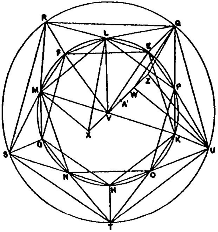
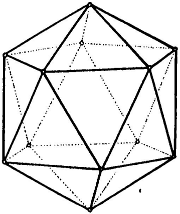
MA2BP_PKG: Konstrukční geometrie





Poslední aktualizace: 24. května 2019, Vojtěch Žádník

http://is.muni.cz/el/1441/jaro2019/MA0007/um/prednaska.pdf

Plán

Celkově

- jaro 2019: konstrukční geometrie (syntetická) — pravítko, kružítko, trpělivost
- podzim 2019 a jaro 2020: počítací geometrie (analytická) — soustavy rovnic, matice, determinanty

Jaro 2019

- klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- geometrická zobrazení: shodná, podobná, afinní, projektivní a pár dalších
- poznámky k zobrazování prostoru do roviny

Organizační věci

Preference

(1) celkový přehled
(2) hlavní myšlenky a teoretické pozadí
(3) konstrukce a technické záležitosti

Materiály

- IS[1]: osnova, přednáška, GeoGebra, odkazy, staré písemky

Zakončení

- výkresy a malá písemka → zkoušková písemka → ústní zkouška

Soutěž

- o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce
- vítěz získá vliv na další průběh kurzu, nehynoucí slávu a věcnou cenu

[1] http://is.muni.cz/el/1441/jaro2019/MA0007/um/

Základy

= základy eukleidovské geometrie
= geometrie Eukleidových Základů,[2] ovšem s Hilbertovými upřesněními.[3]

Základní pojmy:

- *bod, přímka, rovina*

Základní vztahy/relace:

- *incidence, uspořádání, (rovnoběžnost), shodnost, spojitost*

Základní definice:

- *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, . . .*

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- *několik ke každému ze základních vztahů. . .*

---

[2] kolem −300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Základy
[3] kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Eukleidovy geometrické axiómy (postuláty)

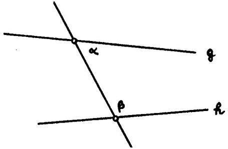
(I) *Každé dva různé body spojuje přímka.*

(II) *Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.*

(III) *Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*

(IV) *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

(V) *Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*



Eukleidův postulát (V): $\alpha + \beta < 2R \Longrightarrow$ *g a h se protínají.*

Konstrukce založené na postulátech (I)–(III) jsou tzv. *eukleidovské konstrukce*.

Eukleidovy všeobecné axiómy

- *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*
- *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovny.*
- apod.

Dnes čteme jako:

- $k = l$ a $m = l \Longrightarrow k = m$.
- $k = l$ a $m = n \Longrightarrow k + m = l + n$.
- apod.[4]

[4] https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html

Eukleidovy nevyslovené axiómy (Hilbertovo upřesnění)

Několik axiómů, které nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány...

Typický axióm **uspořádání** je např.:

- *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.*

Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

Poznámka

V Hilbertově systému mezi axiómy **incidence** najdeme upřesnění, že

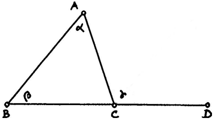
- *dvěma body je určena <u>právě jedna</u> přímka.*

Mezi axiómy **shodnosti** je věta SUS. Axióm **rovnoběžnosti**:

- *každým bodem ke každé přímce prochází <u>nejvýše jedna</u> rovnoběžka.*

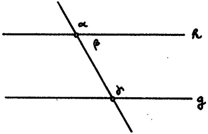
Co na postulátu (V) nezávisí

- Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.[5]



$\gamma > \alpha$ a $\gamma > \beta$

- *Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek*[6] (odtud existence rovnoběžky).

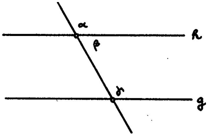


$\alpha = \gamma \Longrightarrow h \parallel g$

[5] Zde jsou poprvé potřeba axiómy uspořádání.
[6] Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku.

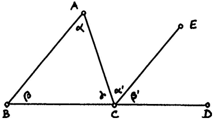
Co na postulátu (V) závisí

- Věta o střídavých úhlech[7] (odtud jednoznačnost rovnoběžky).



$$h \parallel g \Longrightarrow \alpha = \gamma$$

- Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.[8]



$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

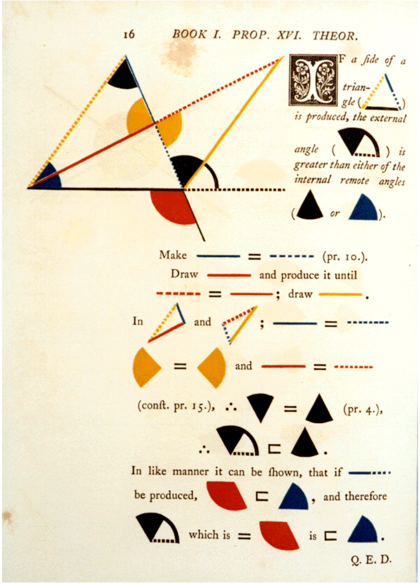
- Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsazích...
- Pythagorova věta (a téměř vše co následuje...)

---

[7] Nepřímo: $\alpha \neq \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \Longrightarrow 2R \neq \gamma + \beta$; odtud podle (V) plyne, že se přímky h, g protínají, tedy nejsou rovnoběžné.

[8] Přímo pomocí věty o střídavých úhlech.

Detail k větě o vnějším úhlu v trojúhelníku[9]



16 BOOK I. PROP. XVI. THEOR.

IF a ſide of a triangle ( ) is produced, the external angle ( ) is greater than either of the internal remote angles (or).

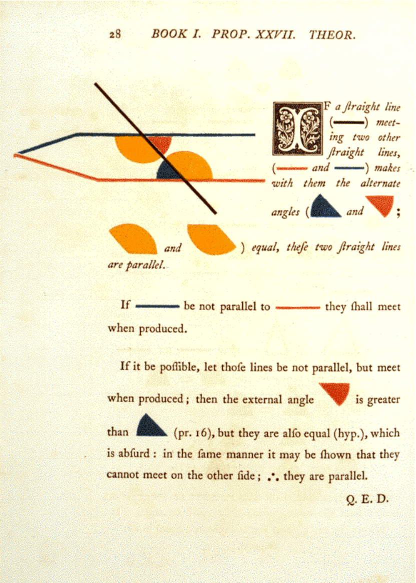
Make = (pr. 10.).
Draw and produce it until = ; draw .
In and ; =
= and =
(conſt. pr. 15.), ∴ = (pr. 4.),
∴ ⊏ .

In like manner it can be ſhown, that if be produced, ⊏ , and therefore which is = is ⊏ .

Q. E. D.

[9] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-16.html

Detail k větě o existenci rovnoběžky[10]



28 BOOK I. PROP. XXVII. THEOR.

If a ſtraight line ( ) meeting two other ſtraight lines, (and) makes with them the alternate angles (and ; and) equal, theſe two ſtraight lines are parallel.

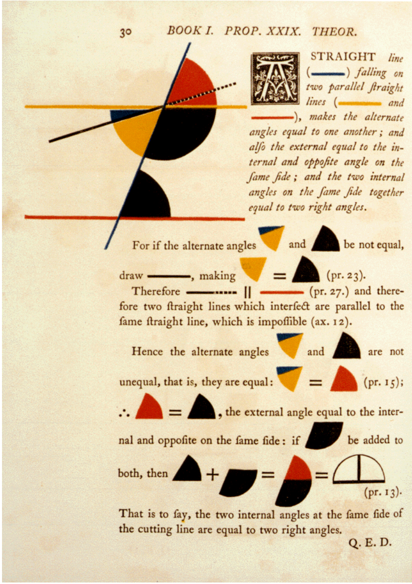
If be not parallel to they ſhall meet when produced.

If it be poſſible, let thoſe lines be not parallel, but meet when produced; then the external angle is greater than (pr. 16), but they are alſo equal (hyp.), which is abſurd: in the ſame manner it may be ſhown that they cannot meet on the other ſide; ∴ they are parallel.

Q. E. D.

[10] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-28.html

Detail k větě o střídavých úhlech[11]



30 BOOK I. PROP. XXIX. THEOR.

A STRAIGHT line ( ) falling on two parallel ſtraight lines (and), makes the alternate angles equal to one another; and alſo the external equal to the internal and oppoſite angle on the ſame ſide; and the two internal angles on the ſame ſide together equal to two right angles.

For if the alternate angles and be not equal, draw , making = (pr. 23).

Therefore || (pr. 27.) and therefore two ſtraight lines which interſect are parallel to the ſame ſtraight line, which is impoſſible (ax. 12).

Hence the alternate angles and are not unequal, that is, they are equal: = (pr. 15);

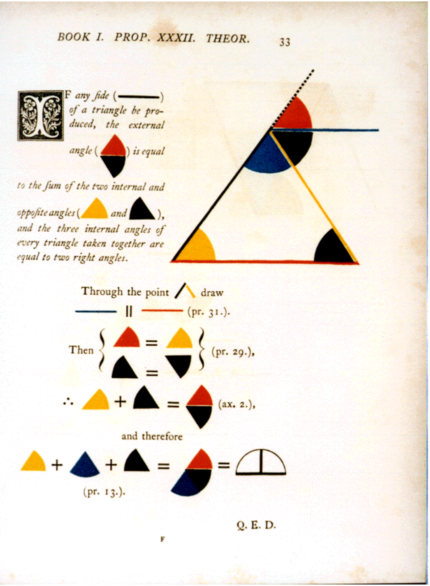
∴ = , the external angle equal to the internal and oppoſite on the ſame ſide: if be added to both, then + = = (pr. 13).

That is to ſay, the two internal angles at the ſame ſide of the cutting line are equal to two right angles.

Q. E. D.

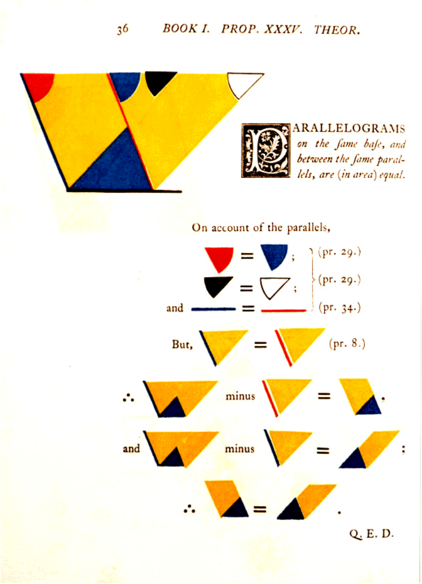
[11] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-30.html

Detail k větě o součtu úhlů v trojúhelníku[12]



[12] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-32.html

Detail k větě o obsazích rovnoběžníků[13]

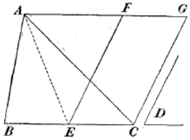


---

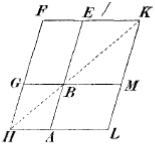
[13] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-36.html

Základní tvrzení o rovnostech obsahů[14]

- *Rovnoběžníky (resp. trojúhelníky) se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah* (viz s. 12).
- *Trojúhelník ABC a rovnoběžník $ECGF$ mají stejný obsah* (kde $E =$ střed BC a $BC \parallel AF$):



- *Rovnoběžníky $BEFG$ a $BALM$ mají stejný obsah* (kde společný bod $B \in$ úhlopříčce HK):

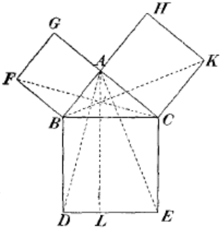


- Eukleidova věta o odvěsně/výšce, resp. věta Pythagorova…

[14] Ve všech důkazech vystačíme s větou o střídavých úhlech a shodnými trojúhelníky.

Věta

Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A.
Potom platí $BP \cdot BC = BA^2$ a $CP \cdot CB = CA^2$, tudíž $BC^2 = BA^2 + AC^2$.



Důkaz.

- $FBAG$ je čtverec a úhel BAC je pravý $\Longrightarrow$ body G, A, C leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s FB.
- Odtud podle zákl. věty o obsazích, shodnosti trojúh. FBC a ABD a znovu podle zákl. věty o obsazích:

$$\text{obsah } FBA = \text{obsah } FBC = \text{obsah } ABD = \text{obsah } PBD.$$

Proto má čtverec $FBAG$ stejný obsah jako obdélník $PBDL$, a stejně tak to funguje na druhé straně. . . [15] □

[15] https://www.youtube.com/watch?v=s26B9myJOpA

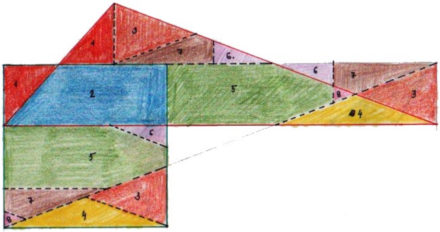
Kvadratura mnohoúhelníku

Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestrojit čtverec se stejným obsahem.[16]

Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním...

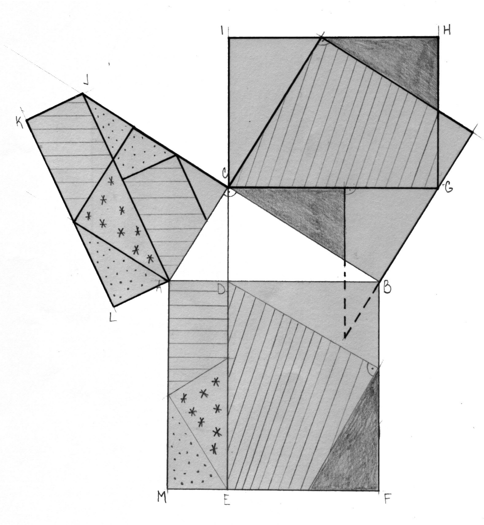
Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah $\iff$ *jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*



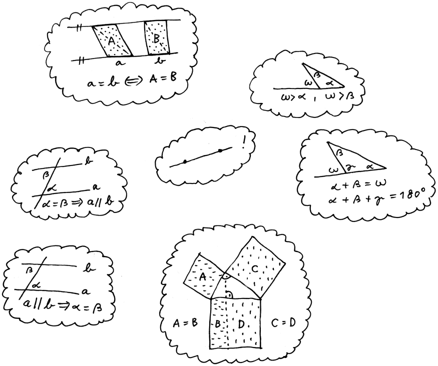
Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

[16] http://ggbtu.be/mkripDpYd

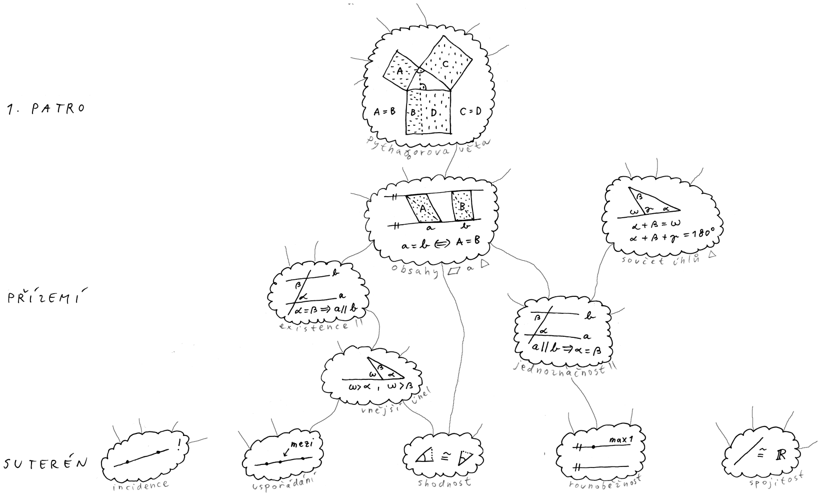


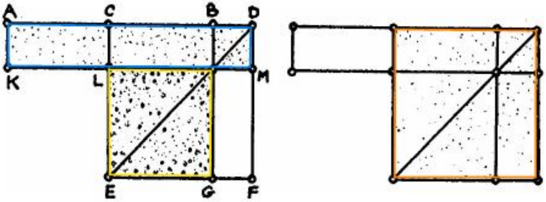
Pythagorova věta se stříháním. . .

Mezishrnutí — takto NE!



Mezishrnutí — takto ANO! (pokračování na s. 41)





Obrázek 4.11: $\boxed{\text{A}}$ II.6: *Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B, potom platí* $\boxed{AD \cdot BD} + \boxed{CB^2} = \boxed{CD^2}$.

Poznámky

Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze předchozí tvrzení psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do čtverce.

Tyto úpravy jsou prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice (s. 23).
Speciálním případem je konstrukce zlatého řezu (s. 20).

