1. Číselné řady

A. Základní pojmy

Přirozeným rozšířením operace sčítání konečného počtu čísel

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

je součet nekonečného počtu čísel a_k, $k = 1, 2, \ldots$. Mluvíme pak o (nekonečné) řadě. Zavedeme nejprve tento pojem a poté budeme zkoumat jeho vlastnosti.

Definice 1.1. (Nekonečná číselná řada) Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ značí nějakou posloupnost reálných čísel a_k. *Nekonečnou řadou* (stručně *řadou*) rozumíme symbol tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots \ . \tag{1.1}$$

Jednotlivá čísla a_k se nazývají členy řady této řady.

Motivační příklad. S problémem, zda součtem nekonečné řady může být konečné číslo, se matematikové potýkali již ve starověku. Máme pro to doklad ve známé matematické hříčce o Achillovi a želvě. Podle této úlohy byl rychlonohý Achilles vyzván pomalou želvou k závodu na sto metrů. Vědom si své rychlosti, dal želvě náskok deset metrů. Navíc se rozhodl, že mu postačí běžet desetkrát rychleji, než želva. Jakmile tedy po startu Achilles uběhl oněch deset metrů, o něž měla želva náskok, urazila želva jeden metr. Jenže i po uběhnutí tohoto metru Achilles stále zaostával, tentokrát o jeden decimetr. Když uběhl onen decimetr, urazila želva jeden centimetr, o který byla stále napřed. Starověcí matematici se domnívali, že tuto konstrukci lze opakovat do nekonečna, a tudíž Achilles želvu nikdy nedostihne. Nedovedli si totiž představit, že sečtením nekonečně mnoha délek, o nichž jsme mluvili v souvislosti s náskokem želvy před Achillem, je možné dostat nějakou konečnou délku, po jejímž uběhnutí by Achilles želvu vlastně dohonil. Matematicky vyjádřeno, řada

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots \tag{1.2}$$

je sice tvořena nekonečně mnoha kladnými členy (sčítanci), avšak může mít konečný součet.

Intuitivně je zřejmé, že příslušnou nekonečnou řadu sčítáme postupným přičítáním následujícího sčítance k součtu všech předcházejících. Takto dostáváme posloupnost hodnot, které se k hledanému součtu blíží, a součet tedy lze stanovit jako limitu posloupnosti těchto hodnot. V tomto smyslu také zavedeme pojem součtu nekonečné řady.

Definice 1.2. (Částečný součet a zbytek) Nechť je dána nekonečná řada (1.1). Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ součtů tvaru

$$s_1 = a_1, \ s_2 = a_1 + a_2, \ldots, \ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ldots$$

se nazývá *posloupnost částečných součtů* řady. Součet s_n se nazývá n*-tý částečný součet* řady.
Vynecháme-li v řadě (1.1) prvních n členů, dostáváme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots,$$

kterou nazýváme n-tým zbytkem řady a značíme R_n.

Definice 1.3. (Konvergence, divergence a oscilace) Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ značí posloupnost částečných součtů řady (1.1).

1) Jestliže existuje konečná limita
$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$
potom nazýváme řadu (1.1) *konvergentní* a píšeme
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

2) Jestliže
$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \text{ nebo } -\infty,$$
potom nazýváme řadu (1.1) *divergentní*.

3) Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, pak nazýváme řadu (1.1) *oscilující*.

Definice 1.4. (Geometrická řada) Nejznámějším příkladem nekonečné řady je *geometrická řada*
$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \dots \qquad (a \neq 0)\,,$$
kde číslo a je první člen řady a číslo q nazýváme *kvocient* řady. Ze střední školy víme, že pro součet prvních n členů geometrické řady platí pro $q \neq 1$ vztah
$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$
a pro $q = 1$ pak
$$s_n = an\,.$$
Odtud podle definice součtu nekonečné řady platí:

a) je-li $q \geq 1$, pak $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$

b) je-li $-1 < q < 1$, pak $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$

c) je-li $q \leq -1$, pak $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Jinak vyjádřeno, geometrická řada konverguje (tj. má konečný součet) právě tehdy, je-li hodnota kvocientu q nějaké číslo z otevřeného intervalu $(-1, 1)$. V tomto případě je součet roven podílu prvního sčítance a hodnoty jedna minus kvocient. Pro všechna zbývající q geometrická řada nekonverguje (přesněji: pro $q \geq 1$ diverguje, tj. má nekonečný součet, a pro $q \leq -1$ osciluje, tj. její součet neexistuje).

