Otázka 4: Neurčitý integrál + diferenciální rovnice

Integrování je "inverzním procesem" k derivování

derivování na I: k $F(x)$ hledáme funkci $f(x) = F'(x)$ na I

integrování na I: k $f(x)$ hledáme funkci $F(x)$ takovou, že $F'(x) = f(x)$ na I

(opačné označení: $F(x) = \int f(x)\,dx$ pro $x \in I$)

$F(x)$ ... primitivní funkce k funkci $f(x)$

Způsoby hledání primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$:

a) ze samotné povahy toho, že se jedná o proces „opačný" vůči derivaci, řadu primitivních funkcí nalezneme pomocí vzorců pro derivování v opačném směru:

$$\int 0\,dx = c \qquad \int e^x\,dx = e^x + c \text{ na } R$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ na } R \xrightarrow{\text{ALE}} \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \text{ pro } x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c \text{ na } R$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \text{ na } R \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \text{ na } (-1;1)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \text{ na } R$$

primitivní fce nejsou nikdy jednoznačné k dané funkci $f(x)$, jich existuje nekonečně mnoho a liší se o konstantu

Neurčitý integrál k funkci $f(x)$ ... množina všech jejích primitivních funkcí

b) Neurčitý integrál funguje jako lineární operátor, tj.

$$\int (c \cdot f(x) + d \cdot g(x))\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx + d \cdot \int g(x)\,dx$$

(neurčitý integrál ze součtu funkcí je roven součtu neurčitých integrálů)

c) Vztah b) neplatí pro integrál ze součinu funkcí, avšak větu o derivaci součinu funkcí opačným směrem využít lze a říká se jí metoda per partes (integrace „po částech"):

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

/ pokud obě strany tohoto vztahu zintegrujeme, na levé straně se „inverzní" procesy integrálu a derivace vyruší

$$u(x) \cdot v(x) = \underline{\int u'(x) \cdot v(x)\,dx} + \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

např. $\boxed{\int u'(x) \cdot v(x)\,dx} = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$

používáme zejména, když $u'(x)$ se integrací zjednoduší či nezmění (např. $u'(x) = e^x$, $\sin x$, $\cos x$) a $v(x)$ se derivováním zjednoduší (např. $v(x)$ = polynom)

Př. $\int x \cdot e^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & v = x \\ u = e^x & v' = 1 \end{array} \right| = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = \underline{x \cdot e^x - e^x + c}$

d) pomocí substituce:

substituce typu 1 = zjednodušení: část $\varphi(x)$ integrované funkce $g(x)$ zjednodušíme a označíme za proměnnou t (čili $\varphi(x)=t$)

+

funkci $g(x)$ vyjádříme ve tvaru $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

f je nějaká funkce, ve které se objevuje jediná proměnná $\varphi(x)$, nikoli x samotné

$$\int g(x)\,dx = \int \underbrace{f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)}_{g(x)}\,dx = \left|\begin{array}{l} S \\ \boxed{\varphi(x)=t} \\ \varphi'(x)\,dx = dt \end{array}\right| =$$

$$= \int f(t)\,dt \overset{(*)}{=} F(t)+c = \underline{\underline{F(\varphi(x))+c}}$$

využijeme větu o derivaci složené funkce opačným směrem (tedy F je primitivní funkce k funkci f)

$$\boxed{\left(F(\varphi(x))\right)' = \underbrace{F'(\varphi(x))}_{f(\varphi(x))}\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)} \qquad (*)$$

Př. $\int \sin^{3/2}x\cdot\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l} \overset{\varphi(x)}{\sin x} = t \\ \cos x\,dx = dt \\ f(\varphi(x)) = (\varphi(x))^{3/2} \end{array}\right| = \int t^{3/2}\,dt = \dfrac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} + c = \underline{\underline{\dfrac{2}{5}\sin^{5/2}x + c}}$

nebo

$\int \cos(3x+5)\,dx = \left|\begin{array}{l} \overset{\varphi(x)}{3x+5} = t \\ 3\,dx = dt \\ f(\varphi(x)) = \dfrac{\cos(\varphi(x))}{3} \end{array}\right| = \int \dfrac{\cos t}{3}\,dt = \dfrac{1}{3}\sin t + c = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}\sin(3x+5)+c}}$

substituce typu 2 = zesložitění: proměnnou x nahradíme takovou funkcí $\varphi(t)$, která je sice složitější, ale upraví vzorec funkce $g(x)$ do tvaru pro integraci vhodnějšího:

$$\int g(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} S \\ \boxed{x=\varphi(t)} \\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array}\right| = \int g(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \overset{(*)}{=} G(\varphi(t)) + c = G(\varphi(\varphi^{-1}(x))) + c = \underline{\underline{G(x)+c}}$$