Definice

Bod H dělí úsečku AB ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH = AH : HB, \quad \text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA.$$

Konstrukce

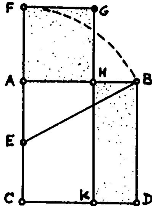
(i) AC je kolmice k AB, přičemž $AC = AB$,

(ii) $E =$ střed AC,

(iii) F leží na polopřímce CA tak, že $EF = EB$,

(iv) H leží na úsečce AB tak, že $AH = AF$.

Potom AH je delší částí zlatého řezu úsečky AB.



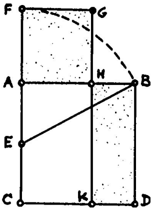
Důkaz a něco navíc

Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 19) a z Pythagorovy věty (s. 14):

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2, \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník *CFGK* a čtverec *ABDC* mají stejný obsah.
Tyto však mají společnou část *CKHA*, takže
taky čtverec *AHGF* a obdélník *KDHB* mají stejný obsah.
To můžeme zapsat jako

$$AH^2 = AB \cdot BH, \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \qquad \square$$



Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x), \quad \text{neboli} \quad b(b - x) = x^2, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx - b^2 = 0.$$

Postupně sestrojené veličiny jsou:

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, \quad |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$

Skutečně, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 + bx - b^2 = 0\ldots$

Sestrojitelné veličiny

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,[17]
- **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Nic dalšího neumíme a nic dalšího ani sestrojit nelze:

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ *jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu*

$$\mathbf{1} \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{} \quad (\quad)$$

[17] Podobnostem se budeme věnovat záhy, viz s. 47.

Důkaz

Začneme s úsečkou představující jednotku.
Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

(a) průnik dvou přímek $\rightsquigarrow$ soustava dvou lineárních rovnic,

(b) průnik přímky s kružnicí $\rightsquigarrow$ soustava lineární a kvadratické rovnice,

(c) průnik dvou kružnic $\rightsquigarrow$ soustava dvou kvadratických rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme jednu lineární, nebo kvadratickou rovnici; vyřešíme, dosadíme, . . .
Kořen(y) lib. lineární a kvadratické rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí právě uvedených operací! $\square$

Poznámka

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$ vypadá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c, \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vyjádření

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}, \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

(a) zdvojení krychle $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt[3]{2}a$,

(b) rozvinutí kružnice $\rightsquigarrow$ $x = 2\pi r$,

(c) kvadratura kruhu $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt{\pi}r$,

(d) roztřetění úhlu $\rightsquigarrow$ $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,

(e) pravidelné mnohoúhelníky $\rightsquigarrow$ ...... (s. 44)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.[18]

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

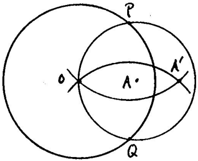
- problémy (a), (b) a (c) nejsou nikdy řešitelné,
- problémy (d) a (e) ve speciálních případech řešitelné jsou.

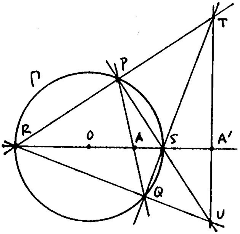
[18] r. 1767, resp. 1882

Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.

Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.

Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.





Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A vzhledem ke kružnici se středem O.

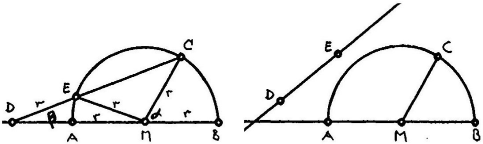
Věta

Konstrukce je proveditelná eukleidovsky $\iff$ *je proveditelná mascheroniovsky* $\iff$ *je proveditelná steinerovsky.*[19]

[19] Tvrzení vyplývá snadno z předchozího (s. 23). Avšak nemusí být hned jasné, jak takové konstrukce provést. . .

Konstrukce *neusis*

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se značkami (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)

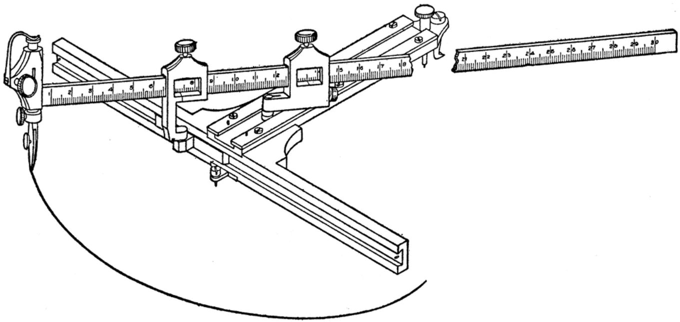


Archimédés: Trisekce úhlu s označeným pravítkem...

Poznámka

Takto lze sestrojit (reálné) kořeny libovolné kubické rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 24...[20]

[20] http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction



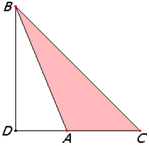
Konstrukce elipsy pomocí *neusis* udělátka.

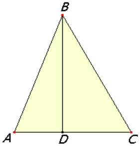
Kosinová věta

Jako důsledek (a zobecnění) Pythagorovy věty (s. 14) představujeme:

Věta

V obecném trojúhelníku ABC, kde D = pata výšky z vrcholu B, platí:





$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC, \qquad BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC.$$

Důkaz.

Plyne z Pythagorovy věty (zde pro trojúh. BDC a BDA) a pár úprav:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (DA + AC)^2 =$$
$$= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + 2DA \cdot AC = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC. \quad \square$$

Poznámka

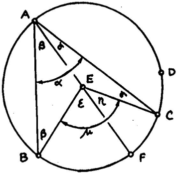
Při obvyklém značení $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $\alpha = |\angle BAC|$ můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

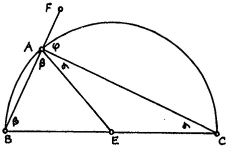
O kružnicích

Jako důsledky věty o součtu úhlů v trojúhelníku (s. 7) uvádíme:[21]

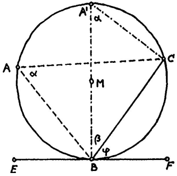
- větu o středovém a obvodovém úhlu,
- spec. případ — Thaletovu větu,
- větu o úsekovém úhlu,
- apod.



$\mu = 2\alpha =$ konst.



$\alpha + \beta = 90°$



$\varphi = \alpha$

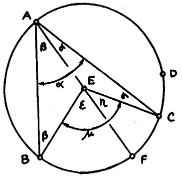
[21] https://ggbm.at/MtseAe67

O středovém a obvodovém úhlu

Pro kružnici se středem *E* a úseč *BC* je úhel *BEC středový* (ozn. μ) a úhel *BAC obvodový* (ozn. α):

Věta

Středový úhel k dané úseči je dvakrát větší než lib. úhel obvodový ($\mu = 2\alpha$). Proto jsou obvodové úhly k téže úseči ***všechny stejné****.*



Důkaz.

- Trojúhelník *ABE* je rovnoramenný $\implies$ úhly u základny jsou stejné (ozn. β).
- Věta o součtu úhlů v trojúhelníku *ABE* $\implies$ vnější úhel $\underline{\varepsilon = 2\beta}$.

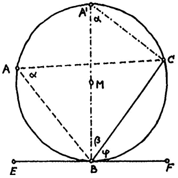
Ze stejných důvodů platí také $\eta = 2\gamma$, odkud plyne $\mu = 2\alpha$. Podobně by se zdůvodnily i ostatní varianty... □

O úsekovém úhlu

Pro kružnici, úseč *BC* a tečnu *BF* je úhel *CBF* *úsekový* (ozn. φ):

Věta

Úsekový úhel k dané úseči je stejný jako úhel obvodový ($\alpha = \varphi$).



Důkaz.

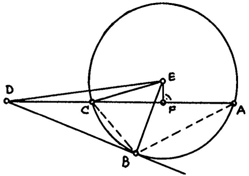
- Věta o obvodovém úhlu $\implies$ úhel *BAC* je stejný pro lib. *A* (ozn. α).
- Vezměme A' tak, aby $A'B$ byl průměrem kružnice ($\angle A'BC$ ozn. β).
  Věta o tečně $\implies$ $\underline{\varphi + \beta = 90^\circ}$.
- Thaletova věta $\implies$ úhel u *C* je pravý.
  Věta o součtu úhlů v trojúhelníku $A'BC$ $\implies$ $\underline{\alpha + \beta = 90^\circ}$.

Celkem tedy $\alpha = \varphi$. $\square$

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.*



$$DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$$

Důkaz 1.

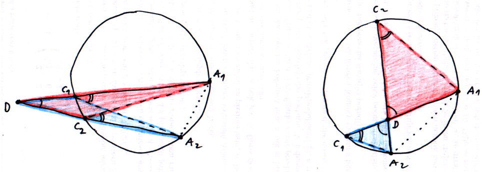
Lze zdůvodnit několikerým užitím Pythagorovy věty (pro pravoúhlé trojúhelníky DBE, DFE, CFE) a alg. úpravou...[22] □

[22] Třeba rozlišovat, zda je bod D uvnitř nebo vně kružnice...

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.*



$$DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2 = \cdots = \text{konst.}$$

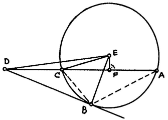
Důkaz 2.

Alternativně (a univerzálně) pomocí podobných trojúhelníků:

- Věta o obvodových úhlech $\Longrightarrow$ vyznačené úhly u vrcholů C_i jsou stejné.
- Navíc úhly u vrcholu D jsou stejné $\Longrightarrow$ trojúhelníky C_1DA_2 a C_2DA_1 jsou podobné.
- Tedy $DC_1 : DC_2 = DA_2 : DA_1$, což je ekvivalentní $DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2$. □

O mocnosti

Pro bod D vně kružnice (a B bod dotyku tečny) platí



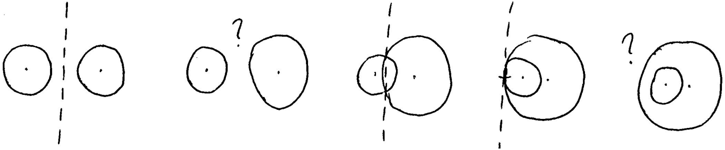
$$DC \cdot DA = DB^2 = DE^2 - EB^2.$$

Definice

Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo

$$m := DE^2 - r^2.$$

Chordála je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím.

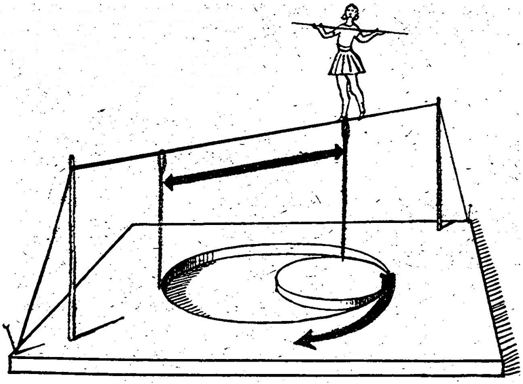


Věta

*Chordála dvou nesoustředných kružnic je **přímka**, která je kolmá na spojnici jejich středů.*[23]

[23] Vyplývá z definice a Pythagorovy věty...

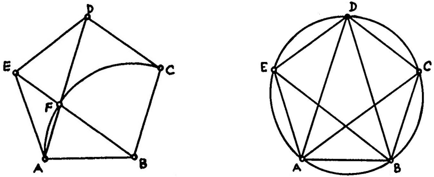
Užitek



Kotoulením kružnice uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem se převádí pohyb otáčivý na přímočarý. . .

Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný = všechny strany a všechny úhly navzájem shodné.



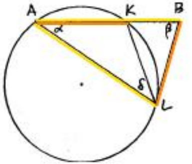
Postřehy

(1) Souměrnost podle osy jdoucí $E \implies AD \parallel BC$ a $BE \parallel CD \implies BCDF$ je kosočtverec.

(2) Obvodové úhly BAC, CAD, DAE atd. jsou všechny shodné $\implies$ trojúhelník ABD je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu u vrcholu D, tzv. zlatý trojúhelník.

(3) Trojúhelníky ADE a EAF jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu $A \implies$ jsou podobné.

Pravidelný 5-úhelník lze sestrojit pomocí zlatého 3-úhelníku, a ten lze sestrojit pomocí zlatého řezu:



Věta

*Pokud AK = delší částí zlatého řezu úsečky AB a bod L je takový, že $AL = AB$ a $BL = AK$, potom trojúhelník ABL je **zlatý** (tedy $\beta = 2\alpha$).*

Důkaz.

- K = zlatý řez a $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$, neboli $BA \cdot BK = BL^2$.
- Toto je mocnost bodu B ke kružnici $AKL \implies BL$ = tečna.
- Úsekový $\angle BLK$ = obvodový $\angle LAK = \alpha \implies \angle ALB = \alpha + \delta$.
- $\triangle ABL$ je rovnoramenný $\implies \underline{\beta = \alpha + \delta}$.
- $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB = \alpha + \delta$, což je $= \beta$.
- Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je rovnoramenný $\implies KL = BL = AK$.
- Proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný $\implies \underline{\alpha = \delta}$.

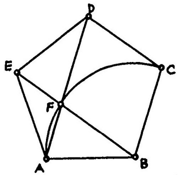
Celkem tedy $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$. □

Zlatý řez přímo

Zlatý řez lze v pravidelném 5-úhelníku objevit rovnou:

Věta

*Úhlopříčky v pravidelném 5-úhelníku se navzájem dělí v poměrech **zlatého řezu**, jejichž delší části jsou shodné se stranami 5-úhelníku.*



Důkaz.

- Trojúhelníky ADE a EAF jsou rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu A $\Longrightarrow$ jsou podobné.
- Odpovídající si strany jsou úměrné $\Longrightarrow$ $AD : DE = EA : AF$.
- Současně však platí $DE = EA = DF$, tedy

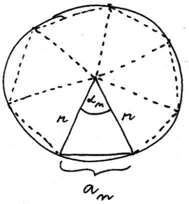
$$AD : DF = DF : FA. \qquad \square$$

Výpočet a něco navíc

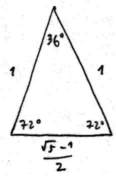
Středový úhel v pravidelném n-úhelníku je $\alpha_n = 360°/n$.

Velikost strany pravidelného n-úhelníku
veps. do kružnice s poloměrem r je (podle kosinové věty)

$$a_n = r\sqrt{2 - 2\cos\alpha_n}.$$



Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36°$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72°$.



Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!

Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a (podle kosinové věty) $\cos 72° = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Po dosazení dostáváme

$$a_5 = r\sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

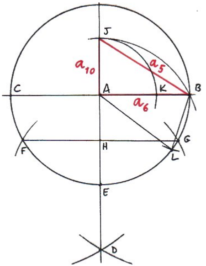
Zkratka a něco navíc

Na obr. je konstrukce zlatého řezu úsečky AB a zlatý trojúhelník ABL:

Věta

Strana pravidelného 5-úhelníku vepsaného do kružnice je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku BAJ.

Navíc, odvěsnami trojúhelníku BAJ jsou strany pravidelného 6-úhelníku, resp. 10-úhelníku vepsaného do téže kružnice.



Důkaz.

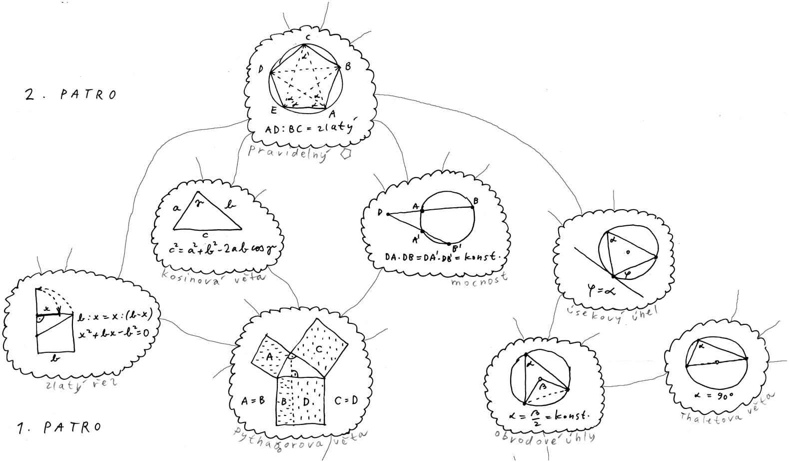
Z předchozího víme, že

$$a_6 = r, \qquad a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \qquad a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABJ platí

$$|BJ| = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5. \quad \square$$

Mezishrnutí (navazuje na s. 18, pokračování na s. 59)

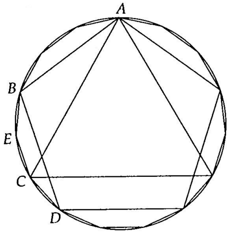


Další pravidelné mnohoúhelníky

Pravidelný n-úhelník umíme sestrojit pro $n = \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6$.