Pomocí tohoto závěru můžeme snadno posoudit otázku konvergence řady (1.2). Protože jde o geometrickou řadu s hodnotou kvocientu jedna desetina, zmíněná řada konverguje a její součet činí sto devítin. Tato hodnota je tedy ve zmíněné úloze vzdálenost (v metrech) kterou Achilles potřebuje k dostižení želvy.

Určení součtu číselné řady. V případě geometrické řady se podařilo vyjádřit částečný součet s_n pro libovolné přirozené n, což nám umožnilo snadno určit hodnotu součtu s. Toto vyjádření s_n lze ovšem provést pouze ve velmi speciálních případech (geometrická řada je jedním z nich). V obecném případě se proto alespoň snažíme rozhodnout, zda-li je tento součet konečný (a řada tedy konverguje). V kladném případě pak hodnotu součtu s aproximujeme hodnotou částečného součtu s_n, kde n je dosti veliké. Přesnost této aproximace odhadujeme pomocí chování zbytku R_n.

V další části se tedy zaměříme na formulaci podmínek, které nám umožní posoudit, zda daná řada konverguje. Při formulaci těchto kritérií konvergence bývá důležitým předpokladem požadavek kladený na znaménka jednotlivých členů těchto řad. Zpravidla se předpokládá, že daná řada zahrnuje pouze členy s kladnými hodnotami (pak hovoříme o *řadě s kladnými členy*), příp. členy střídající pravidelně znaménka (pak hovoříme o *alternující řadě*). Některá kritéria konvergence pro řady s kladnými členy uvedeme v oddílu B a nejznámější kritérium konvergence pro alternující řady pak bude obsahem oddílu C.

Na závěr úvodního oddílu uvedeme podmínku, jejíž splnění je nutné k tomu, aby daná řada mohla konvergovat. Tato podmínka nezahrnuje předpoklad týkající se znamének členů řady, a má tedy z tohoto hlediska obecnou platnost.

Věta 1.5. (Nutná podmínka konvergence) Nechť řada (1.1) konverguje. Pak limita posloupnosti členů řady je nulová, tj. platí vztah

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{1.3}$$

Podmínka (1.3) nestačí ke konvergenci řady (1.1), což ukážeme později na příkladu. Musí ale být splněna, aby řada mohla konvergovat. Jinak vyjádřeno, její nesplnění má za následek, že řada nekonverguje (tj. diverguje nebo osciluje).

B. Kritéria konvergence řad s kladnými členy

Již jsme uvedli, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se nazývá řadou s kladnými členy, je-li $a_k > 0$ pro všechna $k = 1, 2, \dots$. Jedním z nejjednodušších poznatků o těchto řadách je skutečnost, že buď konvergují, nebo divergují (nemohou tady oscilovat).

K posouzení konvergence, či divergence lze užít jednoho z následujících kritérií.

Věta 1.6. (Porovnávací kritérium) Nechť řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jsou řady s kladnými členy a nechť pro všechna $k \geq 1$ platí

$$a_k \leq b_k.$$

Potom z konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ plyne konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a z divergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ plyne divergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Užití porovnávacího kritéria je omezeno na naši schopnost nalézt vhodnou řadu ke srovnání (zdůrazněme, že o této řadě musíme vědět, zda konverguje, či diverguje). Porovnáním s geometrickou řadou lze dokázat následující dvě kritéria.

Věta 1.7. (Limitní podílové kritérium) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s kladnými členy a nechť existuje konečná limita

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Potom:

a) je-li $L < 1$, daná řada konverguje,

b) je-li $L > 1$, daná řada diverguje,

c) je-li $L = 1$, nemůžeme o případné konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.

Věta 1.8. (Limitní odmocninové kritérium) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s kladnými členy a nechť existuje konečná limita

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

Potom:

a) je-li $L < 1$, daná řada konverguje,

b) je-li $L > 1$, daná řada diverguje,

c) je-li $L = 1$, nemůžeme o případné konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.