Př.:

$$\int \frac{dx}{4+\sqrt{x+5}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2-5 \Rightarrow t = \sqrt{x+5} \\ dx = 2t\,dt \\ g(\varphi(t)) = \dfrac{1}{4+\sqrt{t^2-5+5}} = \dfrac{1}{4+t} \end{array} \right| = \int \frac{1}{4+t}\cdot 2t\,dt =$$

$$= \int \frac{2t+8-8}{4+t}\,dt = \int \left(2 - \frac{8}{4+t}\right)dt = 2t - 8\ln|t+4| + c \underset{t=\sqrt{x+5}}{=}$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{x+5} - 8\ln\left|\sqrt{x+5}+4\right| + c}}$$

nebo

$$\int \frac{dx}{4+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \\ g(\varphi(t)) = \dfrac{1}{4+t} \end{array} \right| = \int \frac{1}{4+t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t+8-8}{t+4}\,dt =$$

$$= \int \left(2 - \frac{8}{t+4}\right)dt = 2t - 8\ln|t+4| + c \underset{t=\sqrt{x}}{=} \underline{2\sqrt{x} - 8\ln\left|\sqrt{x}+4\right| + c}$$

2) integrace racionální funkce = podílu polynomů: $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \dfrac{\tilde{r}(x)}{q(x)}$

pokud $st\ p \geq st\ q$, provedeme dělení polynomů a $p_1(x)$ je polynom, který zintegrujeme jednoduše;

$\dfrac{\tilde{r}(x)}{q(x)}$ je ryzí racionální funkce (tj. $st\ \tilde{r}(x) < st\ q(x)$), kterou lze vždy rozložit na součet parciálních zlomků:

- $\dfrac{a}{x-x_0}$ ... integrujeme na $a\ln|x-x_0|$
- $\dfrac{a}{(x-x_0)^n}$ pro $n \neq 1$ ... integrujeme na $a\cdot\dfrac{(x-x_0)^{-n+1}}{-n+1}$
- $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$ s komplexními kořeny jmenovatele ... převedeme na $\dfrac{f(x)}{f'(x)} + \dfrac{c}{x^2+px+q}$ a první část integrujeme vzorcem, druhou převedeme na $\dfrac{d}{t^2+1}$ a vzorce
- $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ pro $k>1$ ... integrujeme pomocí rekurentního vzorce (per partes)

Př.: $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = -\ln|x-2|+\ln|x-3|+c$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$1 = A(x-3)+B(x-2)$$

$x=3:\ 1 = B$

$x=2:\ 1 = -A$

Využití neurčitého integrálu při řešení obyčejných diferenciálních rovnic:

V mnoha úlohách matematického modelování lze sestavit rovnici, ve které vystupuje neznámá funkce $y(t)$ i její derivace $y'(t)$, popřípadě $y''(t)$. Tyto rovnice, ve kterých vystupuje neznámá funkce a její derivace, tzv. diferenciální rovnice. Jejich řešení provádíme procesem opačným k derivování, tj. integrací.

Př. model exponenciálního úbytku: víme, že množství určité látky s časem klesá, (např. množství radioaktivní látky v živých organismech)

$\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ ... průměrná změna množství látky $y(t)$ na intervalu $\langle t_0, t\rangle$

$y'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ ... okamžitá změna množství veličiny y v okamžiku t_0

$$\boxed{y' = -1{,}4\cdot 10^{-11}\cdot y}$$

experimentálně zjištěný úbytek $_{88}Ra^{226}$ za sekundu

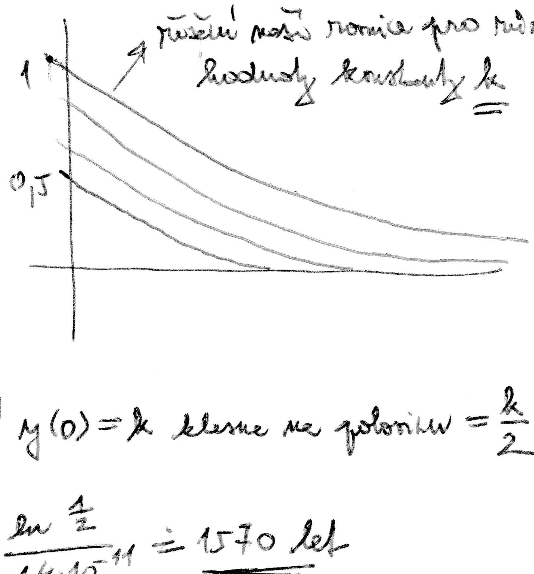
víme, že se jedná o úbytek, tj. rychlost bude záporná

$$\frac{dy}{dx} = -1{,}4\cdot 10^{-11}\, y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -1{,}4\cdot 10^{-11}\int dx$$

$$\ln|y| = -1{,}4\cdot 10^{-11}x + c$$

$$y = \pm e^{c}\cdot e^{-1{,}4\cdot 10^{-11}x} = k\cdot e^{-1{,}4\cdot 10^{-11}x}$$

