcí:

a) $z = 2xy - 2x - 4y$
[neexistuje]

b) $z = x^3 - 3xy + y^3$
[lokální minimum v b. [1,1]]

c) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
[lokální minimum v b. [5,2]]

d) $z = 3 + (x^2 + y) \cdot e^y$
[lokální minimum v b. [0,−1]]

e) $z = x^3 + 27y^3 - 6xy + 11$
[lokální minimum v b. $[\frac{2}{3}, \frac{2}{9}]$]

Literatura

Hájek, J. (2000). *Cvičení z matematické analýzy. Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Brno: MU.
Lepka, K. *Matematická analýza 1* (skripta).