Za předpokladu $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ lze ukázat, že existuje-li $\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k$, pak existuje také $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ a obě limity si jsou rovny. Jinak vyjádřeno, lze-li o konvergenci či divergenci rozhodnout podle limitního podílového kritéria, pak lze rozhodnout rovněž i pomocí limitního odmocninového kritéria.

Poznamenejme, že obě výše uvedená kritéria existují i v nelimitním tvaru; pro naše účely je však limitní formulace dostačující.

Odhad velikosti zbytku. Důležitou součástí kritéria konvergence by měl být odhad velikosti zbytku R_n, tj. odhad chyby, které se dopustíme při náhradě součtu s dané řady hodnotou částečného součtu s_n (srozumitelně vyjádřeno: odhad chyby, které se dopustíme, když místo nekonečné řady sečteme pouze jejích prvních n členů). V případě užití porovnávacího a obou limitních kritérií neexistuje univerzální vzorec pro tento odhad. Zbytek R_n se pak obvykle odhaduje pomocí součtu zbytku vhodné (nejčastěji geometrické) řady. U dalších kritérií již vzorec pro odhad velikosti zbytku bude přímo obsažen ve formulaci daného kritéria.

Následující kritérium je poněkud jiného typu a ukazuje souvislost mezi nekonečnými řadami a nevlastními integrály.

Věta 1.9. (Integrální kritérium) Nechť je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s kladnými členy, přičemž pro $k \geq 1$ platí $a_k = f(k)$, kde $f(x)$ je nezáporná a nerostoucí funkce pro $x \geq 1$. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje}\,.$$

V případě konvergence navíc platí odhad velikosti zbytku ve tvaru

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 1.10. Ukažme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \ldots$$

konverguje, a odhadněme chybu, které se dopustíme při náhradě součtu s této řady hodnotou s_{10}.

Řešení. Daná řada má kladné členy a její konvergenci pro názornost prověříme pomocí všech uvedených kritérií.

Porovnávací kritérium: Platí

$$\frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad \text{pro všechna } k = 1, 2, \ldots\,.$$

Protože majorantní (větší) číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k$ je geometrická řada s hodnotou kvocientu jedna polovina (tedy konverguje), původní daná (menší) řada konverguje podle porovnávacího kritéria také.

Limitní podílové kritérium: Platí

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \frac{k2^k}{1} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1)} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Limitní odmocninové kritérium: Analogicky

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k2^k}} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Integrální kritérium: Podle tohoto kritéria je otázka posouzení konvergence dané řady ekvivalentní posouzení konvergence nevlastního integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x2^x}\,,$$

neboť funkce $f(x) = 1/(x2^x)$ vyhovuje předpokladům kritéria. Nejjednodušším způsobem důkazu konvergence tohoto integrálu je použití porovnávacího kritéria pro konvergenci nevlastních integrálů, jehož formulace i praktické použití je analogické stejnojmennému kritériu konvergence nekonečných řad.

Lze tedy konstatovat, že daná číselná řada konverguje, tj. má konečný součet. Pro odhad chyby pak navíc platí

$$R_{10} = \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k2^k} < \frac{1}{11} \sum_{k=11}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{11} 2^{-10} = 0,000089.$$

Aproximujeme-li tedy hodnotu součtu s dané řady hodnotou částečného součtu

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k2^k} = 0,693065,$$

pak chyba této aproximace nepřevýší hodnotu 0,000089 (jinak vyjádřeno, hodnota součtu s je takto určena s přesností alespoň na tři desetinná místa). Později uvidíme, že přesná hodnota součtu s této řady činí $s = \ln 2$.

Příklad 1.11. Rozhodněme o konvergenci tzv. *harmonické řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots .$$

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že obě limitní kritéria selhávají, neboť příslušná limita je rovna jedné. Použitelné není ani kritérium porovnávací, neboť nemáme k dispozici vhodnou řadu ke srovnání. Zbývá proto kritérium integrální. Ježto funkce $f(x) = 1/x$ vyhovuje předpokladům tohoto kritéria, můžeme přímou integrací rozhodnout o divergenci harmonické řady. Platí totiž

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty\,,$$

a z divergence tohoto integrálu plyne také divergence harmonické řady.