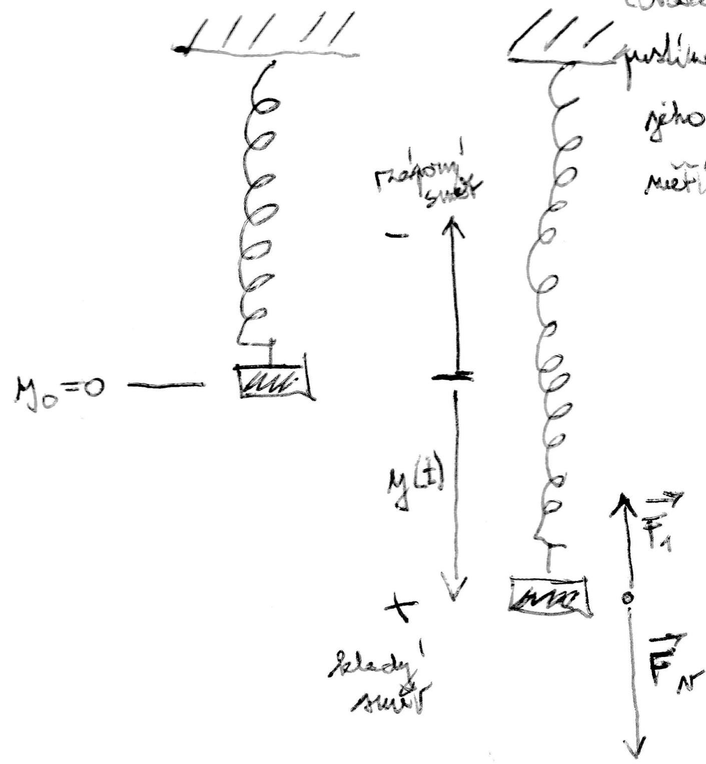


Otázka: určete poločas rozpadu = dobu, kdy množství $y(0)=k$ klesne na polovinu $=\frac{k}{2}$

Dosadíme do výsledné funkce: $\frac{\cancel{k}}{2} = \cancel{k}\cdot e^{-1{,}4\cdot 10^{-11}x}$

$\frac{1}{2} = e^{-1{,}4\cdot 10^{-11}x} \Rightarrow x = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-1{,}4\cdot 10^{-11}} \doteq 1570$ let

Př.: netlumený harmonický oscilátor: závaží na pružině zavěšené volně (obrázek vlevo) vychýlíme vnější silou, a pak pustíme; pružina se rozkmitá (obrázek vpravo), jeho odchylku od rovnovážné polohy měří funkce $y(t)$.



Kmitání pružiny popisuje 2. Newtonův zákon:

$$m\cdot y'' = -k\cdot y$$

$m\cdot y''$ = F_N ... síla působící pohyb (2. Newtonův zákon)

$-k\cdot y$ = F_1 = síla pružiny působící v opačném směru, která obnovuje rovnovážný stav

$y(t)$... uražená dráha

$y'(t)$... rychlost pohybu

$y''(t)$... rychlost změny rychlosti = zrychlení

Máme tedy diferenciální rovnici

$$m\cdot y'' + ky = 0 \quad /\cdot \frac{1}{m}$$

$$\boxed{y'' + \frac{k}{m}\cdot y = 0}$$ → příslušná charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$\frac{k}{m} > 0$, tj. řešením λ-rovnice jsou komplexní čísla

$$\lambda_{1,2} = \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega_0} = \pm i\omega_0$$

Pak $\underline{y(t) = c_1\cdot\cos(\omega_0 t) + c_2\cdot\sin(\omega_0 t)} = \underbrace{c\cdot\cos(\omega_0 t - \delta)}$ $\quad \delta = \operatorname{arctg}\frac{c_2}{c_1}$

fázově posunutý kosinus o úhel δ s amplitudou c vypočtenou pomocí amplitud c_1, c_2 z Pythagorovy věty

Funkce $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$ mají periodu $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, tedy za 1 sekundu proběhne $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ cyklů mechanického kmitání pružiny (= mechanického oscilátoru)

Pozn.: Při tlumených kmitech (těleso je připevněno k pístu ponořenému do husté polévky, která tlumí kmitání pružiny) řešíme rovnici $m\cdot y'' + b\cdot y' + k\cdot y = 0$ (b je součinitel útlumu)

je řešením $y(t) = e^{-\alpha t}(c_1\cdot\cos(\omega^* t) + c_2\cdot\sin(\omega^* t))$

$= \underline{c\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega^* t - \delta)}$ → graf: