

Fyzikální motivace pro výuku matematiky 2

Břetislav Fajmon

Obsah

1	Převody fyzikálních jednotek	14
2	Pohyb hmotného bodu po přímce	14
3	Vektory a některá jejich využití	14
4	Pohyb hmotného bodu v rovině a prostoru	14
5	Síla a pohyb – Newtonovy zákony	14
6	Síla a pohyb – tření, dostředivá síla	14
7	Kinetická energie při pohybu hmotného bodu	15
7.1	Kinetická energie	15
7.2	Práce	16
7.3	Práce a kinetická energie	16
7.4	Práce tíhové síly \vec{G}	21
7.5	Práce proměnné síly	27
7.6	Funkce $y = \ln x$, $y = e^x$ a jejich vlastnosti	31
7.7	Cvičení – neurčitý integrál – základní vzorce	41
7.8	Cvičení – neurčitý integrál – metoda per partes = po částech	41
7.9	Cvičení – neurčitý integrál – substituce	41
7.10	Práce pružné síly	42
7.11	Výkon	46
7.12	Vztažné soustavy	48
7.13	Otázky k opakování – práce a kinetická energie	49
8	Potenciální energie, zákon zachování energie	53
8.1	Potenciální energie	53
8.2	Výklad – křivkový integrál prvního druhu	55
8.3	Cvičení – křivkový integrál 1.druhu	63
8.4	Výklad – křivkový integrál 2. druhu – orientovaný	64
8.5	Cvičení – křivkový integrál 2. druhu – orientovaný	71
8.6	Nezávislost práce konzervativních sil na trajektorii. Výpočet hodnot potenciální energie.	71
8.7	Zákon zachování mechanické energie	79
8.8	Interpretace křivky potenciální energie	84
8.9	Práce vnějších a nekonzervativních sil	87
8.10	Zákon zachování energie	90
8.11	Hmotnost a energie	93
8.12	Kvantování energie	95
8.13	Otázky k opakování – Potenciální energie, zákon zachování energie	96

Místo úvodu

Důraz je kladen na podstatu fyzikálních jevů a na odvozování zákonitostí, na užití matematického aparátu v co největší možné šíři. ... Žák je veden k tomu, aby zejména chápal, že přírodní jevy mají fyzikální příčiny, rozuměl různým typům fyzikálních dějů, uměl tyto znalosti aplikovat, využíval matematický aparát pro odvození jednoduchých fyzikálních vztahů, ...

ŠVP pro předmět fyzika na gymnáziu Jevíčko

Vedeme žáky k systematické práci při matematizaci reálných situací, ..., zadáváme žákům aplikační úlohy z praxe a vedeme tím žáky k pochopení významu matematiky v reálném životě.

ŠVP pro předmět matematika na gymnáziu Jevíčko

Na základě předchozích citátů ze školního vzdělávacího programu pro gymnázia mi dovozte navrhnout osnovu předmětu Matematika a fyzika pro první ročník vyučovaného jako jeden celek. Inspirováno pracovními listy v učebnici Matematika realisticky a Fyzika realisticky (online 2010: realisticky.cz), dále řada fyzikálních příkladů je inspirována učebnicí Halliday, Resnick, Walker (2000), tzv. HRW. Další inspirací byla série učebnic Matematika pro gymnázia a části některých vysokoškolských materiálů, jejich výčet v přehledu literatury zatím není úplný.

1. **Kapitola 1: Fyzikální jednotky.** Základní fyzikální jednotky (metr, čas, kilogram) a jednotky; menší či větší části těchto jednotek. Převod minut na hodiny a naopak, převod rychlosti v metrech za sekundu na kilometry za hodinu a naopak. Tabulka převodů řádů jednotek. Závěr: pro předávání poznatků měření musíme vždy říci, a) jakou veličinu měříme, b) kolik jednotek této veličiny jsme naměřili.
2. Cvičení na převody jednotek podle sbírky: samostatná práce. Za domácí úkol: propočítat část příkladů ze sbírky. Pokus: hustota a vazkost vody a oleje. Závěr: při převádění složených jednotek převedem postupně každou z dílčích jednotek.
3. **Kapitola 2: Přímočarý pohyb hmotného bodu.** Funkce představuje vztah mezi dvěma veličinami, kdy k jedné hodnotě veličiny x je přiřazena nejvýše jedna hodnota veličiny y . Takový vztah mezi dvěma veličinami lze znázornit do grafu v pravoúhlé soustavě souřadnic v rovině. Příkladem je pohyb po přímce: poloha x tělesa u přímočarého pohybu v závislosti na čase t . Definiční obor funkce, obor funkčních hodnot. Závěr: graf funkce nám ukazuje cestu od čísel na ose t (definiční obor) k číslům na ose x (obor hodnot).
4. Kreslení grafů funkce různých vlastností. Závěr: graf funkce nesmí obsahovat dva body nad sebou.
5. Průměrná rychlost při pohybu králíka ve směru svislé osy x v závislosti na čase t . Označení Δt , Δx , grafické určení průměrné rychlosti pomocí přímky procházející