Tato řada je proto nejznámějším příkladem řady vyhovující nutné podmínce konvergence (její členy se blíží k nule), která nicméně diverguje. Důvodem je zřejmě skutečnost, že na rozdíl od výše uvedených konvergentních řad se její členy k nule neblíží dostatečně rychle.

Příklad 1.12. Určeme hodnotu součtu řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

s přesností 10^{-6}.

Řešení. Především poznamenejme, že je opět nejprve třeba rozhodnout o konvergenci dané řady, tedy o tom, zda je její součet vůbec konečné číslo. Diskuse ohledně volby kritéria je zcela analogická jako v případě řady harmonické a jediným efektivním kritériem se ukazuje kritérium integrální. Protože

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} + 1 = 1 < \infty\,,$$

daná řada konverguje. Z odhadu zbytku uvedeného při formulaci integrálního kritéria vyplývá, že

$$R_n \le \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$$

Odtud snadno

$$\frac{1}{n} \le 10^{-6} \Leftrightarrow n \ge 10^6.$$

S požadovanou přesností tedy platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{k^2} = 1,644934.$$

Poznámka 1.13. **(Volba vhodného kritéria)** Předcházející příklady naznačily, jak je třeba postupovat při volbě kritéria konvergence. Z počtářského hlediska volíme to kritérium, při jehož aplikaci budeme schopni určit danou limitu, či integrál (příp. budeme schopni rozhodnout o konvergenci tohoto integrálu). Musíme však počítat s tím, že pokud příslušná limita vyjde rovna jedné, kritérium není pro danou řadu použitelné. Pokud jde o kritérium porovnávací, tak jeho úspěšnost narůstá s našimi vědomostmi o konvergenci konkrétních číselných řad (máme prostě k dispozici větší počet řad pro účely srovnání). Obecně se dá říci, že toto kritérium je nejnáročnější na důvtip a logické uvažování.

C. Kritérium konvergence alternujících řad

Kromě řad s kladnými členy se často setkáváme s tzv. *alternujícími řadami*, jejichž členy pravidelně střídají znaménko. Pro tyto řady máme jednoduché kritérium konvergence včetně odhadu velikosti zbytku.

Věta 1.14. (Leibnizovo kritérium) Nechť je dána alternující řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \qquad (a_k > 0),$$

která má tu vlastnost, že

$$a_k \geq a_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

a dále splňuje nutnou podmínku konvergence, tj. vztah

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\,.$$

Pak tato řada konverguje a platí odhad velikosti zbytku ve tvaru

$$|R_n| \leq a_{n+1}\,.$$

Příklad 1.15. Rozhodněme o konvergenci tzv. Leibnizovy řady

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

a odvoďme vzorec pro odhad velikosti zbytku.

Řešení. Posloupnost $\{1/k\}$ je klesající a má nulovou limitu. Řada tedy podle Leibnizova kritéria konverguje. Vzorec pro odhad zbytku je pak tvaru

$$|R_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Po sečtení např. prvních desíti členů řady tedy je $s_{10} = 0,645635$ a $|R_{10}| \leq 0,091$. Později uvidíme, že přesná hodnota součtu Leibnizovy řady činí $s = \ln 2$, což je stejná hodnota jako v případě součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty} 1\big/(k2^k)$. Rozdíl je však v rychlosti konvergence těchto řad. Zatímco v případě řady $\sum_{k=1}^{\infty} 1\big/(k2^k)$ jsme po sečtení prvních desíti členů řady obdrželi aproximaci $s_{10} = 0,693065$, v případě Leibnizovy řady stejná aproximace dává $s_{10} = 0,645635$. Přesná hodnota součtu obou řad přitom činí $s = \ln 2$ ($\approx 0,693147$).