Půlením úhlů lze sestrojit také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \ldots$

Kombinací předchozího lze sestrojit také např. pro $n = \mathbf{15}$:



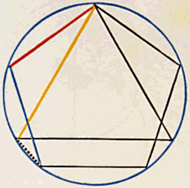
Věta

*Pokud lze sestrojit pravidelný **k**-úhelník a **l**-úhelník, potom lze sestrojit také pravidelný **n**-úhelník, kde **n** = nejmenší společný násobek **k** a **l**.*[24]

Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!

[24] Důkaz: víceméně manipulace se zlomky...

Detail pro $k = 3$ a $l = 5$



TO inscribe an equilateral and equiangular quindecagon in a given circle.

Let and be the sides of an equilateral pentagon inscribed in the given circle, and the side of an inscribed equilateral triangle.

The arc subtended by and $= \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ of the whole circumference.

The arc subtended by $= \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ of the whole circumference.

Their difference $= \frac{1}{15}$

∴ the arc subtended by $= \frac{1}{15}$ difference of the whole circumference.

Hence if straight lines equal to be placed in the circle (B. 4. pr. 1), an equilateral and equiangular quindecagon will be thus inscribed in the circle.

Q. E. D.

Další sestrojitelné mnohoúhelníky

Z předchozího tušíme, že **ne každý** pravidelný mnohoúhelník je sestrojitelný:

Věta (Gaussova–Wantzelova)

Pravidelný n-úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem $\Longleftrightarrow$ *n je součinem libovolné mocniny* 2 *a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$.

K dnešnímu dni[25] je známo pouze pět Fermatových prvočísel:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tedy:

lze	**3**	4	**5**	6		8		10		12			15	16	**17**			20		
nelze					7		9		11		13	14				18	19		21	22

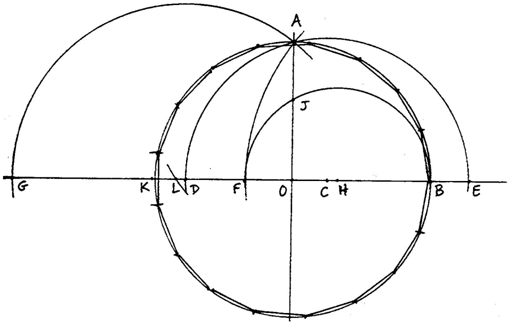
[25] 24. května 2019, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number

Pravidelný 17-úhelník

Délku strany pravidelného 17-úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem r lze vyjádřit jako

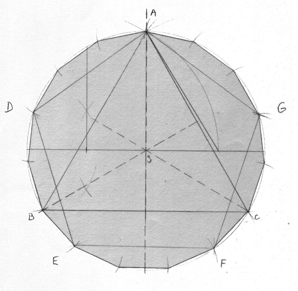
$$a_{17} = \frac{r}{4}\sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}.$$

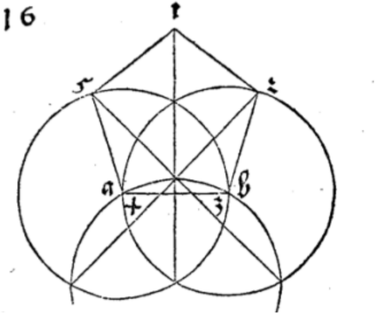
Gaussova konstrukce pravidelného 17-úhelníku vypadá takto[26]



[26] 30. března 1796

Užitek





Konečně umíme rozeznat přesné konstrukce od přibližných. . .

Teorie podobnosti (kniha VI) je založena na pojmu úměrnosti, tedy rovnosti poměrů veličin (kniha V):

Definice

Veličiny a, b jsou *ve stejném poměru* jako veličiny c, d,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí

$$na \gtreqless mb \iff nc \gtreqless md.$$

Poznámky pro moderního čtenáře

Veličiny a, b, c, d jsou reálná čísla, čísla m, n jsou čísla celá.
Předchozí definici můžeme vyslovit taky takto:[27]
Reálná čísla r $(= \frac{a}{b})$ a s $(= \frac{c}{d})$ jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo q $(= \frac{m}{n})$ platí

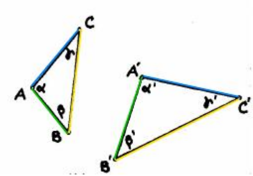
$$r \gtreqless q \iff s \gtreqless q.$$

[27] Tady by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...

Podobné trojúhelníky

Definice

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.



Tedy: trojúhelníky jsou podobné, pokud (při obvyklém značení)

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$
$$b : c = b' : c', \quad c : a = c' : a', \quad a : b = a' : b'.$$

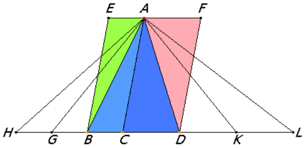
Druhou sadu rovností obvykle přepisujeme takto

$$a' : a = b' : b = c' : c = \textit{koeficient podobnosti.}$$

Základní tvrzení o poměrech obsahů

Věta

Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.



$$\text{obsah } ACB : \text{obsah } ACD = CB : CD$$

Důkaz.

Plyne přímo ze základní věty o rovnosti obsahů trojúhelníků (s. 13) a z definice rovnosti poměrů (s. 47)... □

Poznámka

Odtud máme vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

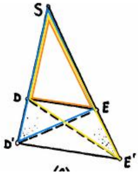
$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

kde S = obsah trojúhelníku, a = velikost strany, v = velikost výšky na stranu a.

Základní tvrzení o poměrech ramen

Věta

Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku $\iff$ protíná zbylé dvě strany úměrně.



$$SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$$

Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD = \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE,$$
$$SE' : SE = \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

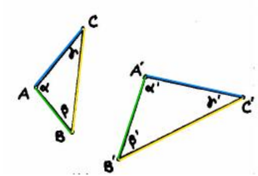
Jmenovatelé na pravé straně jsou titíž a trojúhelníky $SD'E$ a $SE'D$ mají společný průnik SDE.
Tedy: rovnost poměrů $\iff$ rovnost obsahů $DD'E$ a $EE'D$ $\iff$ rovnoběžnost $D'E'$ a DE (s. 13). □

Ekvivalence v definici podobnosti

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 48) jsou ekvivalentní:

Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly $\iff$ strany u shodných úhlů jsou úměrné.



$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c',\ c : a = c' : a',\ a : b = a' : b'.$$

Důkaz.

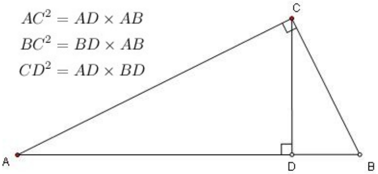
Implikace zleva doprava je důsledkem předchozí věty (s. 50)...
Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník ABD, který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem $A'B'C'$. Nyní strany u shodných úhlů jsou úměrné a současně trojúhelníky ABD a ABC mají společnou stranu, tedy jsou shodné... □

Poznámky

Implikaci „$\Longrightarrow$“ v předchozí větě s přezdívá věta UU.

Mnoho předchozích úvah lze nahradit úspornějším argumentem s podobnými trojúhelníky, viz např.:

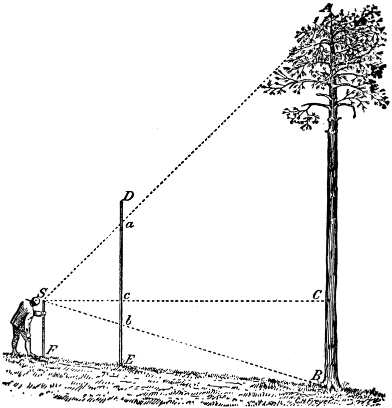
- Věta o mocnosti bodu ke kružnicí (s. 33).
- Věta o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (s. 38).
- Eukleidova věta o odvěsně/výšce (s. 14):



Důkaz.

Trojúhelníky ADC a ACB mají po dvou shodné vnitřní úhly $\Longrightarrow$ jsou <u>podobné</u>
$\Longrightarrow$ $AC : AD = AB : AC$ $\Longrightarrow$ $AC^2 = AB \cdot AD$.
Ostatní vztahy lze zdůvodnit podobně... $\square$

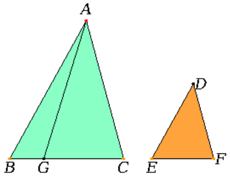
Užitek



Výška stromu pomocí podobných trojúhelníků. . .

Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.



Je-li $1 : k$ poměr podobnosti, potom poměr obsahů je $1 : k^2$.

Důkaz[28].

Pomocný bod $G \in BC$ je takový, že $EF : BG = BC : EF$.
Podle předpokladu je $AB : DE = BC : EF = 1 : k$.
Tzn. $AB : DE = EF : BG$, odkud vyplývá, že obsah ABG = obsah DEF (s. 50).
Odtud dostáváme

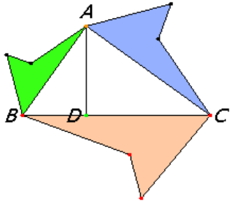
$$\text{obsah } ABC : \text{obsah } DEF = \text{obsah } ABC : \text{obsah } ABG =$$
$$= BC : BG = (BC : EF) \cdot (EF : BG) = 1 : k^2. \quad \square$$

[28] ... **bez** infinitezimálních úvah pro obecné $k \in \mathbb{R}$!

Zobecnění Pythagorovy věty

Věta

Pokud jsou mnohoúhelníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku podobné, potom obsah mnohoúhelníku nad přeponou je roven součtu obsahů těch nad odvěsnami.



Důkaz.

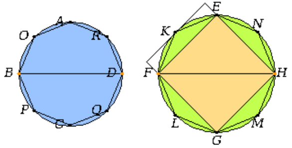
Plyne z předchozího tvrzení (s. 54) a z Pythagorovy věty (s. 14)... □

O obsazích kruhů

U křivočarých útvarů se infinitezimálním úvahám nevyhneme. . . [29]

Věta

Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr druhých mocnin jejich průměrů.



Idea důkazu.

Každý kruh lze libovolně přesně aproximovat mnohoúhelníky.
Každé dva kruhy jsou podobné; pokud jsou aproximovány analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky taky podobné.
Poměrům obsahů takových mnohoúhelníků rozumíme (s. 54). . . □

Poznámka

Při obvyklém značení můžeme předchozí tvrzení psát jako

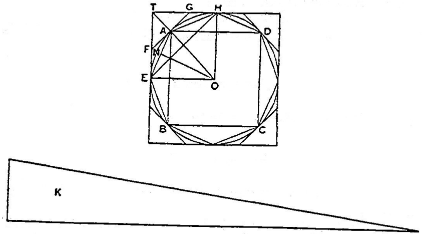
$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2, \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{ konst.}$$

[29] . . . v klasickém pojetí pomocí Eudoxovy metody.

O obsahu kruhu a obvodu kružnice

Věta (Archimédova)

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.



Poznámka

První část věty říká, že $S = \frac{1}{2} r \cdot o$, kde $r =$ poloměr kružnice a $o =$ její obvod.
To spolu s rovností na s. 56 dává

$$S = \frac{1}{2} r \cdot o = \text{konst} \cdot r^2.$$

Tzn. stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu!
Tradičně se tato konstanta značí π, tudíž

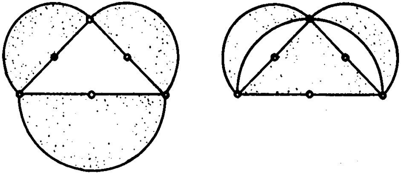
$$S = \pi \cdot r^2 \quad \text{a} \quad o = 2\pi \cdot r.$$

Poznámky ke kvadratuře

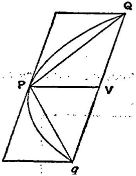
Libovolný mnohoúhelník kvadraturovat umíme (s. 15), kruh neumíme (s. 24).

Některé křivočaré útvary však kvadraturovat lze:

- Hippokratés: *Vyznačené půlměsíce nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku mají stejný obsah jako tento trojúhelník.*[30]



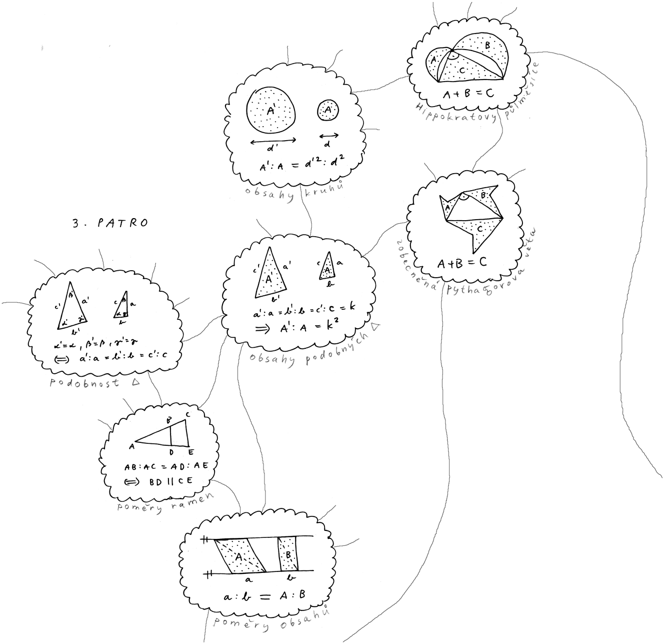
- Archimédés: *Obsah parabolické úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníku PQq (což jsou $\frac{2}{3}$ obsahu opsaného rovnoběžníku).*[31]



[30] plyne snadno z tvrzení na s. 56, 55 a 29...

[31] plyne z vlastností paraboly a součtu jisté geometrické řady...

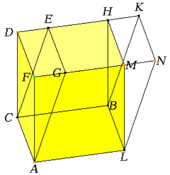
Mezishrnutí (navazuje na s. 41, pokračování na s. 64)

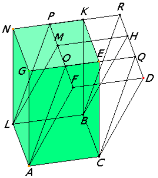


O objemech rovnoběžnostěnů (a hranolů)

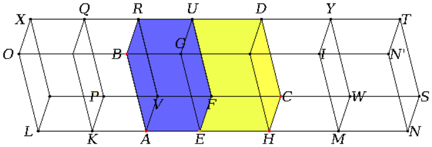
K tvrzením o rovnoběžnících (s. 13, s. 49, s. 54) máme tyto 3D **analogie**:

- Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.





- Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.



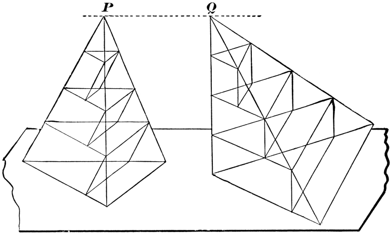
- Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr třetích mocnin odpovídajících stran.

O objemech jehlanů

K tvrzením o trojúhelnících uvádíme na ukázku jednu 3D analogii s naprosto **neanalogickým** důkazem:

Věta

Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.



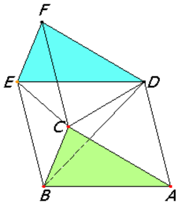
Idea důkazu.

Každý jehlan lze libovolně přesně aproximovat konečným počtem hranolů.
Např. můžeme v obou jehlanech použít hranoly se stejnými výškami.
Poměrům objemů takových hranolů rozumíme (s. 60)... □

Poznámky

Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.[32]

Z uvedeného např. vyvozujeme, že objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:



Teprve odtud máme vzorečky

$$V = \frac{1}{3} S \cdot v,$$

kde $V =$ objem jehlanu, $S =$ obsah podstavy a $v =$ velikost odpovídající výšky.

Pozor

Ani v případě jehlanů se stejnými základnami a stejnými výškami (tedy se stejnými objemy) nelze úvahy v předchozím důkazu nahradit stříháním a přeskupováním částí jako u rovnoběžnostěnů, resp. hranolů![33]

Tzn. 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (s. 15) obecně **neplatí**.

[32] http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

[33] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

O válcích, kuželích, koulích

S podobnými úvahami jako na s. 61 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

- *Poměr objemů válců se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich podstav*,
- *poměr objemů koulí je stejný jako poměr třetích mocnin jejich průměrů*,
- *objem kužele je roven $\frac{1}{3}$ objemu jemu opsaného válce*,
- apod.

