8. cvičení: **PARCIÁLNÍ DERIVACE**

1. Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $f(x,y) = 6x - 5y + 17{,}5$

$[f'_x = 6;\ f'_y = -5;\ f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{xy} = 0]$

b) $f(x;y) = x^2 + xy + 2y^2$

$[f'_x = 2x + y;\ f'_y = x + 4y;\ f''_{xx} = 2;\ f''_{yy} = 4;\ f''_{xy} = 1]$

c) $f(x;y) = 4\sqrt[3]{x^5} - \ln y^2$

$[f'_x = \frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2};\ f'_y = -\frac{2}{y};\ f''_{xx} = \frac{40}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x}};\ f''_{yy} = \frac{2}{y^2};\ f''_{xy} = 0]$

d) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y^2 + 3y^3$

$[f'_x = 6x^2 - 6xy^2;\ f'_y = -6x^2y + 9y^2;\ f''_{xx} = 12x - 6y^2;\ f''_{yy} = -6x^2 + 18y;\ f''_{xy} = -12xy]$

e) $f(x,y) = \sin x \ln y$

$[f'_x = \cos x \cdot \ln y;\ f'_y = \sin x \cdot \frac{1}{y};\ f''_{xx} = -\sin x \cdot \ln y;\ f''_{yy} = \frac{-\sin x}{y^2};$
$f''_{xy} = \frac{\cos x}{y}]$

2. Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$

$[f'_x = \frac{1}{y^2};\ f'_y = \frac{-2x}{y^3};\ f''_{xx} = 0;\ f''_{yy} = \frac{6x}{y^4};\ f''_{xy} = \frac{-2}{y^3}]$

b) $f(x,y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$

$[f'_x = \sqrt{y} - \frac{y}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}};\ f'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}};\ f''_{xx} = \frac{4y}{9\sqrt[3]{x^7}};\ f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}};\ f''_{yy} = \frac{-x}{4\sqrt{y^3}}]$

c) $f(x;y) = x^y$

$[f'_x = y\cdot x^{y-1};\ f'_y = x^y\cdot \ln x;\ f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2};\ f''_{yy} = x^y\cdot \ln^2 x;\ f''_{xy} = x^{y-1}[1 + y\ln x]]$

Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkcí:

d) $f(x;y) = (\sin x)^{\cos y}$

$[f'_x = \cos y\,(\sin x)^{\cos y - 1}\cdot \cos x;\ f'_y = -\sin y\,(\sin x)^{\cos y}\cdot \ln \sin x]$

e) $f(x;y) = \frac{x-y}{x+y}$

$[f'_x = \frac{2y}{(x+y)^2};\ f'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}]$

f) $f(x;y) = \frac{3xy}{x-y}$

$[f'_x = \frac{-3y^2}{(x-y)^2};\ f'_y = \frac{3x^2}{(x-y)^2}]$

g) $f(x;y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$[f'_x = \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2};\ f'_y = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}$

3. Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $f(x;y) = \sin \frac{y^2}{x}$

$\left[f'_x = -\frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y^2}{x} \; ; \; f'_y = \frac{2y}{x} \cos \frac{y^2}{x} \right]$

b) $f(x;y) = \operatorname{cotg} \frac{y}{x}$

$\left[f'_x = \frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{y}{x}} \; ; \; f'_y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{y}{x}} \right]$

c) $f(x;y) = x^2 \cdot \cos(x+y)$

$\left[f'_x = 2x \cos(x+y) - x^2 \sin(x+y) \; ; \; f'_y = -x^2 \sin(x+y) \right]$

d) $f(x,y) = e^{xy}$

$\left[f'_x = y e^{xy} \; ; \; f'_y = x \cdot e^{xy} \right]$

e) $f(x,y) = \ln \frac{x-y}{x+y}$

$\left[f'_x = \frac{2y}{x^2-y^2} \; ; \; f'_y = \frac{-2x}{x^2-y^2} \right]$

f) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$

$\left[f'_x = \frac{1}{x + \ln y} \; ; \; f'_y = \frac{1}{y(x + \ln y)} \right]$

g) $f(x,y) = xy \ln(x+y)$

$\left[f'_x = y \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} \; ; \; f'_y = x \cdot \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} \right]$

h) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

$\left[f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \; ; \; f'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \right]$

4. Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$

$\left[f'_y = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \; ; \; f'_x = \frac{-y}{x\sqrt{y^2-x^2}} \right]$

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$\left[f'_x = \frac{-y}{x^2+y^2} \; ; \; f'_y = \frac{x}{x^2+y^2} \right]$

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$

$\left[f'_x = \frac{y}{x^2+y^2} \; ; \; f'_y = \frac{-x}{x^2+y^2} \right]$

d) $f(x,y) = (x+y)^y$

$\left[f'_x = y \cdot (x+y)^{y-1} \; ; \; f'_y = (x+y)^y \left[\ln(x+y) + \frac{y}{x+y} \right] \right]$

e) $f(x,y) = (2+xy)^{y+1}$

$\left[f'_x = (2+xy)^y y(y+1) \; ; \; f'_y = (2+xy)^{y+1} \left[\ln(2+xy) + \frac{x(y+1)}{2+xy} \right] \right]$

Literatura

Hájek, J. (2000). *Cvičení z matematické analýzy. Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Brno: MU.

Lepka, K. *Matematická analýza 1* (skripta).