2. cvičení

**Hromadné body, limita funkce**

**a) Najděte všechny hromadné body daných posloupností a určete limitu superior a limitu inferior daných posloupností:**

**1.** $a_n = (-1)^{n+2}$

**2.** $a_n = n \cdot (-1)^n$

**3.** $a_n = -4 + (-1)^n$

**4.** $a_n = 2n + (-1)^n$

**5.** $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

**6.** $a_n = -(-1)^n \cdot \dfrac{3n}{2n+1}$

**7.** $a_n = \cos(n\pi)$

**8.** $a_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$

**9.** $a_n = \cos\dfrac{2n\pi}{3}$

**10.** $a_n = \dfrac{2n}{n+1} \cdot \sin\dfrac{n\pi}{2}$

**11.** $a_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} \cdot \cos\dfrac{n\pi}{3}$

**b) Vypočítejte limity funkce:**

Vlastní limita ve vlastním bodě:

**1.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x}{x+1}$

**2.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \sin x$

Vlastní limita v nevlastním bodě:

**3.** $\lim\limits_{x\to\infty} arctg\, x$

**4.** $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\, x$

**5.** $\lim\limits_{x\to\infty} arc\cot g\, x$

**6.** $\lim\limits_{x\to-\infty} arc\cot g\, x$

**7.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

**8.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+4x}{5x^2-1}$

Nevlastní limita ve vlastním bodě:

**9.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{x^4}$

**10.** $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x}{x+2}$

**11.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{(x-2)^2}$

**12.** $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1-x}{x-3}$

Nevlastní limita v nevlastním bodě:

**13.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right)$

**14.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-5x-1}{x^3+2x+7}$

**15.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(5x^3+2x+3\right)$

**16.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^3+1}{x}\right)$

**Výsledky:**

**a) 1.** hromadné body: -1, 1, $\limsup_{x\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -1$; **2.** hromadné body: $-\infty, \infty$, $\limsup_{x\to\infty} a_n = \infty$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -\infty$; **3.** hromadné body: -5, -3, $\limsup_{x\to\infty} a_n = -3$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -5$; **4.** hromadný bod: $\infty$, $\limsup_{x\to\infty} a_n = \liminf_{x\to\infty} a_n = \infty$; **5.** hromadné body: 0, 1, $\limsup_{x\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = 0$; **6.** hromadné body:$-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$, $\limsup_{x\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -\frac{3}{2}$;

**7.** hromadné body: -1, 1, $\limsup_{x\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -1$; **8.** hromadné body: $-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\limsup_{x\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; **9.** hromadné body: $-\frac{1}{2}, 1$, $\limsup_{x\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$; **10.** hromadné body: -2, 0, 2, $\limsup_{x\to\infty} a_n = 2$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -2$; **11.** hromadné body: $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$, $\limsup_{x\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{x\to\infty} a_n = -1$;

**b) 1.** $\frac{3}{2}$, **2.** $\frac{\pi^2}{4}$, **3.** $\frac{\pi}{2}$, **4.** $-\frac{\pi}{2}$, **5.** 0, **6.** $\pi$, **7.** 0, **8.** $\frac{2}{5}$, **9.** $\infty$, **10.** $\infty$, **11.** $\infty$, **12.** $-\infty$, **13.** $\infty$, **14.** $\infty$, **15.** $-\infty$, **16.** $\infty$.

**Literatura:**

http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/limita_a_spojitost/

**Teorie (viz přednášky):**

**Z def. 1.3** Má-li posloupnost vlastní limitu, říkáme, že **konverguje** (k číslu L).

**Věta 1.1** Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.

**Z def. 1.4** Má-li posloupnost nevlastní limitu, říkáme, že **diverguje**.

Def. 1.5 *Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Def. 1.6 *Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $H \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má hromadný bod $H$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro nekonečně mnoho $n > n_0$ platí $|a_n - H| < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má hromadný bod $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro nekonečně mnoho $n > n_0$ platí $a_n > K$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má hromadný bod $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro nekonečně mnoho $n > n_0$ platí $a_n < K$.*

Věta 1.9 *Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.*

Def. 1.7 *Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$. Největší z hromadných bodů nazveme* limita superior *a značíme* $\limsup a_n$. *Nejmenší z hromadných bodů nazveme* limita inferior *a značíme* $\liminf a_n$.

Věta 1.10 *Posloupnost $\{a_n\}$ má limitu právě tehdy, když platí* $\limsup a_n = \liminf a_n$. *Tato společná hodnota je limitou posloupnosti.*