4. cvičení

Derivace funkce

1. Pomocí definice derivace určete derivaci následující funkce: $y = x^4$.

- vypočítejte směrnici tečny grafu funkce v bodě -1
- vypočítejte směrnici tečny grafu funkce v bodě 0
- vypočítejte směrnici tečny grafu funkce v bodě 1

2. Dokažte, že funkce $y = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci.

3. Vypočítejte první derivaci následujících funkcí:

6) $y = x \quad \sqrt{x} \quad \sqrt[3]{x}$

7) $y = \dfrac{2x - \sqrt[3]{x} + 3}{\sqrt{x}}$

8) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

9) $y = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

10) $y = x \cdot \sin x$

11) $y = (2 - x^2) \cdot \cos x$

12) $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$

13) $y = \cos x \cdot \cot g\, x$

14) $y = e^x (x^2 - 2x + 3)$

Derivace složené funkce

4. Vypočítejte derivace následujících funkcí:

a) $f(x) = (1-5x)^4$ $\quad [f'(x) = -20(1-5x)^3]$

b) $f'(x) = (1-x^2)^3$ $\quad [f'(x) = -6x(1-x^2)^2]$

c) $f(x) = (2x+3)^{-3}$ $\quad [f'(x) = -6(2x+3)^{-4}]$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ $\quad \left[f'(x) = \frac{2x\sqrt[3]{x^2+1}}{3(x^2+1)}\right]$

e) $f(x) = 1-(3-2x)^{-\frac{2}{3}}$ $\quad \left[f'(x) = \frac{-4\sqrt[3]{3-2x}}{3(3-2x)^2}\right]$

f) $f(x) = \sin^3 x$ $\quad [f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x]$

g) $f(x) = \sin 3x$ $\quad [f'(x) = 3\cos 3x]$

h) $f(x) = \sin^2 3x$ $\quad [f'(x) = 3\sin 6x]$

i) $f(x) = \mathrm{tg}^3 x - 3\cdot \mathrm{tg}\, x$ $\quad \left[f'(x) = \frac{3}{\cos^2 x}(\mathrm{tg}^2 x - 1)\right]$

j) $f(x) = \ln(2x+3)$ $\quad \left[f'(x) = \frac{2}{2x+3}\right]$

k) $f(x) = e^{x^2-3x}$ $\quad [f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x}]$

l) $f(x) = \ln^3 2x^2$ $\quad \left[f'(x) = \frac{6\ln^2 2x^2}{x}\right]$

m) $f(x) = e^{x\sqrt{x}}$ $\quad \left[f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\cdot e^{x\sqrt{x}}\right]$

5. Vypočítejte derivace následujících funkcí:

Vypočítejte

a) $y = \sin^2\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)$ $\left[y' = \sin 2\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right) \cdot \left(\frac{-3x^2-2x+3}{(x^2+1)^2}\right)\right]$

b) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\left[y' = \frac{x}{x^4-1}\right]$

c) $y = \log_3 \frac{x}{x^2-3x+2}$ $\left[y' = \frac{-x^2+2}{x(x^2-3x+2) \cdot \ln 3}\right]$

d) $y = x^x$ $\left[y' = x^x(1+\ln x)\right]$

e) $y = x^{\sin x}$ $\left[y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)\right]$

f) $y = 5^{\frac{x}{2x+3}}$ $\left[y' = 5^{\frac{x}{2x+3}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{3}{(2x+3)^2}\right]$

g) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+1}$ $\left[y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2+x^2}\right]$

h) $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$ $\left[y' = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\right]$

Teorie (viz přednášky)

Def. 3.1 *Derivaci funkce v bodě x_0 nazveme limitu*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme $f(x)'$ resp. y'. Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

Věta 3.1 *Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci (derivaci zprava, derivaci zleva). Pak je zde spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva).*

Věta 3.2 *1.* $(cf(x_0))' = cf'(x_0)$
2. $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
3. $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{f^2(x_0)}$

Def. 3.2 *Řekneme, že funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže má derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Je-li interval na některé straně uzavřený, musí mít patřičnou jednostrannou derivaci.*

Nyní si uvedeme vzorce pro derivaci elementárních funkcí.

3.1. $(c)' = 0$

3.2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3.3. $(\sin x)' = \cos x$

3.4. $(\cos x)' = -\sin x$

3.5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$

3.6. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

3.7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3.8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

3.9. $(e^x)' = e^x$

3.10. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

3.11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

3.14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Věta 3.3 *Nechť funkce $u = g(x)$má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce $y = f(u)$ má vlastní dervaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí:*

$$\acute{F}(x_0) = \acute{f}(x_0) \cdot \acute{g}(x_0) = \acute{f}[g(x_0)] \cdot \acute{g}\ (x_0).$$