

3. cvičení

Limita funkce, spojitost funkce (viz přednáška)

a) Zjistěte, zda existuje $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\left| x - \frac{1}{3} \right|}{3x - 1}$.

b) Dokažte, že neexistuje $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x - 3}$.

c) Vypočítejte limity funkce:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 7x - 44}{x^2 - 6x + 8}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^4 - 1} \right)$

7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 3x}{x} + \frac{\sin 5x}{x} \right)$

11. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x + 2 \sin x}{\sin^2 x}$

13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x - \sin 2x}{\cos^2 x}$

15. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}$

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x}$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{2x^2 - x + 1} \right)^2$

25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

12. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{1 + \cos x}$

14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 - \sin x}$

16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right)$

18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x + 1} - 1}$

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 - x}{x^2 - 3} - \frac{3x^3 - 4}{x^3 - x} \right)^4$

Výsledky:

- c) 1. 4, 2. neexistuje, 3. $\frac{15}{2}$, 4. -1, 5. $\frac{1}{2}$, 6. -12, 7. $\frac{1}{4}$, 8. $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 9. 9, 10. $\sqrt{2}$, 11. 0, 12. 2, 13. 0, 14. 2, 15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 16. $\frac{1}{2}$, 17. $\sqrt{2}$, 18. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 19. 1, 20. $\frac{3}{4}$, 21. 3, 22. 8, 23. $\frac{1}{8}$, 24. 16, 25. 0.

Literatura:

<http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Funkce/Limita-funkce.alej>

Teorie (viz přednášky)

Def. 2.2 Řekneme, že funkce má v bodě x_0 limitu rovnou $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje ryzí δ - okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Nahradíme-li pojem ryzí δ okolí pojmem pravé (levé) ryzí okolí, mluvíme o limitě zprava (zleva). Značit budeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ či $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Def. 2.3 Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 nevlastní limitu ∞ ($-\infty$), jestliže pro každé $K \in \mathbb{R}$ existuje ryzí delta okolí bodu x_0 takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x) > K$ ($f(x) < K$). Nahradíme-li pojem okolí pojmem pravé (levé) okolí, budeme opět hovořit o limitě zprava (zleva).

Věta 2.2 Necht' platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, přičemž platí $A, B \in \mathbb{R}$. Pak je

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$,
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, je-li $B \neq 0$.