D. Operace s číselnými řadami. Absolutní konvergence

V posledním oddíle první kapitoly posoudíme vlastnosti číselných řad z hlediska aritmetických zákonů, které platí pro konečné součty. O skutečnosti, že s nekonečnými řadami nelze zacházet stejně jako s konečnými součty, nás přesvědčí následující jednoduchý příklad:

Uvažujme tzv. Grandiho řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots\ , \quad \text{tj.} \quad a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1, \dots\ .$$

Tato řada osciluje, neboť $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0, \dots$, tj. limita posloupnosti částečných součtů s_n neexistuje. Jestliže však Grandiho řadu uzávorkujeme jako

$$1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \dots\ , \quad \text{tj.} \quad a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0, \dots\ ,$$

pak vzniklá řada konverguje, neboť $s_n = 1$ pro všechna přirozená n, a součet s této řady je tedy roven jedné. Podobně snadno nahlédneme, že při uzávorkování tvaru

$$[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \dots \,, \quad \text{tj.} \quad a_1 = 0,\, a_2 = 0, \dots$$

dostáváme opět konvergentní řadu, tentokrát však se součtem $s = 0$. Příčina tohoto zdánlivého rozporu tkví v tom, že jsme při našich úpravách použili asociativního zákona, který pro nekonečné řady obecně neplatí.

V následujících třech větách uvedeme přehled základních aritmetických operací s *konvergentními* nekonečnými řadami. Důkazy těchto tvrzení plynou ze známých vlastností limity součtu a součinu posloupností.

Základní operací s nekonečnými řadami je

Věta 1.16. (Součet dvou konvergentních řad) Mějme dvě konvergentní řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \beta.$$

Pak je konvergentní i řada $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \alpha + \beta\,.$$

Další tvrzení lze chápat jako analogii distributivního zákona pro konečné součty:

Věta 1.17. (Distributivní zákon) Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak pro libovolné $c \in \mathbf{R}$ konverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k$ a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,.$$

Příklad Grandiho řady ilustroval skutečnost, že mezi členy nekonečné číselné řady nelze libovolně rozmístit závorky. Je-li však příslušná řada konvergentní (což Grandiho řada není), můžeme členy této řady libovolně uzávorkovat, aniž se změní její součet. Tato skutečnost je zformulována v následujícím tvrzení, které je analogií asociativního zákona pro konečné součty:

Věta 1.18. (Asociativní zákon) Nechť řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

konverguje a nechť $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak konverguje i řada

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + (a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \dots + a_{k_3}) + \dots$$

a má týž součet.

Příklad Dokažme konvergenci a určeme součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5.3^k - 4^{k+1}}{6^k}\,.$$

Řešení: Řady $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k/6^k = \sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k$, resp. $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k/6^k = \sum_{k=0}^{\infty}(2/3)^k$ jsou konvergentní geometrické řady se součty $s_1 = 2$, resp. $s_2 = 3$. Pak tedy konverguje i zadaná řada a její součet je roven $s = 10 - 12 = -2$.

Pozorný čtenář si jistě všiml, že mezi přehledem aritmetických operací, které platí pro konvergentní číselné řady, nebyla uvedena analogie komutativního zákona (tj. zákona o záměně členů, resp. přerovnání členů řady). Uveďme proto v této souvislosti následující příklad, který je zajímavým důsledkem předcházejících vět.

Příklad 1.19. Uvažujme Leibnizovu řadu a označme její součet symbolem s (později uvidíme, že $s = \ln 2$); je tedy

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \qquad (*)$$

Násobme vztah (*) číslem $1/2$. Podle věty 1.17 platí

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots .$$

Protože přidáním libovolného počtu nul se limita částečných součtů nemění, platí

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \dots \qquad (**)$$

Sečtením vztahů (*), (**) dostaneme podle věty 1.16:

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots ;$$

na pravé straně je řada, která vznikne přerovnáním Leibnizovy řady tak, že vždy vezmeme nejprve dva kladné a pak jeden záporný člen. Takto přerovnaná řada má jiný součet než původní Leibnizova řada (důvod tohoto paradoxu, který přísluší k tzv. paradoxům nekonečna, spočívá v definici součtu nekonečné řady jako limity posloupnosti částečných součtů).