Tyto poznatky doplňuje pozoruhodná

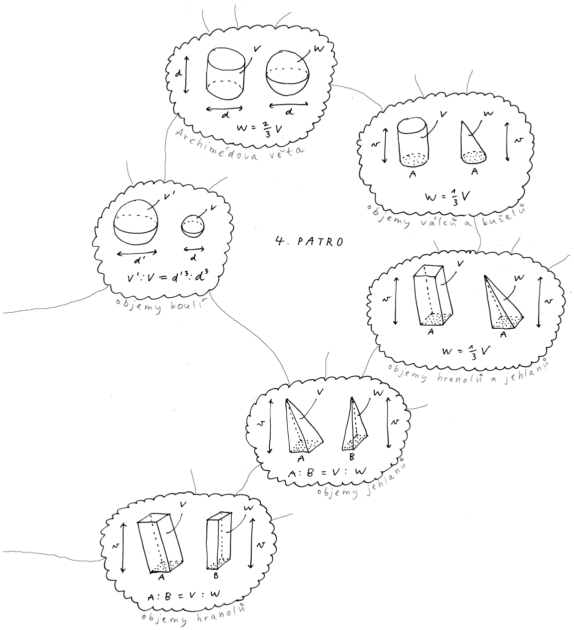
Věta (Archimédova)

Objem koule je roven $\frac{2}{3}$ objemu jemu opsaného válce.[34]

---

[34] viz např. opět `https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv_princip`

Mezishrnutí (navazuje na s. 59, pokračování na s. 72)

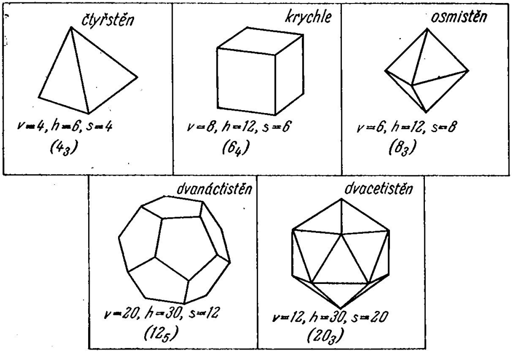


Platónská tělesa

= *pravidelné konvexní mnohostěny*
= konvexní mnohostěny, které mají stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jejichž stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky[35]

Věta

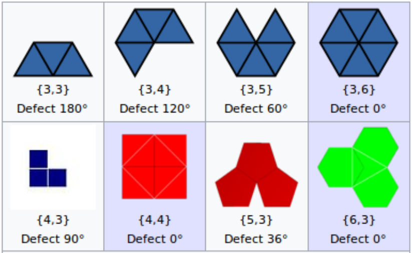
Platónských těles je právě pět druhů:



[35] $\Longrightarrow$ mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd.
http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

Důkaz

(1) Platónských těles není víc než pět druhů:
součet úhlů kolem každého vrcholu musí být ostře menší než plný úhel:



A vertex needs at least 3 faces, and an angle defect.
A 0° angle defect will fill the Euclidean plane with a regular tiling.
By Descartes' theorem, the number of vertices is 720°/*defect*.

(2) Platónských těles je právě pět druhů:
pro každou z pěti možností je třeba „složit“ odpovídající těleso:

- čtyřstěn $\{3,3\}$, krychle $\{4,3\}$, osmistěn $\{3,4\}$ jsou snadné,
- pro rozbor dvacetistěnu $\{3,5\}$ a dvanáctistěnu $\{5,3\}$ budeme potřebovat větu o pravidelném 5-, 6- a 10-úhelníku vepsaném do téže kružnice (s. 40)...

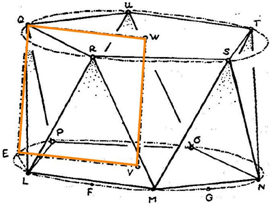
Pravidelný dvacetistěn poprvé

Bubínek:

$QL = QR =$ strana vepsaného 5-úhelníku,
$LE =$ strana vepsaného 10-úhelníku,
$LEQ =$ pravoúhlý trojúhelník.

Proto podle s. 40:

- *$EQ =$ strana vepsaného 6-úhelníku $=$ poloměr kružnice.*



$EQ = VE$, tedy $EVWQ$ je čtverec.

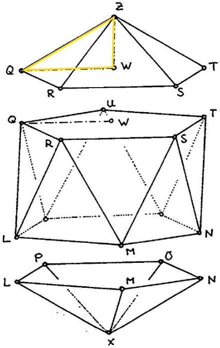
Pravidelný dvacetistěn podruhé

Čepičky:

QWZ = pravoúhlý trojúhelník,
$QZ = QR$ = strana vepsaného 5-úhelníku,
QW = strana vepsaného 6-úhelníku.

Proto podle s. 40:

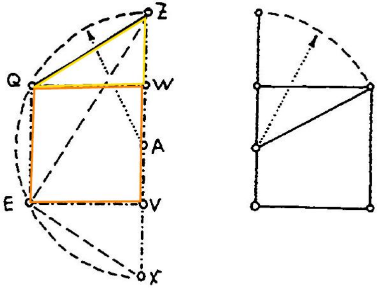
- *WZ = strana vepsaného 10-úhelníku = delší část zlatého řezu poloměru kružnice.*



WZ = delší část zlatého řezu úsečky WQ.

Pravidelný dvacetistěn potřetí

Pravidelný dvacetistěn je vepsán do koule. . .



Řez dvacetistěnu a řez zlatý.[36]

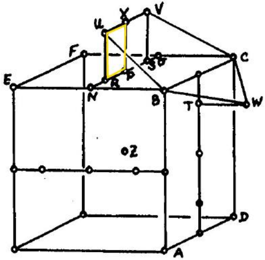
[36]viz konstrukci na s. 20

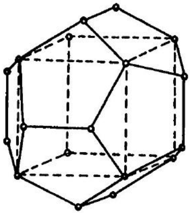
Pravidelný dvanáctistěn stručně

Nad každou stěnou krychle uvažme vrcholy U, V, W podle obr.

Zájemci snadno zdůvodní, že:

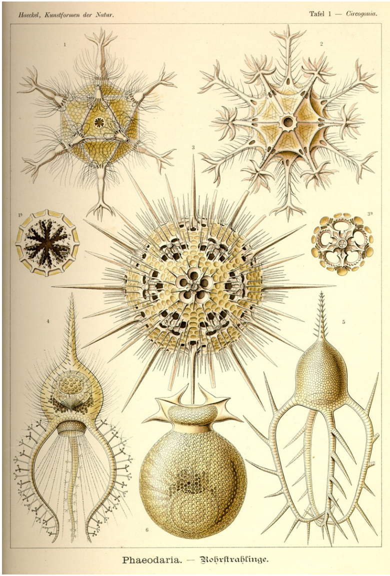
- body $UBCWV$ leží v jedné rovině,
- pětiúhelník $UBCWV$ je pravidelný,
- vzdálenost středu krychle je od všech vrcholů stejná...





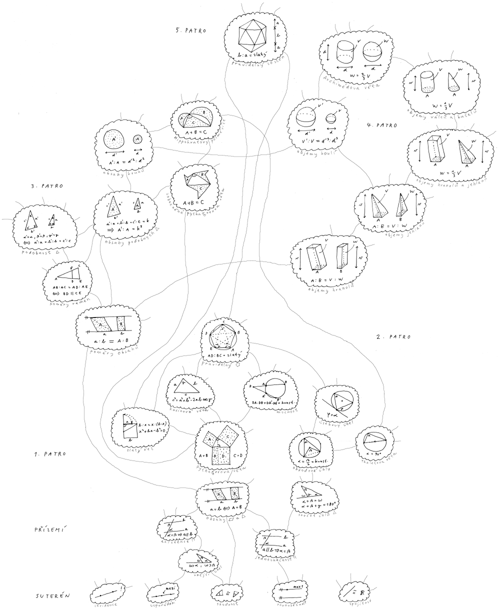
$RU = RP =$ delší část zlatého řezu úsečky PN.

Užitek



Circogonia icosahedra vlevo nahoře.

Shrnutí[37] (navazuje na s. 64)



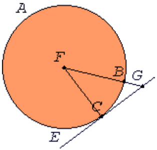
[37] http://is.muni.cz/el/ped/jaro2019/MA0007/um/zaklady.pdf

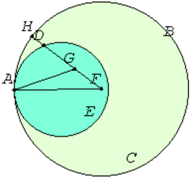
Dotykové úlohy

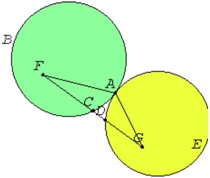
$=$ úlohy s body, přímkami, kružnicemi a jejich dotykem.

Definice

Přímka a kružnice, resp. dvě kružnice se *dotýkají*, pokud mají <u>právě jeden</u> společný bod.







Věta

Přímka se dotýká kružnice v bodě C $\iff$ *je kolmá k průměru FC.*
Kružnice se dotýkají v bodě A $\iff$ *spojnice jejich středů prochází bodem A.*[38]

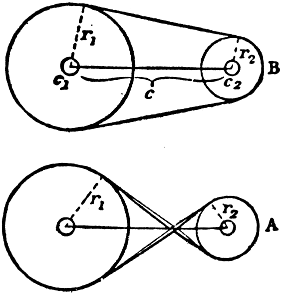
---

[38] Důkazy zpravidla nepřímo, viz např.
https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII11.html

Dotyk vs. orientovaný dotyk

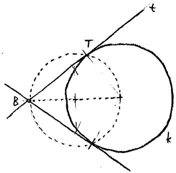
Často je výhodné (občas nutné) rozlišovat orientace:

- *cyklus* = orientovaná kružnice,
- *paprsek* = orientovaná přímka,
- *orientovaný dotyk* = dotyk ve shodě s orientacemi.

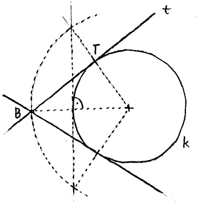


Základní úlohy s tečnami

Tečna z bodu ke kružnici:

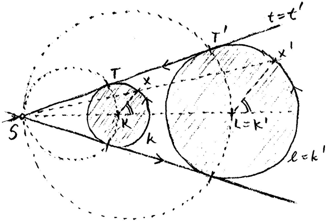


(a) pomocí Thaletovy kružnice

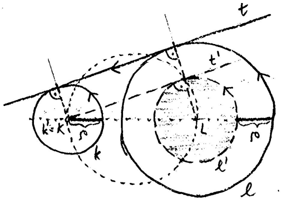


(b) pomocí **souměrnosti**

Společné tečny ke dvěma kružnicím:



(a) pomocí **stejnolehlosti**

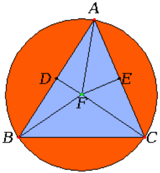


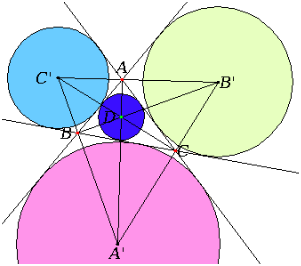
(b) pomocí **dilatace**[39]

[39]. . . redukováno na předchozí případ.

Základní úlohy s kružnicemi

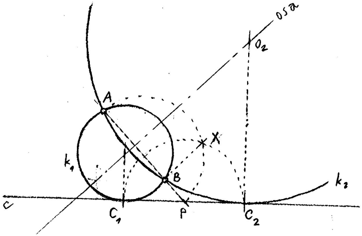
Kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná mezi tři přímky:

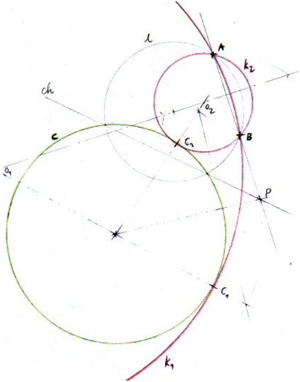




pomocí os úseček, os úhlů

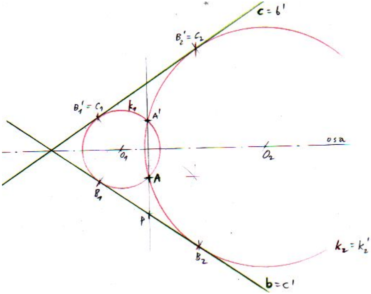
Kružnice procházející dvěma body a dotýkající se přímky, resp. kružnice:



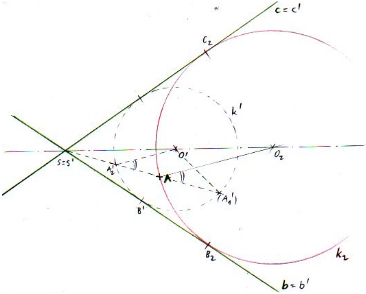


např. pomocí mocnosti

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou přímek:



(a) pomocí **souměrnosti**[40]

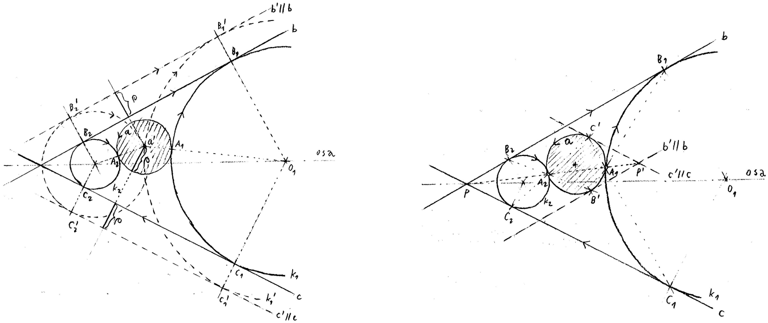


(b) pomocí **stejnolehlosti**

[40] . . . redukováno na předchozí případ (s. 78).

Mírné zobecnění

Kružnice dotýkající se kružnice a dvou přímek:



(a) pomocí **dilatace**[41]

(b) pomocí **stejnolehlosti**

[41] . . . redukováno na předchozí případ (s. 79).

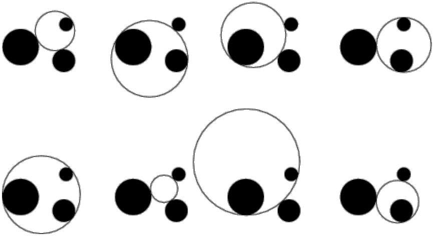
Obecná Apollóniova úloha

$=$ dotyková úloha se třemi danými kružnicemi.

Všechny předchozí úlohy (a mnoho dalších) chápeme jako mezní případy:

$$\lim_{r \to 0}(\text{kružnice}) = \text{bod}, \qquad \lim_{r \to \infty}(\text{kružnice}) = \text{přímka}.$$

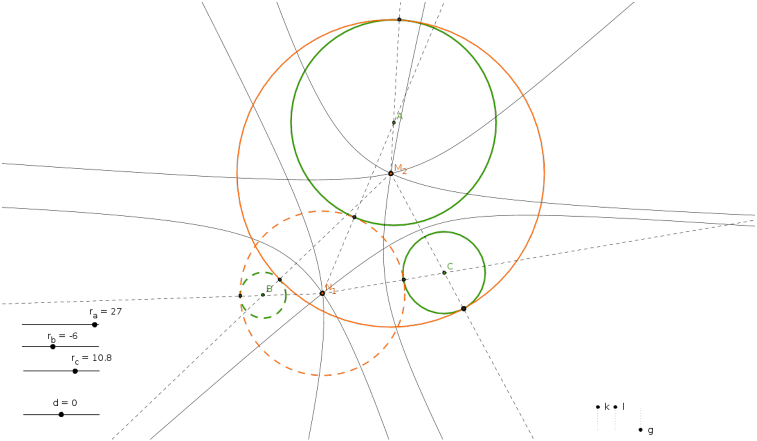
Obecná (neorientovaná) úloha má až 8 řešení; se zvolenými orientacemi dostáváme řešení po dvojicích:



Poznámky

Zajímavá historie, mnoho rozličných řešení a řada aplikací…[42]

Viz např. van Roomenovo řešení, Newtonovu reformulaci a problém *trilaterace*…



Středy všech cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku.

[42] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius

Náš přístup

Z předchozích ukázek je patrné, že budeme protěžovat užití geometrických **transformací** k zjednodušení problému:

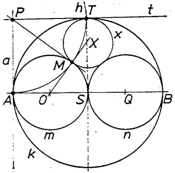
- souměrnosti,
- stejnolehlost,
- dilatace,
- kruhová inverze,
- apod.

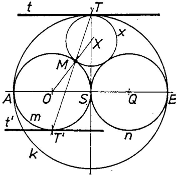
Podrobnosti k jednotlivým transformacím od s. 86...

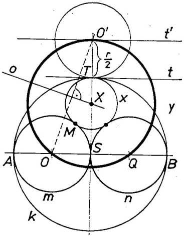
Ukázka typického použití na s. 98...

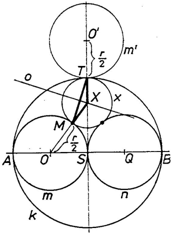
Poznámka

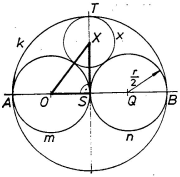
Specifická zadání nabízejí mnohá (a specifická) řešení:[43]











atd.

