

6. cvičení

Aplikace derivace: průběh funkce

Vyšetřování průběhu funkce

- A. Monotónnost a lokální extrém
- B. Konvexnost/konkávnost a inflexní body
- C. Asymptoty funkce
- D. Celkový postup vyšetřování průběhu funkce

A. Monotónnost a lokální extrém

Určete intervaly monotonie a extrém pro následující funkce:

1. $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

2. $y = \frac{1}{x^2+3x+2}$

3. $y = x + \arctg 5x$

4. $y = \frac{e^x}{x+1}$

5. $y = \ln \frac{x}{x+2}$

B. Konvexnost/konkávnost a inflexní body

Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce a najděte případné inflexní body u následujících funkcí:

1. $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

2. $y = \frac{1}{x^2+3x+2}$

3. $y = x + \arctg 5x$

4. $y = \frac{e^x}{x+1}$

5. $y = \ln \frac{x}{x+2}$

C. Asymptoty funkce

Definice 21. Bud' $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f , jestliže má f v x_0 alespoň jednu limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Věta 22. *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí funkce f pro $x \rightarrow +\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogické tvrzení platí pro $x \rightarrow -\infty$.

Určete asymptoty u funkce:

1. $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

2. $y = \frac{1}{x^2+3x+2}$

3. $y = x + \operatorname{arctg}5x$

4. $y = \frac{e^x}{x+1}$

5. $y = \ln \frac{x}{x+2}$

D. Celkový postup vyšetřování průběhu funkce

- Definiční obor
- Průsečíky grafu funkce s osami x a y
- Lichost, sudost, periodičnost
- Charakteristika bodů nespojitosti (výpočet jednostranných limit)
- Řešení rovnice $f(x) = 0$ (intervaly, kdy je funkce nad osou x či pod osou x)
- Řešení rovnice $f'(x) = 0$ (intervaly monotónnosti, lokální extrémy)
- Řešení rovnice $f''(x) = 0$ (intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexní body)
- Asymptoty