

přednáška 05: diskrétní náhodná veličina

Zabývejme se nyní znovu psními modely, ale tak nějak od začátku

Klasická psť se rozvíjela díky hazardním hrám a sázkám

Moderní teorie psťi se věnuje spíše popisu náhodnosti při měření nějaké veličiny – používá proto další pojmy a terminologii

Klíčovým pojmem zde je **náhodná kvantitativní veličina**, která může být dvou typů: **diskrétní** a **spojitá**

Následující výklad viz Budíková, Králová, Maroš: Průvodce základními statistickými metodami, str. 69-76

výklad pro EX, DX doplněn z el.textu Matematika 3, kapitola 10.

Příklad 1: hodíme třikrát mincí a zajímáme se o počet líců v těchto třech hodech

$\Omega = \{RRR, LRR, RLR, RRL, LLR, LRL, RLL, LLL\}$... možných výsledků je 8

- **Ke každému výsledku nyní přiřadíme reálné číslo odpovídající počtu líců ... to bude hodnota náhodné veličiny X**

$X = \text{počet líců ve třech hodech mincí}$

| Počet líců $X = \dots$ | Možné elem. výsledky | Pstní funkce | Relativní kumulativní četnosti |
|---------------------------|-------------------------|------------------|-----------------------------------|
| $X=0$ | RRR | $p(0)=1/8=0,125$ | 0,125 |
| $X=1$ | LRR,RLR,RRL | $p(1)=3/8=0,375$ | 0,500 |
| $X=2$ | LLR,LRL,RLL | $p(2)=3/8=0,375$ | 0,875 |
| $X=3$ | LLL | $p(3)=1/8=0,125$ | 1,000 |

Definice: **Náhodná veličina X** je tedy pravidlo, které přiřazuje elementárním výsledkům množiny Ω reálná čísla (= zobrazení množiny Ω do množiny reálných čísel)

(také viz obrázek) ... a teprve těmto reálným číslům přiřadíme psti

Klasické značení:

$X = x$... náhodná veličina X nabývá hodnoty x

$X = 1$... náhodná veličina X nabývá hodnoty 1

$X \leq x$... náhodná veličina X nabývá hodnoty menší než nebo rovné x

$X \leq 2$... náhodná veličina X nabývá hodnoty menší než nebo rovné 2

Definice: Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X je pst, že veličina X nabývá hodnoty menší než nebo rovné x $F(x) := P(X \leq x)$

Pokračujme v příkladu 1: najdeme graf distribuční funkce $F(x)$ počtu líců ve třech hodech mincí

Distribuční funkce u diskrétní veličiny je velmi blízká relativní kumulativní četnosti, ale pozor, je definovaná pro jakékoli reálné x , tj. i když veličina X nabývá pouze hodnot $0, 1, 2, 3$, tak distribuční funkce je definována i pro $x=2,26$; $x=-0,5$; $x=4,8$, apod.

Distribuční funkce $F(x) := P(X \leq x)$

Pokračujme v příkladu 1: najdeme graf distribuční funkce $F(x)$ počtu líců ve třech hodech mincí

$x < 0 \dots F(x) = P(X \leq x) = 0 \dots$ nelze naměřit počet líců \leq záporn číslu

$x = 0 \dots F(0) = P(X \leq 0) = p(0) = 0,125$

$0 < x < 1 \dots F(x) = P(X \leq x) = p(0) = 0,125$

$x = 1 \dots F(1) = P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = 0,500$

$1 < x < 2 \dots F(x) = P(X \leq x) = p(0) + p(1) = 0,500 \quad \text{atd viz obrázek}$

vlastnosti distribuční funkce $F(x) := P(X \leq x)$

1. F je neklesající.
2. F je zprava spojitá
3. F je normovaná, tj. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$... důležité pro výpočty psí
5. $P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = \dots$ výška schodu v x_0
(=0 v bodě spojitosti)
6. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$... důležité pro výpočty psí

vlastnosti distribuční funkce $F(x) := P(X \leq x)$

Je důležité si pamatovat, že vlastnosti této distribuční funkce platí pro všechny veličiny, diskrétní (tato přednáška) i spojité (příští přednáška)

Pojem distribuční funkce je nejdůležitějším pojmem teorie psti, protože spojuje popis diskrétních i spojitých veličin do jednoho rámce

Střední hodnota EX diskrétní veličiny X :

Definice střední hodnoty vychází z pojmů vážený aritmetický průměr měření:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i x_i = \bar{x} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^k p_i x_i,$$

• Kde p_i jsou relativní četnosti měření dané hodnoty

Přesně stejnou strukturu má i vzorec pro střední hodnotu veličiny X , jen místo empirických (= naměřených) četností p_i ve vzorci vystupují teoretické p_i :

Střední hodnota EX diskrétní veličiny X :

$EX = \sum_{i=1}^k x_i \cdot p_i$, kde x_i jsou veškeré hodnoty, kterých veličina X může nabývat, a p_i jsou jejich psti.