[43]např. pomocí mocnosti, stejnolehlosti, dilatace, souměrnosti, výpočtu, kruhové inverze

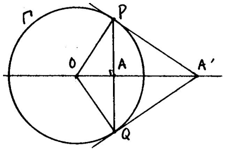
Kruhová inverze

Co to je? Transformace roviny vyjma jednoho bodu, ozn. O.[44]

Čím je určena? Kružnicí se středem O a poloměrem r.[45]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu $A \neq O$ leží na polopřímce OA, a to tak, že

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2, \quad \text{neboli} \quad |OA'| = \frac{r^2}{|OA|}.$$



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s kružnicí samodružných bodů, základní konformní transformace v rovině, nepřímá, ...

[44] tzv. *střed kruhové inverze*

[45] tzv. *řídící kružnice*

Zřejmé vlastnosti[46]

(a) *Kruhová inverze je involutivní transformace.*

(b) *Všechny body na řídící kružnici jsou samodružné.*

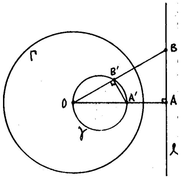
(c) *Všechno, co je vně řídící kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.*

(d) *Každá přímka procházející středem inverze je samodružná; přitom jediné samodružné body jsou průsečíky s řídící kružnicí a*

$$\lim_{X \to \infty} X' = O, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{X \to O} X' = \infty.$$

[46] https://ggbm.at/Zxal0Fay

(e) *Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.*



Důkaz.

Předp. extrémní dvojici $A \mapsto A'$, kde $OA \perp \ell$ a $OA' =$ průměr γ.
Ozn. $B \in \ell$ a $B' \in \gamma$ průsečíky s lib. přímkou jdoucí O.
Dokážeme, že B a B' jsou inverzního vzhledem ke Γ:

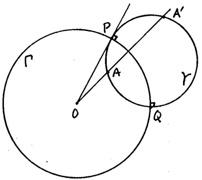
- Thaletova věta $\implies$ úhel $OB'A'$ je pravý $\implies$ trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou podobné $\implies$

$$OB' : OA = OA' : OB \quad \text{neboli} \quad OB' \cdot OB = OA' \cdot OA.$$

- Body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ, takže B a B' taky:

$$OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = r^2. \qquad \square$$

(f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.*
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ.



Důkaz.

Kružnice γ protíná řídící kružnici Γ kolmo[47]

$\Longleftrightarrow$ poloměr OP je tečnou ke kružnici γ

$\Longleftrightarrow$ pro libovolnou sečnu jdoucí bodem O platí[48]

$$OA \cdot OA' = OP^2 = r^2$$

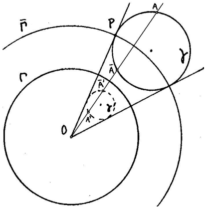
$\Longleftrightarrow$ body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ. □

[47] tzn. tečny ve společném bodě P jsou kolmé

[48] podle věty o mocnosti bodu ke kružnici (s. 33)

Další vlastnosti

(g) *Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O.*



Důkaz.

Uvažme kružnici $\bar{\Gamma}$, která je soustředná s Γ a protíná kružnici γ kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí $\bar{\Gamma}$ a Γ je stejnolehlost:[49]

- Ozn. $A \mapsto A'$ kruhovou inverzi vzhledem ke Γ a $A \mapsto \bar{A}$ kruhovou inverzi vzhledem ke $\bar{\Gamma}$, tedy

$$OA \cdot O\bar{A} = \bar{r}^2 \quad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot O\bar{A}' = r^2.$$

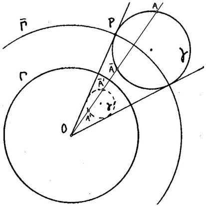
- Odtud po úpravě

$$O\bar{A}' : OA = r^2 : \bar{r}^2 = \textbf{konst.}, \quad \text{neboli} \quad O\bar{A}' = \textbf{konst} \cdot OA. \qquad \square$$

[49] . . . zbytek je jasný: z předchozího (s. 89) a vlastností stejnolehlosti (s. 112) plyne, že obrazem γ vzhledem ke Γ je kružnice.

Pozor

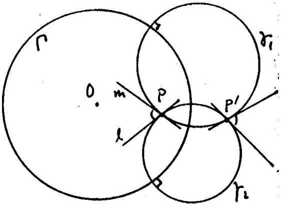
Při stejnolehlosti $\Gamma \circ \bar{\Gamma} : A \mapsto \bar{A}'$ se střed γ zobrazuje na střed γ'.



Při kruhové inverzi $\Gamma : A \mapsto A'$ se střed γ **nezobrazuje** na střed γ'!

(Viz též obraz středu γ vzhledem ke kruhové inverzi $\bar{\Gamma}\dots$)

(h) *Kruhová inverze je konformní zobrazení.*[50]



Důkaz.

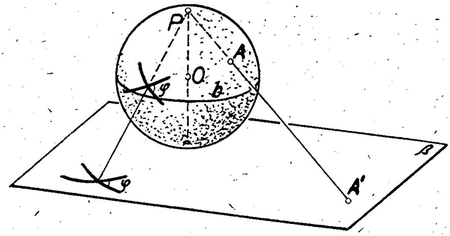
- Odchylka dvou křivek v jejich společném bodě $P =$ odchylka jejich tečen m a ℓ.
- Místo dvou obecných křivek můžeme uvažovat lib. dvě kružnice, které prochází bodem P a mají přímky m a ℓ jako tečny.
- Místo obecných dvou kružnic můžeme uvažovat kružnice γ_1 a γ_2, které jsou kolmé k řídící kružnici Γ!
- Avšak kružnice γ_1 a γ_2 se zobrazují samy do sebe (s. 89), obrazem bodu P je druhý společný bod P' kružnic a odchylka v bodě P je stejná jako odchylka v bodě P'. □

[50] Tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.

Poznámky

Každé podobné zobrazení je konformní.

Dalším známým **ne**podobným konformním zobrazením je např. stereografická projekce (sféry bez jednoho bodu do roviny):



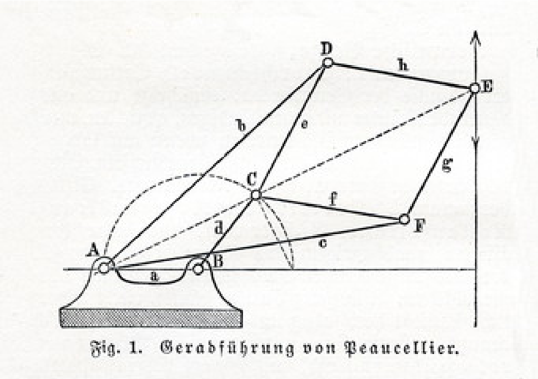
Kruhovou inverzi lze vyjádřit pomocí stereografické projekce a souměrnosti sféry podle roviny rovníku. . .

Konformní zobrazení

Kruhová inverze a obecná konformní zobrazení:

- **ne**zachovávávají vzdálenosti ani poměry vzdáleností,
- **ne**zobrazují přímky na přímky,
- **ne**zachovávávají obsahy, resp. objemy,
- ale zachovávávají odchylky protínajících se křivek,
- jsou prostá (injektivní).

Užitek

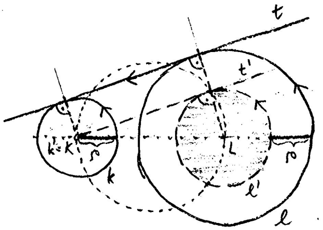


Peaucellierův–Lipkinův mechanizmus převádí přímočarý pohyb na otáčivý a naopak. . . [51]

[51] http://en.wikipedia.org/wiki/Peaucellier%E2%80%93Lipkin_linkage

Dilatace jakožto příklad problémového zobrazení

Dilataci jsme poprvé potkali při konstrukci společných tečen ke dvěma kružnicím (s. 76):



Popis dilatace jakožto geometrického zobrazení je ošidný:

- nemá smysl mluvit o obrazu bodu jako takovém (bez kontextu),[52]
- měli jsme vždy bod na orientované kružnici, resp. přímce,
- není podstatná ona kružnice, resp. přímka, ale **orientovaný dotyk**,
- orientovaný dotyk (dvou křivek) nejsnáze znázorníme (tečným) vektorem…

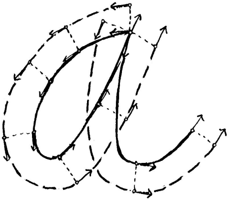
[52]Na rozdíl od všech ostatních zobrazeních v tomto kurzu!

Dilatace jakožto příklad **kontaktního** zobrazení

Co to je? Orientované kontaktní zobrazení v rovině.

Čím je určena? Nenulovým reálným číslem ρ.

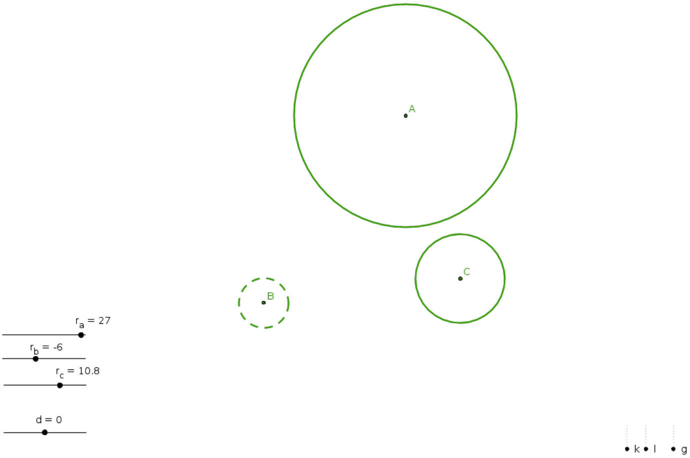
Jak je určena? Obraz lib. orient. dotyk. elementu zastoupeného vektorem $\boldsymbol{v}$ je reprezentován vektorem $\boldsymbol{v}'$, který je posunut o vzdálenost ρ kolmo k $\boldsymbol{v}$, a to na správnou stranu v závislosti na orientaci...



Jaké má vlastnosti? Orientované kontaktní zobrazení!

K čemu to je dobré? Zachovává orientovaný dotyk křivek (viz s. 76, 80, 99, ...)!

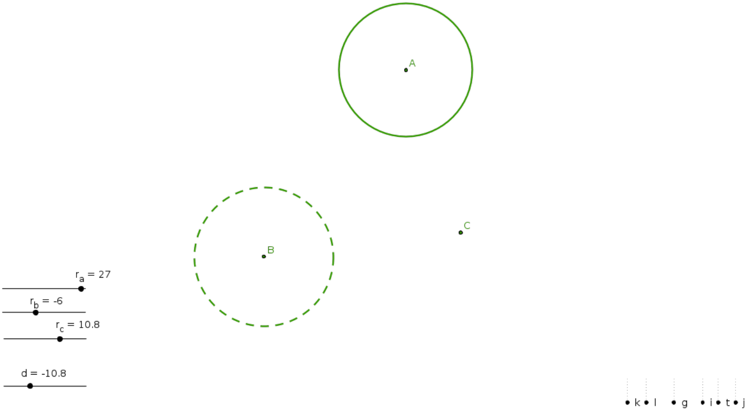
Orientovaná Apollóniova úloha:[53]



Sestrojit cykly, které se dotýkají tří daných cyklů.

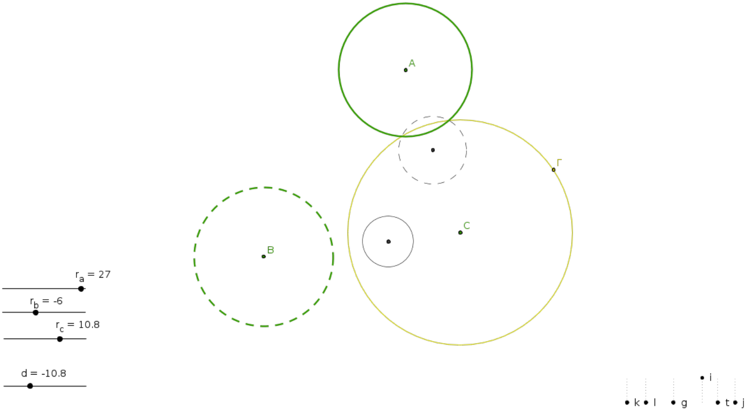
[53] http://ggbtu.be/mrFsNSnbN

(1) vhodná **dilatace**:



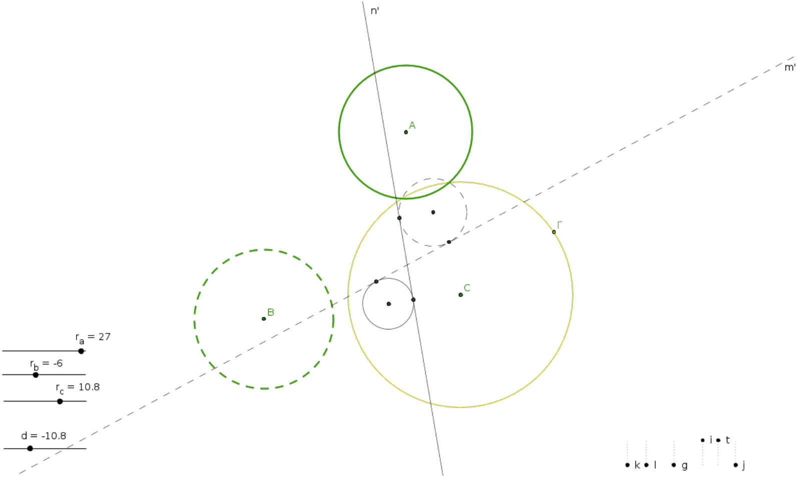
. . . tím je úloha redukována na případ s bodem místo kružnice, . . .

(2) vhodná **kruhová inverze**:



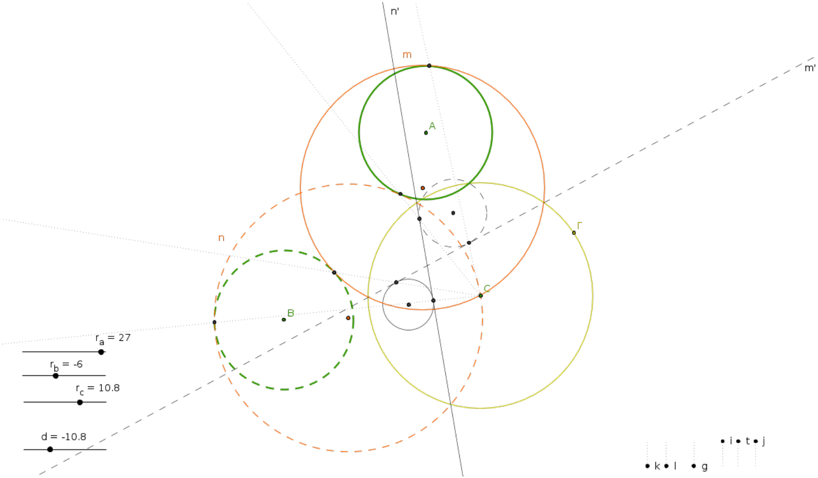
...kružnice procházející bodem C se zobrazují do přímek (s. 88), ...

(3) společné tečny dvou kružnic:



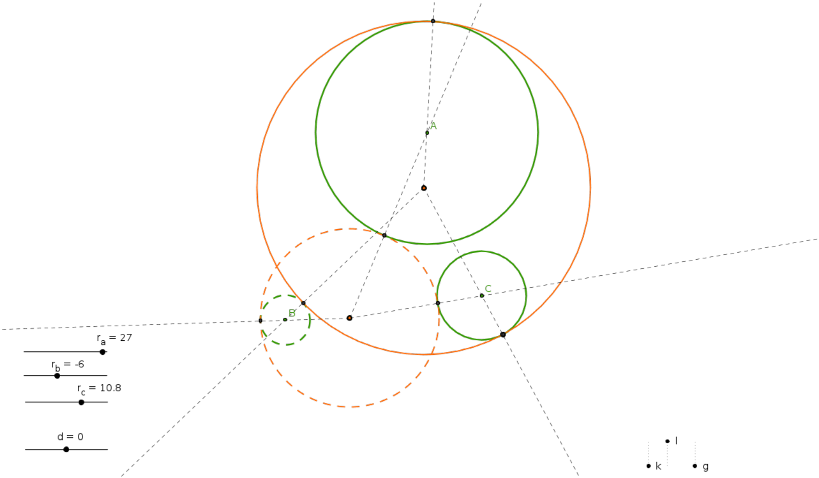
. . . což je jedna ze základních úloh (s. 76), . . .

(4) kruhová inverze zpět:



. . . což je snadné, . . .

(5) dilatace zpět:

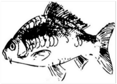


. . . což je taky snadné.

Hlavní větev geometrických zobrazení

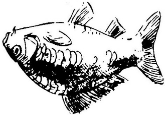
projektivní (s. 124)

afinní (s. 116)



podobná (s. 109)

ekviafinní (s. 117)



shodná (s. 105)

Osová souměrnost

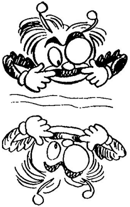
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o.[54]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na kolmici k ose, a to tak, že

$$\overrightarrow{X'X_o} = -\overrightarrow{XX_o},$$

kde X_o = průsečík XX' s osou o.



