7. cvičení

Aplikace derivace: Přibližné vyjádření funkce

Diferenciál

Def. 5.2 *Řekneme, že funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí bodu x_0 takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h),$$

kde A je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce, pro niž platí $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$.

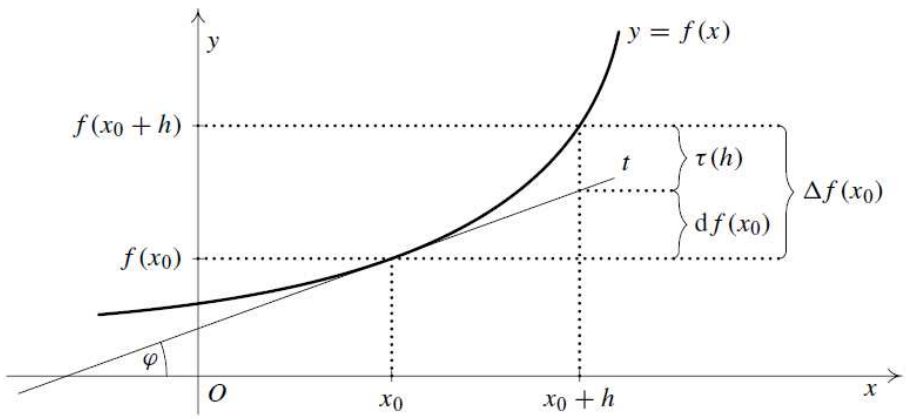
Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, nazývá se výraz $A \cdot h$ diferenciál funkce f v bodě x_0 a značí se $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ či stručněji $\mathrm{d}f(x_0)$.

Věta 5.1 *Funkce f má v bodě x_0 diferenciál právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Konstanta A z předchozí definice je dána vztahem $A = f'(x_0)$, je tedy*

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Píšeme též $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x$.

Geometrický význam diferenciálu



Obr. 7.1: Geometrický význam diferenciálu

Nejběžnější aplikací diferenciálu je přibližný výpočet funkčních hodnot spočívající ze vztahu:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

Úloha 1: Vypočítejte přibližně:

a) $sin31°$ **b)** $sin29°$

c) $arctg0{,}97$ **d)** $arctg1{,}02$

e) $e^{2{,}03}$ **f)** $cos47°$

g) $0{,}95^3$

Taylorův polynom

Může se stát, že přibližné vyjádření funkce diferenciálem není dostatečně přesné. V tomto případě můžeme hledat vyjádření polynomem stupně n ve tvaru $P_n(x) = a_0 + A_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$. Je rozumné požadovat, aby platilo

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P_n(x) &= a_0 \\ f'(x_0) &= P_n'(x) &= a_1 \\ f''(x_0) &= P_n''(x) &= 2a_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= P_n^{(n)}(x) &= n!a_n \end{aligned}$$

Hledaný polynom má tvar

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = T_n(x)$$

Polynom $T_n(x)$ se nazývá Taylorův polynom se středem x_0. Pan Taylor, po němž je pojmenována následující věta, dokázal, že funkci $f(x)$ lze nahradit polynomem.

Věta 5.2 *Nechť funkce f má v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro některá $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí:*

$$f(x) = T_n(x_0) + R_n(x).$$

$$R_n x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodné číslo mezi x a x_0 je zbytek (chyba). Je-li $x_0 = 0$, pak se polynom nazývá Maclaurinův.

__Úloha 2:__ Určete Taylorův polynom 2. řádu funkce $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

__Úloha 3:__ Určete Taylorův polynom 3. řádu funkce $f(x) = arctgx$ v bodě $x_0 = -1$.

__Úloha 4:__ Pomocí Taylorova polynomu 3. řádu určete přibližně hodnotu $cos58°$.

Výsledky

Úloha 1: a) $\frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$, b) $\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$, c) $\frac{\pi}{4} - 0{,}015$, d) $\frac{\pi}{4} + 0{,}01$, e) $1{,}03e^2$, f) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{180}$, g) 0,85

Úloha 2: $T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$

Úloha 3: $T_3(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{12}(x+1)^3$

Úloha 4: *0,5299*

Literatura

Došlá, Z., & Kuben, J. (2004). *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* MU: Brno.
Lepka, K. *Matematická analýza 1* (skripta).