Střední hodnota EX náhodné veličiny X je tedy jakýsi teoretický průměr, který bychom vypočetli při velkém množství měření veličiny X , pokud by se veličina X chovala přesně podle daného teoretického popisu (popsaného pstní funkcí p)

Ad př. 1: $EX = 0 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,125 = 1,5$... průměrně naměříme jeden a půl líců ve třech hodech mincí

Rozptyl DX a směrodatná odchylka \sqrt{DX} diskrétní veličiny X :

Podobně jako u střední hodnoty: rozptyl náhodné veličiny X vychází z pojmu rozptyl hodnot měření:

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - \bar{x})^2,$$

• Kde p_i jsou relativní četnosti měření dané hodnoty;

Úpravou lze převést na tvar $s^2 = (\sum_{i=1}^k p_i \cdot x_i^2) - \bar{x}^2$
(vážený průměr čtverců MINUS čtverec průměru)

Přesně stejnou strukturu má vzorec pro rozptyl DX náhodné veličiny X : ... $DX := (\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot p_i) - (EX)^2$

Rozptyl DX náhodné veličiny X je tedy jakýsi teoretický rozptyl **od střední hodnoty EX** , který bychom vypočetli při velkém množství měření veličiny X , pokud by se veličina X chovala přesně podle daného teoretického popisu (popsaného psaní funkcí p)

$$\text{Ad př.1: } DX = 0^2 \cdot 0,125 + 1^2 \cdot 0,375 + 2^2 \cdot 0,375 + 3^2 \cdot 0,125 - 1,5^2 = 0,75$$

Protože ovšem DX je průměr čtverců veličiny, nemá rozměr stejný jako veličina X

Abychom viděli rozptýlení hodnot analogické rozměru veličiny X , často upravujeme rozptyl do tvaru směrodatné odchylky $= \sqrt{DX}$

• Ad př.1: $DX = 0^2 \cdot 0,125 + 1^2 \cdot 0,375 + 2^2 \cdot 0,375 + 3^2 \cdot 0,125 - 1,5^2 = 0,75$

$\sqrt{DX} = 0,8660254 \dots$ většina měření veličiny X leží v intervalu

$EX \pm \sqrt{DX} = 1,5 \pm 0,8660254 = (0,634; 2,366)$... většina měření počtu líců ze tří hodů mincí bude ležet v tomto intervalu

Jedná se vlastně o Ot. 09: model psti 03 – diskrétní
pst ... pouze jsme dodali další pojmy (distrib fce,
střední hodnota, rozptyl a směrodatná odchylka)

a) Ω má konečně mnoho elementárních výsledků, nebo je jich stejně
jako přirozených čísel

b) tyto výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat

○ Pak pro pst jevu $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p(\omega_j)$$

(kde p je tzv pstní funkce)

Z axiomů psti plyne pro pstní funkci:

1. $\sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = 1$... axiom normovanosti
2. $p(\omega_i) \geq 0$ pro každý elementární výsledek $\omega_i \in \Omega$
3. $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$ (axiom součtu pstí neslučitelných jevů)

V přednášce 2 jsme počítali příklad:

Př.: hážeme kostkou tak dlouho, až poprvé padne šestka; pak skončíme; ω_i je jakákoli přípustná sekvence hodů za těchto podmínek. Určete pst, že na první šestku budeme potřebovat více než tři hody.

Mohli bychom si označit $X =$ počet hodů před prvním výskytem šestky

Dopočetní $F(x)$, ED , DX pro příklad z př. 2

Označme je jako př. 2:

Př.: házeme kostkou tak dlouho, až poprvé padne šestka; pak skončíme;

ω_i je jakákoli přípustná sekvence hodů za těchto podmínek.

Mohli bychom si označit $X =$ počet hodů před prvním výskytem šestky

Určete $F(x)$, EX , DX veličiny X

Rekapitulace otázek:

17: distribuční funkce, střední hodnota a rozptyl diskrétní náhodné veličiny