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s přímkou samodružných bodů, základní shodnost v rovině, nepřímá transformace, ...

[54] tzv. *osa*

Obecná shodná zobrazení

Definice

Shodné zobrazení zobrazuje každou úsečku na úsečku s ní shodnou.
Tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = |AB|.$$

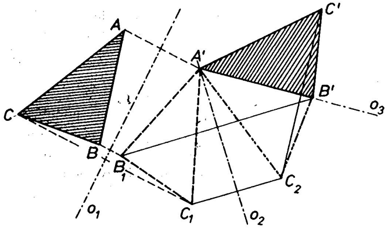
Další vlastnosti

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává odchylky přímek,
- zachovává obsahy, resp. objemy,
- je prosté (injektivní).

Shodnosti v rovině

Věta

Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností:



…proto je osová souměrnost základní shodností v rovině.

Důkaz.

Postupně vkládáme osy tak, aby

- $A \mapsto A'$ … dořešíme obrazy $B \mapsto B_1$ a $C \mapsto C_1$,
- $B_1 \mapsto B'$ … dořešíme obraz $C_1 \mapsto C_2$,
- …

□

Odtud klasifikace shodností v rovině:

(a) *identita* $=$ složení dvou os. soum. takových, že $o_1 = o_2$,

(b) *posunutí* $=$ složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \parallel o_2$,

(c) *otáčení* $=$ složení dvou os. soum. takových, že o_1 a o_2 jsou různoběžné,

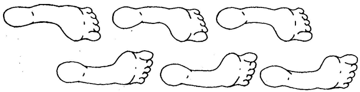
(d) *středová souměrnost* $=$ složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \perp o_2$,

(e) *osová souměrnost* $=$ jedna os. soum.,

(f) *posunutá souměrnost* $=$ složení tří obecných os. soum.

Poznámky

Shodnost s přímkou samodružných bodů je právě osová souměrnost (e).
Shodnosti (a)–(d) jsou *přímé* (zachovávají orientaci),
shodnosti (e)–(f) jsou *nepřímé* (mění orientaci).
Pojmenování (f) je odvozeno z možného rozkladu na osovou souměrnost a posunutí:



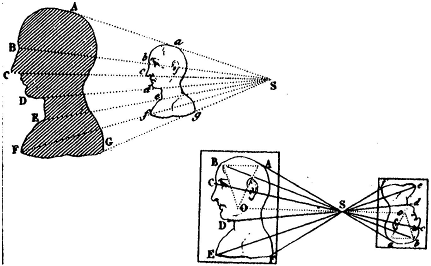
Stejnolehlost aneb škálování

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Bodem S a nenulovým reálným číslem k.[55]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží přímce SX, a to tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}.$$



Jaké má vlastnosti? Transformace se samodružným bodem, základní podobnost, v rovině přímá transformace, . . .

[55] tzv. *střed* a *koeficient* = poměr škálování

Speciální a mezní případy

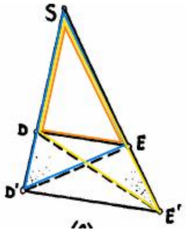
Spec. pro koeficient $|k| = 1$ dostáváme shodnosti:

- *identita*, pokud $k = 1$,
- *středová souměrnost*, pokud $k = -1$.

Pokud bychom připustili $k = 0$, dostaneme velmi degenerovaný případ:

- *zobrazení do jednoho bodu*.

Základní poznatek známe ze s. 50!



Zejména, každá stejnolehlost je

- podobné zobrazení, které
- každou přímku zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou.

Zobrazení s těmito vlastnostmi není mnoho, jmenovitě tři:

Věta

Složení dvou stejnolehlostí se středy S_1, resp. S_2 a koeficienty k_1, resp. k_2 je:

(a) *identita, právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,*

(b) *posunutí, právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,*[56]

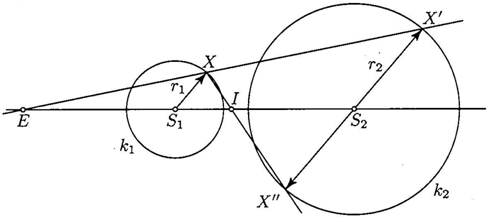
(c) *obecná stejnolehlost, právě když $k_1 \cdot k_2 \neq 1$.*[57]

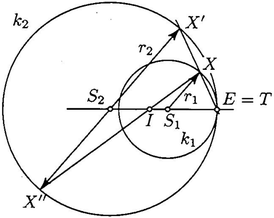
---

[56] Vektor posunutí je pak násobkem vektoru $\overrightarrow{S_1 S_2}$.

[57] Pokud $S_1 \neq S_2$, potom střed výsledné stejnolehlosti nutně leží na přímce $S_1 S_2$.

Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice, ...

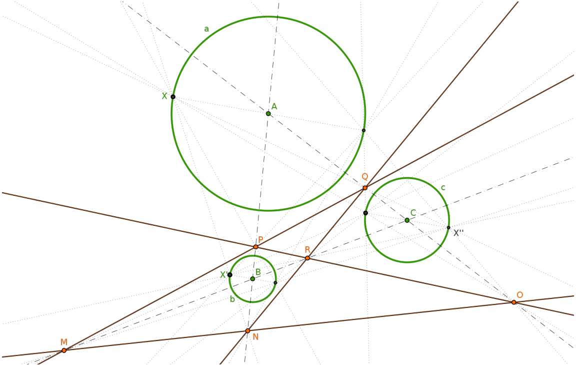




... každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, ...

... a to dvojím způsobem.

Jako důsledek předchozích poznatků pro zajímavost uvádíme:



Věta

Mezi šesti středy stejnolehlostí tří kružnic jsou čtyři kolineární trojice.

Obecná podobná zobrazení

Definice

Podobné zobrazení zachová poměry vzdáleností.
Tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = \mathbf{konst} \cdot |AB|.$$

Tato **konst.** je tzv. *koeficient podobnosti*, ozn. k, a je to kladné reálné číslo.

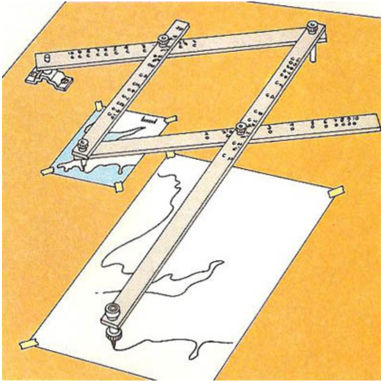
Další vlastnosti

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává odchylky přímek,
- obsahy se mění k^2-krát, resp. objemy se mění k^3-krát,
- je prosté (injektivní).

Další postřehy

- Každé shodné zobrazení je podobné (s koeficientem $k = 1$).
- Každé podobné zobrazení je složením nějaké shodnosti a stejnolehlosti (a proto je stejnolehlost <u>základní</u> podobností).

Užitek



Pantograf[58]

[58] http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph

Osová afinita aneb škálování v jednom směru

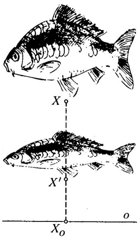
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o, směrem $\boldsymbol{s}$ a nenulovým reálným číslem m.[59]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na přímce se směrem $\boldsymbol{s}$, a to tak, že

$$\overrightarrow{X'X_o} = m \cdot \overrightarrow{XX_o},$$

kde $X_o =$ průsečík XX' s osou o.



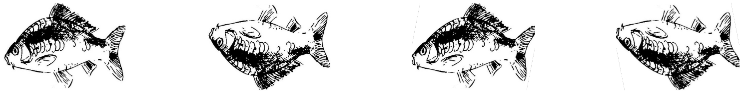
Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou samodružných bodů, základní afinní transformace v rovině, přímá/nepřímá podle znaménka m, ...

[59] tzv. *osa*, *směr* škálování a *modul* = poměr škálování v daném směru

Speciální a mezní případy

Speciálními, resp. mezními případy osové afinity jsou:[60]

- *osová souměrnost*, pokud $m = -1$ a $\boldsymbol{s} \perp o$,
- *šikmá souměrnost*, pokud $m = -1$ a $\boldsymbol{s} \not\perp o$,
- *elace* aneb *naklonění*, pokud $\boldsymbol{s} \parallel o$ ($\Longrightarrow m = 1$),



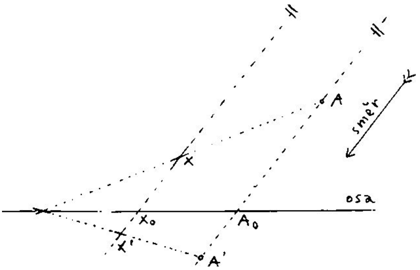
Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případ:

- *rovnoběžné promítání* do přímky o ve směru $\boldsymbol{s}$.

[60] $m = -1 \iff$ involuce

Základní vlastnosti

Obecná osová afinita:



(a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(b) zachovává poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů,[61]

(c) zachovává rovnoběžnost přímek.

Důkaz.

Variace na podobné trojúhelníky... □

[61]... pokud se různé body zobrazí na různé body.

Obecná afinní zobrazení

Definice

Obecné *afinní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a)–(c) ze s. 118:

(a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

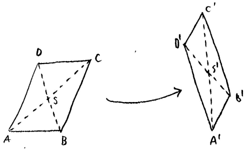
(b) zachovává poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů,[62]

(c) zachovává rovnoběžnost přímek.

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita* (viz osová afinita).[63]
Afinita, která zachovává obsahy (resp. objemy), se nazývá *ekviafinita* (viz šikmá souměrnost nebo elace).

Poznámka

Za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ekvivalentní. . .



[62]. . . pokud se různé body zobrazí na různé body.
[63]Příkladem neprostého afinního zobrazení je např. *rovnoběžné promítání*. . .

Afinity v rovině

Analogicky k tvrzení na s. 107 máme:

Věta

Každá afinita v rovině je složením nejvýše tří osových afinit.

. . . proto je osová afinita základní afinitou v rovině.

Důkaz.

Myšlenka důkazu je stále stejná, volnost v realizaci větší. . . □

Příklad

Stejnolehlost jako složení dvou osových afinit:

O určenosti afinního zobrazení

Afinní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), tj. obrazy dvou různých bodů...

Afinní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno obrazy tří bodů v obecné poloze...

Věta

Prosté[64] *afinní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.*

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí rovnoběžek a přenášení dělicích poměrů...[65] □

---

[64] resp. „ne příliš degenerované“, viz dále...

[65] https://ggbm.at/yWcCaQeA

Shrnutí a poznámky

Každé podobné zobrazení je afinní.

Každé shodné zobrazení je ekviafinní.

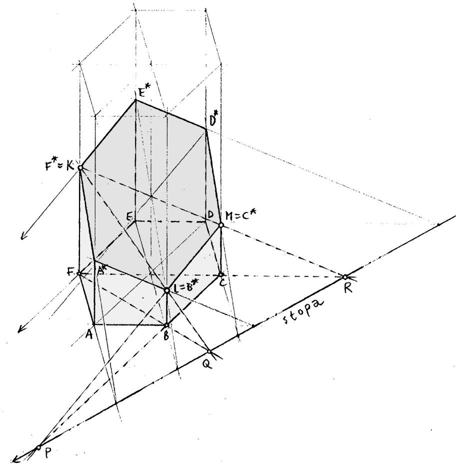
Podobné a ekviafinní zobrazení je shodné.

3-rozměrnou analogií osové afinity je afinita s rovinou samodružných bodů. . .

3-rozměrnou analogií rovnoběžného promítání do přímky je rovnoběžné promítání do roviny. . .

Obecné afinní zobrazení:

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- zachovává rovnoběžnost,
- **ne**zachovává obsahy, resp. objemy,
- **ne**zachovává odchylky,
- **nemusí** být prosté (injektivní).



Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou *KLM*.[66]

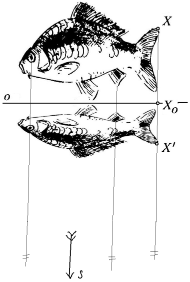
[66] http://ggbtu.be/mkvJL3iqr

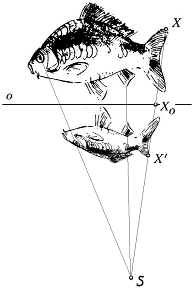
Poslední zobecnění

Poslední příspěvky do sbírky základních zobrazení (s. 104):

Od posunutí ke stejnolehlosti to je stejné...

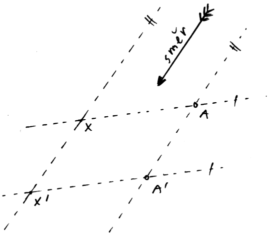
... jako od osové afinity k osové kolineaci...

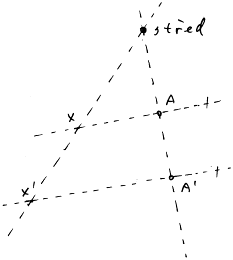




... nebo jako od rovnoběžného promítání ke středovému...

Posunutí vs. stejnolehlost:

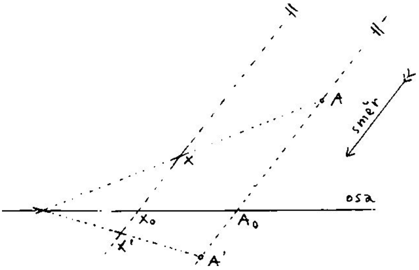


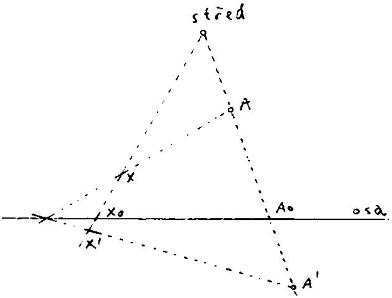


- $X'X \parallel A'A \parallel \ldots$ směr, $X'X \cap A'A \cap \ldots$ střed,
- $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'} = \ldots$ vektor posunutí, $\frac{\overrightarrow{SX'}}{\overrightarrow{SX}} = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \ldots$ koef. stejnolehlosti,

… „posunutí = stejnolehlost se středem v nekonečnu“.

Osová afinita vs. osová kolineace:



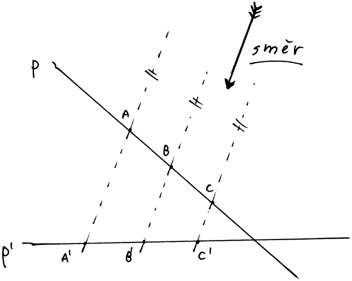


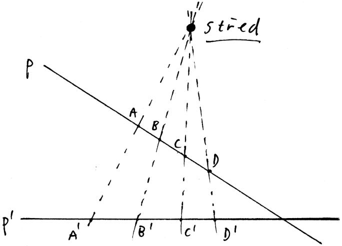
- $X'X \parallel A'A \parallel \ldots$ směr, $X'X \cap A'A \cap \ldots$ střed,
- $\dfrac{\overrightarrow{X'X_o}}{\overrightarrow{XX_o}} = \dfrac{\overrightarrow{A'A_o}}{\overrightarrow{AA_o}} = \ldots$ modul, $???? = ???? = \ldots$ modul,[67]

$\ldots$ „osová afinita = osová kolineace se středem v nekonečnu“.

[67] kde ???? je *nějak* určeno body A, A', A_o a S.

Rovnoběžné vs. středové promítání:





- $A'A \parallel B'B \parallel \ldots$ směr,
- $\dfrac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \ldots$ zákl. invariant,

$A'A \cap B'B \cap \ldots$ střed,

$???? = ???? = \ldots$ zákl. invariant,[68]

. . . „rovnoběžné promítání $=$ středové promítání se středem v nekonečnu“.

[68] kde ???? je *nějak* určeno body A, B, C a D.

Dělicí poměr a dvojpoměr

Definice

Dělicí poměr trojice kolineárních bodů (A, B, C) je reálné číslo d takové, že platí $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$; značíme a zapisujeme takto:

$$d = (AB\,C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Dvojpoměr čtveřice kolineárních bodů (A, B, C, D) je poměr dělicích poměrů $(AB\,C) : (AB\,D)$; značíme a zapisujeme takto:

$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

Poznámky

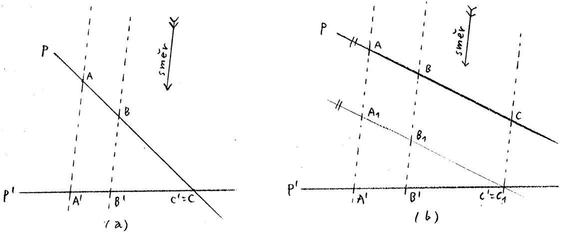
Vzhledem k tomu, že $\lim_{D\to\infty} (AB\,D) = 1$, platí $\lim_{D\to\infty} (AB\,CD) = (AB\,C)$; stručně

$$(AB\,CD_\infty) = (AB\,C).$$

Známe

Věta

Při rovnoběžném promítání se zachovávají poměry trojic kolineárních bodů.[69]



Důkaz.

