1. cvičení

Posloupnosti, vlastnosti, limita posloupnosti

Zopakovat ze střední školy:

- posloupnosti a jejich vlastnosti (pojem posloupnost, rekurentní určení posloupnosti, některé vlastnosti posloupností)
- aritmetická posloupnost
- geometrická posloupnost

Literatura:

Bušek, I. (1985). *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* Praha: SPN.
Odvárko, O. (1995). *Matematika pro gymnázia - Posloupnosti a řady.* Praha: Prometheus.
Petáková, J. (1998*). Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké škole.* Praha: Prometheus.

Příklady:

1. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní:

a) $\left(\dfrac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

2. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená:

a) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\dfrac{3n+4}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left((-1)^n \cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$

3. Pojem limita posloupnosti: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+n}{2n}=\dfrac{1}{2}$

4. Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3-n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{n+1}-\dfrac{6n^3}{n^2-3}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-2)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(n-\sqrt{n^2+3}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+1}{2n-3}}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+3}}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3^n}{3^n-2}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^2}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$ l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3}-\dfrac{3+5+7+\ldots+(2n+1)}{n-5}\right)$ n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$

o) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n}$ p) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{9n-7}$

Výsledky:

1. a) rostoucí, b) není monotónní, c) klesající

2. a), omezená, b) omezená, c) není omezená

4. a) -2, b) $-\infty$, c) $\frac{15}{2}$, d) 0, e) 0, f) $-\frac{3}{2}$, g) 27, h) ln2, i) 1, j) ∞, k) 0, l) $\frac{1}{2}$, m) $-\frac{19}{3}$, n) $\frac{4}{3}$, o) $e^{-\frac{1}{3}}$, p) e^3

Literatura:

Hájek, J. *Cvičení z matematické analýzy.* Diferenciální počet v R. Brno: MU.

Teorie (viz přednášky):

Def. 1.1 *Posloupnost je zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$.*

Tuto definici můžeme přepsat do tvaru *Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel.*

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $[n; f(n)]$. Místo $f(n)$ bývá zvykem psát a_n a mluvíme o n-tém členu posloupnosti. Posloupnost můžeme zadat výčtem členů, obecným vzorcem či rekurentním vzorcem. Tyto způsoby si ukážeme na příkladech.

Def. 1.2 *Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá*
rostoucí, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} > a_n$,
klesající, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} < a_n$,
nerostoucí, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \leq a_n$,
neklesající, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \geq a_n$,
ohraničená (omezená) shora, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$

platí $a_n \leq K$,
ohraničená (omezená) zdola, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq k$.
Posloupnost, která je ohranočená shora i zdola se nazývá ohraničená.

Def. 1.3 *Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu L, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$. Má-li posloupnost vlastní limitu, říkáme, že konverguje (k číslu L).*

Věta 1.1 *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Def. 1.4 *Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $K \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > K$. Podobným způsobem lze definovat nevlastní limitu $-\infty$. Má-li posloupnost nevlastní limitu, říkáme, že diverguje.*

Věta 1.2 *Každá posloupnost má nejvýš jednu limitu.*

Věta 1.3 *Nechť platí $\lim\{a_n\} = A$ a $\lim\{b_n\} = B$, přičemž platí $A, B \in \mathbb{R}$. Pak je*
1. $\lim\{|a_n|\} = |A|$,
2. $\lim(\{a_n\} \pm \{b_n\}) = A \pm B$,
3. $\lim(\{a_n\} \cdot \{b_n\}) = A \cdot B$,
4. $\lim \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \frac{A}{B}$, *je-li $B \neq 0$.*