Analogie komutativního zákona tedy pro konvergentní číselné řady obecně neplatí. K jeho platnosti je třeba zavést silnější vlastnost řady, tzv. *absolutní konvergenci*. Kromě konvergence dané řady budeme v této souvislosti vyšetřovat také konvergenci řady tvořené absolutními hodnotami jednotlivých členů. Nejprve ukážeme, že z konvergence řady absolutních hodnot plyne i konvergence původní řady.

Věta 1.20. Konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, potom konverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Opačná implikace neplatí, jak ukazuje příklad Leibnizovy řady $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k$. Tato řada je konvergentní, avšak řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ je divergentní harmonická řada. Má proto smysl zavést následující pojem:

Definice 1.21. (Absolutní a neabsolutní konvergence) Konverguje-li s řadou $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ také řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje *absolutně*.

Konverguje-li pouze řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kdežto řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje *neabsolutně* (nebo také relativně).

Poznámka 1.22. a) V případě řad s kladnými členy pojem konvergence splývá s pojmem absolutní konvergence.

b) K posouzení absolutní konvergence libovolné řady lze využít kritérií pro konvergenci řad s kladnými členy.

Příklad 1.23. Jako příklad neabsolutně konvergentní řady již byla uvedena Leibnizova řada. Příkladem absolutně konvergentní řady je řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k^2$, jejíž konvergence plyne z Leibnizova kritéria, a konvergence řady absolutních hodnot $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ plyne z integrálního kritéria.

O přerovnávání neabsolutně konvergentních řad platí tato obecná věta.

Věta 1.24. (Riemannova) U neabsolutně konvergentních řad můžeme vhodným přerovnáním řady docílit toho, aby přerovnaná řada konvergovala k libovolnému předem zvolenému číslu, nebo aby divergovala k $+\infty$ nebo $-\infty$, případně aby oscilovala.

Ilustrujme tuto skutečnost (a naznačme tím zároveň princip důkazu) na příkladu Leibnizovy řady, o které víme, že konverguje neabsolutně. Zkonstruujeme takové přerovnání této řady, při kterém obdržíme např. součet $s = 2$.

Příklad 1.25. Přerovnejte vhodně členy Leibnizovy řady $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$, tak aby součet této řady byl 2.

Řešení. Sčítejme nejprve kladné členy řady, dokud nebude příslušný částečný součet větší než 2. Dostáváme tedy

$$s_8 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{15} = 2,0218.$$

Nyní přičteme první záporný člen, tj. $-1/2$ a máme

$$s_9 = s_8 - \frac{1}{2} = 1,5218.$$

Nyní opět přičítáme kladné členy, až částečný součet překročí 2. Tedy

$$s_{22} = s_9 + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{41} = 2,0041.$$

Zařadíme-li další záporný člen, dostáváme

$$s_{23} = s_{22} - \frac{1}{4} = 1,7541.$$

Lze snadno nahlédnout, že pokračováním této konstrukce obdržíme přerovnanou Leibnizovu řadu se součtem $s = 2$.

Analogicky pak postupujeme v případech, kdy součtem s je libovolné reálné číslo, resp. kdy výsledkem přerovnání je divergentní nebo oscilující řada.

Pro absolutně konvergentní řady platí na rozdíl od Riemannovy věty následující tvrzení, které je analogií komutativního zákona pro konečné součty.

Věta 1.26. (Komutativní zákon - věta o přerovnávání řad) Je-li řada absolutně konvergentní, nezmění se její součet žádným jejím přerovnáním.

Shrnutí poznatků o číselných řadách

Stanovit součet nekonečné řady umíme pouze ve velmi speciálních případech (např. u geometrické řady). Máme však k dispozici kritéria, pomocí kterých lze v řadě případů rozhodnout, zda je tento součet konečné číslo. V mnoha případech jsme obvykle také schopni aproximovat tento součet s libovolnou přesností.

Při počítání s nekonečnými konvergentními řadami lze užít distributivního i asociativního zákona; k platnosti komutativního zákona je třeba mít navíc zaručenu tzv. absolutní konvergenci řady, tj. konvergenci řady absolutních hodnot.

K platnosti komutativního zákona je třeba mít navíc zaručenu tzv. absolutní konvergenci řady, tj. konvergenci řady absolutních hodnot.