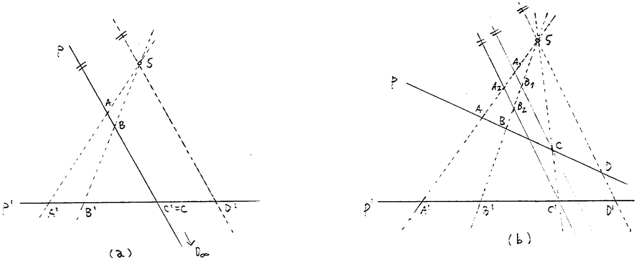
(a) Spec. případ plyne z podobnosti trojúhelníků $AA'C$ a $BB'C'$ (s. 50).

(b) Obecný případ plyne z (a) a shodností protilehlých stran v rovnoběžnících. □

[69] . . . pokud se různé body zobrazí na různé body.

Věta (Pappova)

Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[70]



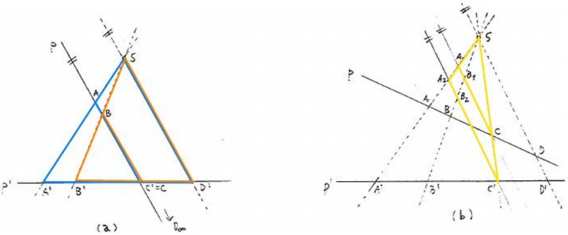
Důkaz.

(a) Spec. případ ($C = C'$ a $SD' \parallel p$) plyne z podobností trojúhelníků (s. 50) a vztahu $(AB\,C) = (AB\,CD_\infty)$ (s. 128):

(b) Obecný případ plyne z (a) a podobnosti trojúhelníků: □

[70]. . . pokud se různé body zobrazí na různé body.

Detaily k důkazu Pappovy věty



(a) Z modré, resp. oranžové podobnosti plyne

$$\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SD'}}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{SD'}}.$$

Po dělení

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} : \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} : \frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{B'D'}},$$

tudíž $(AB\,C) = (A'B'\,C'D')$. Levá strana je však totéž, co $(AB\,CD_\infty)$, tedy

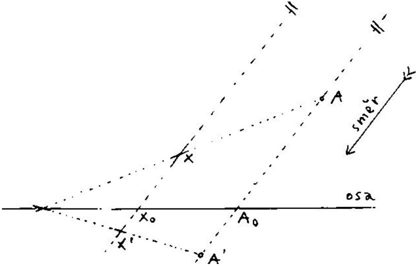
$$(AB\,CD_\infty) = (A'B'\,C'D').$$

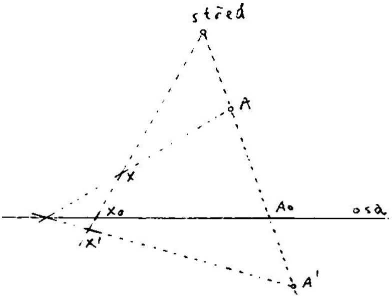
(b) Doplníme rovnoběžky s přímkou SD jdoucí bodem C, resp. C'.
Z (a) plyne $(A_1B_1\,C) = (AB\,CD)$, resp. $(A_2B_2\,C') = (A'B'\,C'D')$.
Ze žluté podobnosti plyne $(A_1B_1\,C) = (A_2B_2\,C')$, a tedy

$$(AB\,CD) = (A'B'\,C'D'). \quad \square$$

Jak to tedy funguje? (navazuje na s. 126)

Osová afinita vs. osová kolineace:





- $X'X \parallel A'A \parallel \ldots$ směr, $X'X \cap A'A \cap \ldots$ střed,
- $(X'X\,X_o) = (A'A\,A_o) = \ldots$ modul, $(X'X\,X_oS) = (A'A\,A_oS) = \ldots$ modul.

Speciální a mezní případy

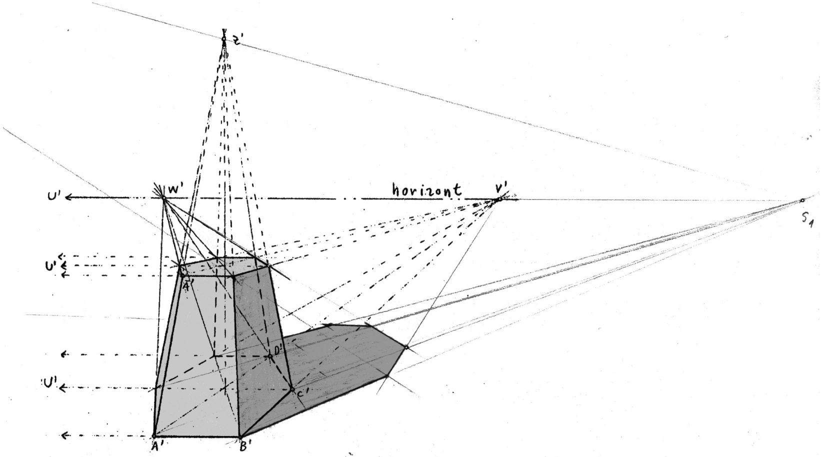
Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:

- *osová afinita*, pokud $S =$ nevlastní,
- *stejnolehlost*, pokud $o =$ nevlastní,
- *posunutí*, pokud S i o jsou nevlastní.

Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případy:

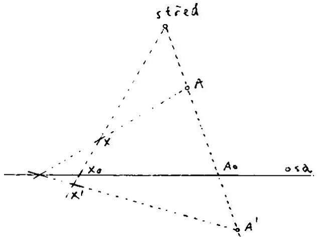
- *středové promítání* do přímky o z bodu S.
- *rovnoběžné promítání* do přímky o, pokud $S =$ nevlastní.

Užitek (doplňuje s. 123)



Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho stín.

Obecná osová kolineace:



(a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(b) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[71]

Důkaz.

Plyne z definice a z Pappovy věty... □

Pozor

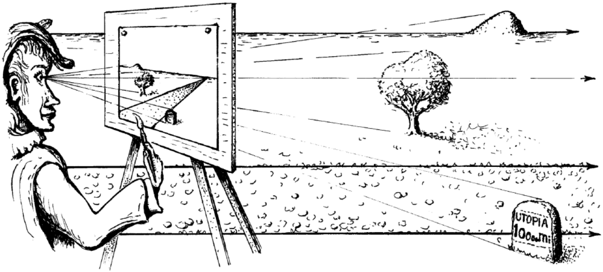
Afinní zobrazení fungují v <u>celé</u> rovině, resp. prostoru, ...

... při osové kolineaci či středovém promítání některé body nemají obraz, jiné nemají vzor!

[71]...pokud se různé body zobrazí na různé body.

Středové promítání aneb projekce

Při středovém promítání se některé body zobrazují „do nekonečna“ a naopak některé body „z nekonečna“ se zobrazují v konečnu:



... to jsou tzv. *úběžníky*, *horizont* apod.

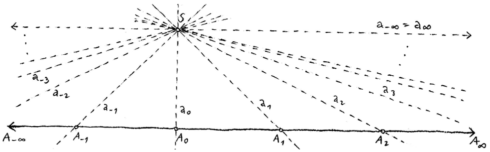
Pro větší pohodlí si náš eukleidovský prostor rozšíříme:

Eukleidovská přímka/rovina/prostor rozšířená o „body v nekonečnu“ je tzv. *projektivní* přímka/rovina/prostor.

Tyto nové body jmenujeme *nevlastní*, ostatní pak *vlastní*.

Projektivní rozšíření

Přesněji, body rozšířeného prostoru (A_i) ztotožňujeme s přímkami (a_i) procházejícími nějakým externím bodem (S):



Vlastní body odpovídají různoběžkám, nevlastní body rovnoběžkám s původním (nerozšířeným) prostorem.

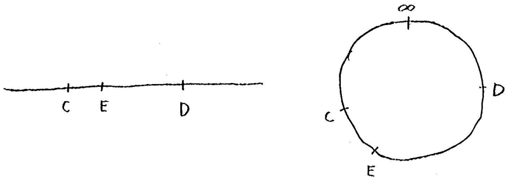
Tedy:

- Projektivní rozšíření eukleidovské přímky má **právě jeden** nevlastní bod,
- Projektivní rozšíření eukleidovské roviny má přímku nevlastních bodů.
- Každé dvě přímky v projektivní rovině se protínají.[72]
- Atd.

[72] Rovnoběžky se protínají v nevlastním bodě, různoběžky ve vlastním.

Uspořádání

- Projektivní přímka je uzavřená.
- Projektivní přímka nerozděluje projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.
- Uspořádání bodů na projektivní přímce nemá valného smyslu:



Eukleidovská vs. projektivní přímka

Osová kolineace pořádně

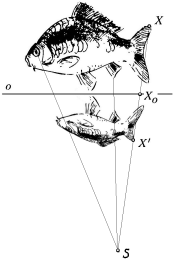
Co to je? Transformace **projektivní** roviny.

Čím je určena? Přímkou o, bodem S a nenulovým reálným číslem m.[73]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží na přímce SA, a to tak, že

$$(A'A\, A_o S) = m,$$

kde A_o = průsečík AA' s osou o a $(A'A\, A_o S)$ = dvojpoměr.



Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou samodružných bodů, základní projektivní transformace v rovině, . . .

[73]tzv. *osa*, *střed* a *modul*

Obecná projektivní zobrazení

Definice

Obecné *projektivní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a) a (b) ze s. 135:

(a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(b) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[74]

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo *kolineace* (viz osová kolineace).

Poznámky

Z (a) a (b) vyplývá, že prosté projektivní zobrazení

(c) zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky.[75]

Ve skutečnosti platí, že (c) $\Longrightarrow$ (b), ...

... viz základní větu projektivní geometrie (za rok)!

Pokud projektivní zobrazení zobrazuje všechny (ne)vlastní body na (ne)vlastní, potom je afinní (s. 119).

---

[74] ...pokud se různé body zobrazí na různé body.

[75] ... tedy nikoli např. na úsečky nebo jiné části přímek.

Projektivity v rovině (rýmuje se s. 120)

Analogicky k předchozím případům máme:

Věta

Každá kolineace v (projektivní) rovině je složením nejvýše tří osových kolineací.

. . . proto je osová kolineace základní kolineací v rovině.

Důkaz.

Myšlenka důkazu je stále stejná, volnost v realizaci stále větší. . . □

Projektivní zobrazení mezi <u>přímkami</u> je zcela určeno podmínkou (b),

- tj. obrazy <u>tří</u> různých bodů,
- tedy např. obrazy <u>dvou</u> různých vlastních bodů a <u>jedním</u> úběžníkem...

Projektivní zobrazení mezi <u>rovinami</u> je zcela určeno

- obrazy <u>čtyř</u> bodů v „dostatečně obecné“ poloze,
- nebo obrazy <u>tří</u> vlastních bodů v obecné poloze a <u>dvěma</u> odpovídajími úběžníky...

Věta

Prosté[76] *projektivní zobrazení prostoru dimenze $\underline{n}$ je jednoznačně určeno obrazy $\underline{n+1}$ vlastních bodů v obecné poloze a $\underline{n}$ odpovídajícími úběžníky.*

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí úběžníků a přenášení dvojpoměrů...[77] □

[76] resp. „ne příliš degenerované“, viz dále...

[77] https://ggbm.at/yWcCaQeA

Shrnutí a poznámky (doplňuje s. 122)

Každé afinní zobrazení je projektivní.

Projektivní zobrazení, které zobrazuje (ne)vlastní body na (ne)vlastní, je afinní.

3-rozměrnou analogií osové kolineace je kolineace s rovinou samodružných bodů. . .

3-rozměrnou analogií středového promítání do přímky je středové promítání do roviny. . .

Obecné projektivní zobrazení:

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává dvojpoměry vzdáleností čtveřic kolin. bodů,
- **ne**zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- **ne**zachovává rovnoběžnost,
- **ne**zachovává obsahy, resp. objemy,
- **ne**zachovává odchylky,
- **nemusí** být prosté (injektivní).

Osa vs. střed

Vše, co jsme kdy jmenovali základní transformací v rovině, mělo[78]

- *osu* = přímku samodružných bodů,
- *střed* = takový bod, že každá jím jdoucí přímka je samodružná.

Osa nebo střed mohou být vlastní nebo nevlastní, . . .

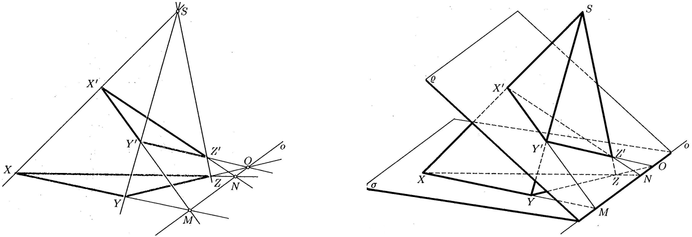
. . . ale z Desarguesovy věty vyplývá, že

- *projektivní transformace v rovině má osu* $\Longleftrightarrow$ *má střed.*

[78] https://ggbm.at/az7e9qsC

Věta

Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

Přehled základních transformací v rovině

střed S	osa o	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne	0	(středové promítání do přímky)
		ano	1	projektivní elace
		ne	-1	harmonická souměrnost
		ne	jinak	**osová kolineace**
nevlastní	vlastní	ne	0	(rovnoběžné promítání do přímky)
		ano	1	elace
		ne	-1	šikmá, resp. osová souměrnost
		ne	jinak	osová afinita
vlastní	nevlastní	ne	0	(promítání do bodu)
		ne	1	identita
		ne	-1	středová souměrnost
		ne	jinak	stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

Transformace je involutivní $\iff$ modul $= -1$.

Degenerované případy $\iff$ modul $= 0$.

Pro afinní transformace:

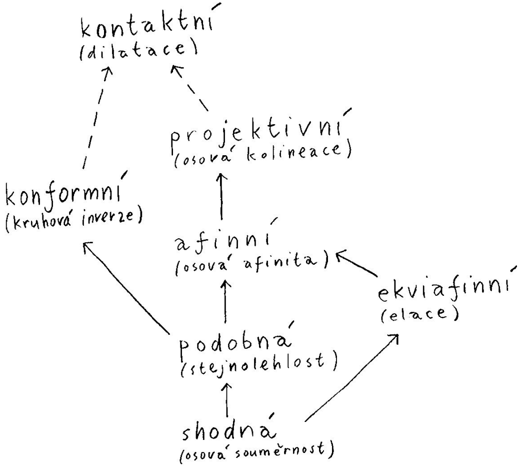
- přímá $\iff$ modul > 0,
- nepřímá $\iff$ modul < 0.

Přehled typů zobrazení a jejich vlastností

	kolin.	vzdál.	děl. pom.	dvojpom.	rovnob.	obs.	odch.
projektivní	+	–	–	+	–	–	–
afinní	+	–	+	+	+	–	–
ekviafinní	+	–	+	+	+	+	–
podobná	+	–	+	+	+	–	+
shodná	+	+	+	+	+	+	+
konformní	–	–	–	–	–	–	+

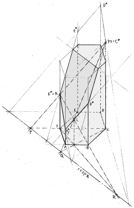
- Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je afinní.
- Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je podobné.
- Konformní zobrazení, které je projektivní, je podobné.
- Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je shodné.

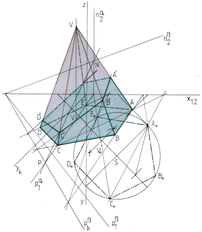
Hierarchie zobrazení (viz s. 104)

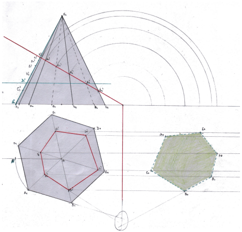


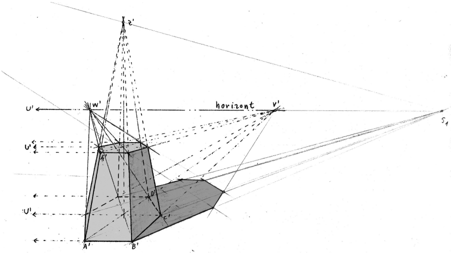
Užitek[79]

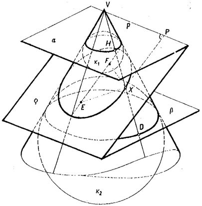
Mnoho základních zobrazení můžeme (resp. musíme) pozorovat při znázorňování původně stereometrických problémů:











[79] http://is.muni.cz/el/ped/jaro2019/MA0007/um/gg/kolineace.pdf

Podle způsobu promítání dělíme na:

- středové (tj. projektivní),
- rovnoběžné (tj. afinní),
- exotické.

Podle způsobu provedení dělíme na:

- volné,[80]
- vázané,[81]
- vychytané,[82]
- analytické,[83]
- exotické.

[80] . . . takto jsme to dělali dosud,
[81] za chvíli,
[82] za chvíli,
[83] takto budeme dělat příští rok. . .

Umíme: středové a rovnoběžné promítání (viz s. 140 a 119)

Středové promítání a každé *projektivní* zobrazení

(i) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(ii) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[84]

Nevlastní body mohou mít vlastní obrazy (tzv. úběžníky) a naopak.

Rovnoběžné promítání je středové promítání s nevlastním středem.

Rovnoběžné promítání a každé *afinní* zobrazení navíc zobrazuje (ne)vlastní body na (ne)vlastní, jinými slovy

(iii) zachovává rovnoběžnost přímek,

(iv) zachovává obyčejné poměry trojic kolineárních bodů.[85]

---

[84]... kdykoli to dává smysl (pokud se různé body zobrazí na různé)

[85]... kdykoli to dává smysl...

Umíme: volné promítání (viz s. 142 a 121)

Volné středové/rovnoběžné promítání je určeno několika málo body a obecnými vlastnostmi projektivních/afinních zobrazení (i)–(iv):

Věta

„Nepříliš degenerované“

(a) *afinní,*

(b) *projektivní*

zobrazení prostoru dimenze $\underline{n}$ je jednoznačně určeno obrazy

(a) $\underline{n+1}$ *bodů v obecné poloze,*

(b) $\underline{n+1}$ *bodů v obecné poloze a $\underline{n}$ odpovídajícími úběžníky.*

Základní konstrukce jsou:

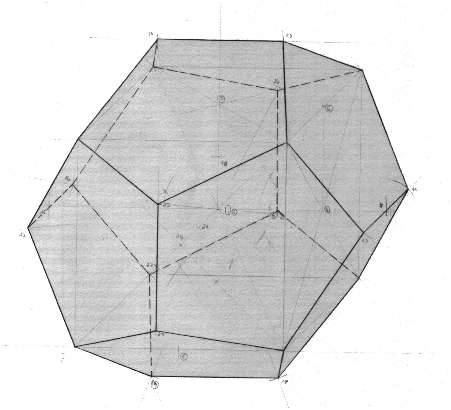
(a) rovnoběžky a přenášení poměrů,

(b) úběžníky a přenášení dvojpoměrů.

V předpokladu věty tušíme jistý zádrhel:

Jak sestrojit obraz bodu v „souřadné rovině“, která se zobrazuje do přímky?

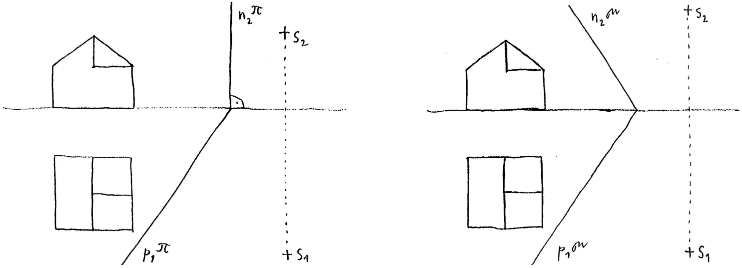
. . . pomocí vepsané krychle (podle s. 70):



Nově: vázané promítání

Vázané promítání je určeno přesným vymezením průmětny a středu, resp. směru promítání vzhledem k zobrazovanému objektu.

Pro zadání si pomáháme s pomocnými sdruženými průměty (nárys, půdorys):



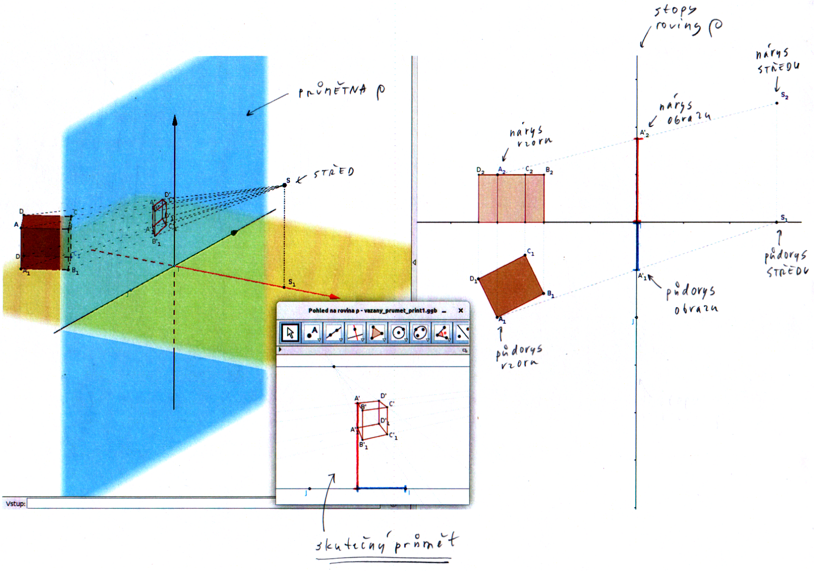
Na rozdíl od předchozí metody odpadají jakékoli omezující předpoklady.

Základní konstrukční dovednosti jsou:

- průnik přímky a roviny,
- odměřování a přenášení vzdáleností. . .

Vázaný průmět kvádru[86]

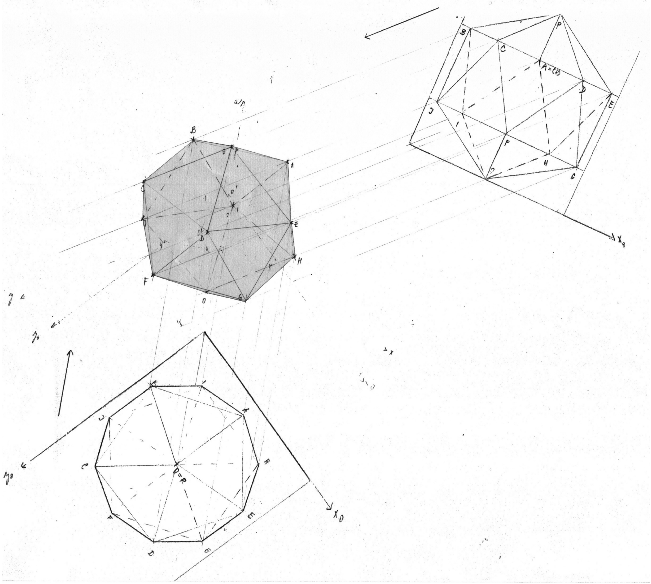
... do speciálně zvolené průmětny ρ:



[86] http://ggbtu.be/mZvl063hi

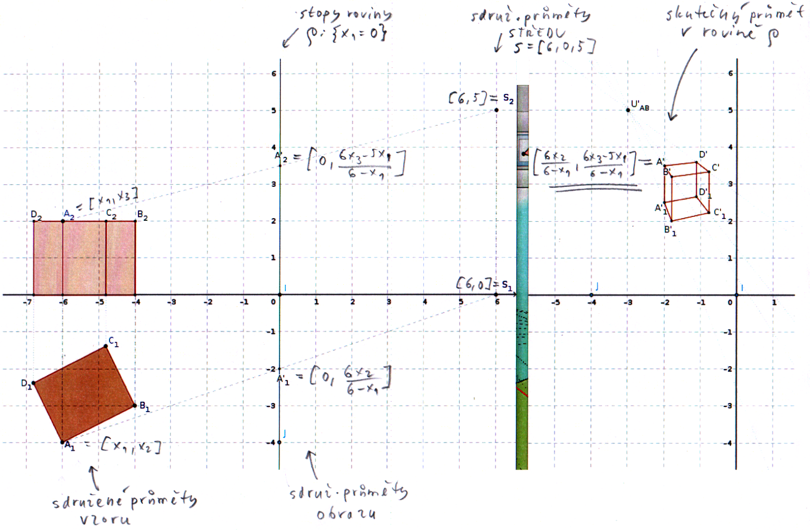
Vychytaný průmět pravidelného dvacetistěnu

. . . tzv. zářezovou metodou (podle s. 67):



Cvičení: analytické vyjádření

… vzhledem k nějaké souřadné soustavě:



Výhled: analytické vyjádření

Středové promítání ze středu $S = [6, 0, 5]$ do roviny $\rho : \{x_1 = 0\}$

- v afinních (kartézských) souřadnicích:

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto \left[0, \frac{6x_2}{6 - x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6 - x_1}\right],$$

- v homogenních (rozšířených) souřadnicích:

$$(\underline{x_0} : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (\underline{6x_0 - x_1} : 0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1),$$

$$\text{tj.} \begin{pmatrix} x_0 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} 6 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{array}\right)}_{\boxed{\text{Všechno v jedné matici!}}} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

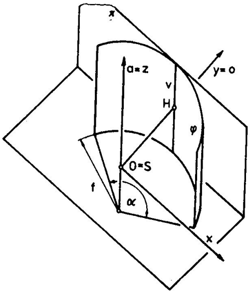
Obdobně to funguje pro lib. projektivní zobrazení, ...

... viz základní větu projektivní geometrie (za rok)!

Další promítání

Dosud jsme uvažovali toliko projektivní zobrazení, tj. taková zobrazení, při nichž se přímka zobrazuje jako přímka (resp. bod).

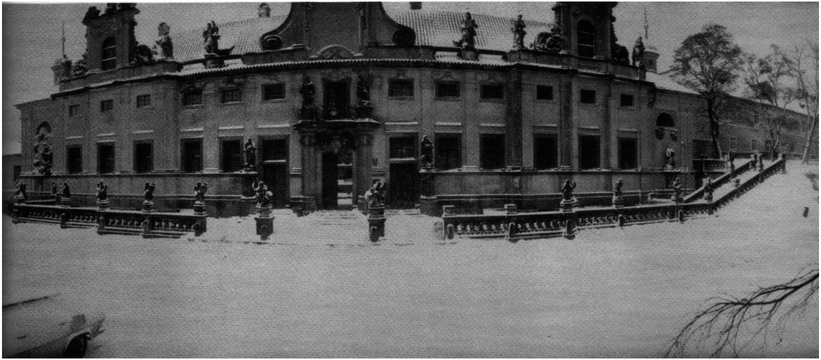
Existuje řada dalších nápadů, viz např. *cylindrickou perspektivu*:



Ta funguje jako složení

- středového promítání na válcovou plochu
- a rozvinutí této plochy do roviny.

Cylindrický průmět hradčanské Lorety



Některé přímky se zobrazují jako přímky, většina však ne...

Další provedení

Dosud jsme bod v prostoru reprezentovali

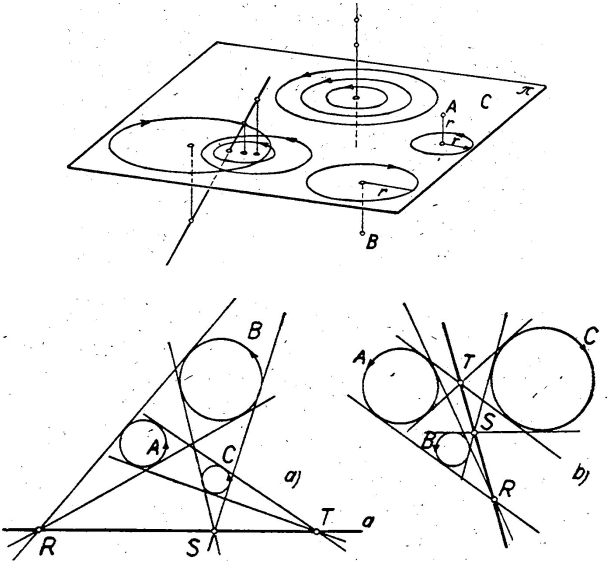
- souřadnicemi $A = [x_1, x_2, x_3]$,
- sdruženými průměty, tj. půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a nárysem $A_2 = [x_1, x_3]$,
- volně, tj. průmětem a nějakým kontextem.[87]

Existují další nápady; bod v prostoru je jednoznačně určen např.

- půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a kótou (= souřadnicí x_3) $\rightsquigarrow$ mapy,
- půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a cyklem (= kružnicí s poloměrem $|x_3|$ a orientací podle znaménka x_3) $\rightsquigarrow$ cyklografie...

[87] vrchol hranolu apod.

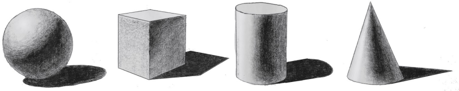
Cyklografický průmět bodu, přímky, roviny[88]

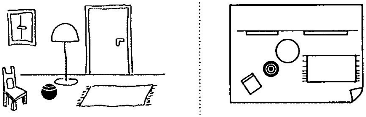


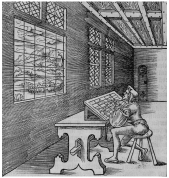
[88] Co nám tohle jenom připomíná a k čemu by to mohlo být dobré?

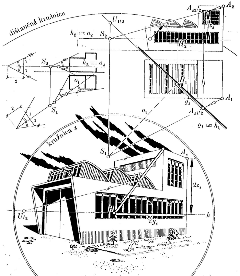
Užitek

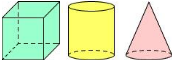
Se zobrazováním prostoru do roviny mohou — ale nemusí — být problémy:











Úvod (s. 2–5)

- primitivní pojmy, vztahy (relace) a tvzení (axiómy, resp. postuláty)
- axiómy vyslovené, nevyslovené (spojitost, uspořádání) a problematické (rovnoběžnost)

Planimetrie (s. 6–59)

- základní poznatky (např. o vnějším úhlu v 3úh.)
- důsledky postulátu o rovnoběžkách (např. o součtu úhlů v 3úh., Eukl. věty o odvěsně/výšce)
- geometrická algebra (zlatý řez apod.)
- o kružnicích (obvodové úhly, mocnost)
- pravidelné mnohoúhelníky (3, 4, 5, 6, 15, ...)
- teorie podobnosti (poměry a úměrnosti, základní ekvivalence)

Sestrojitelné veličiny (s. 22–27)

- úplná chakterizace ($+\ -\ \cdot\ :\ \sqrt{}$)
- slavné problémy starověku (např. kvadratura kruhu)

Stereometrie (s. 60–71)

- rozšíření slovníku a možných 3D vztahů (kolmost, rovnoběžnost)
- analogie, resp. rozdíly k 2D (rovnoběžnostěny, resp. jehlany)
- pravidelné mnohostěny (4, 6, 8, 12, 20)

Dotykové úlohy (s. 74–83)

- základní úlohy (tečny)
- základní nápady (mocnost, souměrnost, stejnolehlost, dilatace)
- základní motivace (obecná Apollóniova úloha)

Užitek (s. 16, 35, 46, 72, 84)

- kvadratura mnohoúhelníku
- kvadratické rovnice a jejich řešení
- pravidelný 5úhelník apod.
- specifické dotykové úlohy
- celkový přehled

Taxonomie

- hlavní páteř (shodná, podobná, (ekvi)afinní, projektivní) (s. 104–143)
- další typy (konformní, kontaktní) (s. 86–103)
- příklady, obecné vlastnosti a hierarchie (s. 144–148)

Obecný rámec (s. 124–143)

- projektivní rozšíření
- Pappova věta
- věta o určenosti

Základní transformace (s. 146)

- regulární: osová kolineace (a spec. případy), Desarguesova věta
- singulární: středové, resp. rovnoběžné promítání

Zobrazování prostoru do roviny (s. 151–163)

- podle promítání: středové ($\Longrightarrow$ projektivní), rovnoběžné ($\Longrightarrow$ afinní)
- podle zadání: volné (obrazy několika bodů), vázané (střed/směr promítání a rovina), ...
- základní úlohy (přenášení (dvoj)poměru kolin. bodů)
- vychytávky (otočení roviny, zářezová metoda apod.)

Užitek (s. 98–103, 123, 149, 164)

- obecná Apollóniova úloha
- obecné průměty pravidelných a jiných těles
- řezy hranolů, jehlanů a jejich skutečné velikosti
- celkový přehled

[A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999

[DV] L. Drs, J. Všetečka, *Objektivem počítače: geometrie speciálních fotografických technik*, SNTL, 1981

[EB] *The Elements of Euclid*, obrázkové vydání od O. Byrneho, http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html

[EJ] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heatha, http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

[EV] *Eukleidés, Základy*, české vydání podle překladu F. Servíta s komentářem P. Vopěnky, O.P.S., 2008–12, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Eukleides_Servit.pdf

[H] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000

[K1] F. Kuřina, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002

[K2] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996

[M] V. Medek, *Deskriptívna geometria*, SNTL, 1962

[P] J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Mladá Fronta, 1954