počáteční a koncovou polohou grafu funkce polohy x v závislosti na čase t . Příklady 1,2: průměrná rychlost řidiče nejprve jedoucího, pak jdoucího pěšky (příklady kreslíme i graficky, je z nich vidět vztah mezi rychlostmi v jednotlivých částech.

6. Kreslení grafů lineární funkce. Nalezení významu konstant a, b v lineární funkci $y = ax + b$.
7. Lineární funkce – nalezněte předpis pro grafy funkcí nakreslených na obrázku (studenti poprvé sestavují předpis na základě obrázku).
8. funkce absolutní hodnota
9. kreslení grafů funkce – metoda posunutí (kombinace lineární funkce a absolutní hodnoty)
10. kreslení grafů funkce – metoda posunutí II (kombinace lineární funkce a absolutní hodnoty)
11. kreslení grafů funkce – metoda rozdělení na intervaly (kombinace lineární funkce a absolutní hodnoty)
12. kreslení grafů funkce – metoda rozdělení na intervaly II (kombinace lineární funkce a absolutní hodnoty)
13. průměrná rychlost přímočarého pohybu je tangens jistého úhlu sečny (= směrnice sečny = sklon sečny) ke grafu funkce polohy v závislosti na čase; tabulka goniometrických funkcí základních hodnot ostrého úhlu (z Pythagorovy věty pro úhel 45° při úhlopříčce čtverce, pro úhly 30° a 60° při vrcholu a výšce rovnoramenného trojúhelníku. Výpočet jedné strany pravoúhlého trojúhelníku na základě znalosti jednoho úhlu a jiné strany.
14. Příklady na užití goniometrických funkcí ostrého úhlu
15. průměrná rychlost – fyzikální příklady
16. okamžitá rychlost: motivační hodina, okamžitá rychlost se vypočte z průměrné rychlosti limitním procesem při zkracování intervalu, na kterém průměrnou rychlost počítáme; okamžitá rychlost jako derivace = směrnice tečny (= sklon tečny) ke grafu funkce; derivace funkce $x(t)$ v bodě t_0 je tedy limita z jistého výrazu;

$$v(t) = x'(t).$$

17. proces derivování v různých bodech zanášíme do grafu, dostaneme zase funkci; výpočet derivace některých funkcí z definice (pomocí limity) – základní vzorce pro derivování (pouze u polynomů a funkcí goniometrických), derivace součinu a podílu funkcí
18. cvičení – výpočet derivace funkcí podle vzorců, derivace součinu a podílu funkcí; sestavení rovnice tečny ke grafu funkce v jistém jeho bodě

19. cvičení – derivace složené funkce, příklady na procvičení; fyzikální procvičení: známe polohu $x(t)$, máme spočítat funkci udávající okamžitou rychlost v okamžiku t
20. popis pohybu kabiny výtahu – určitý integrál ve vztahu výpočtu polohy tělesa na základě funkce jeho rychlosti; Odvození určitého integrálu jako limity z jistého součtu obsahů u podgrafu spojité funkce. Vzorec

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Newton-Leibnizova formule vztahu mezi určitým integrálem a procesem integrování (= inverzním procesem k derivování).

21. cvičení na výpočet určitého integrálu z rychlosti (= změny polohy) – graficky (HRW, oddíl 2.4), pomocí vzorců pro derivování a užitím Newton-Leibnizovy formule (výpočet jen zmínit, bude procvičeno více při dalším návratu k integrálům později; nyní byl důraz na derivování).
22. průměrné zrychlení a a okamžité zrychlení $a(t)$ přímočarého pohybu – směrnice sečny a směrnice tečny ke grafu funkce $v(t)$: vzorec

$$a(t) = v'(t), \quad v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt.$$

23. Zrychlení – fyzikální příklady: př. 4: kabina výtahu ... grafy funkcí $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$; příklad 6: dragster versus raketové saně; tíhové zrychlení; př. 7: výpočet rychlosti a zrychlení z funkce polohy;
24. Zrychlení – fyzikální příklady II: HRW, kapit. 2.5.
25. rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb – klasické odvození vzorců
26. rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb – odvození vzorců na základě diferenciálního a integrálního počtu
27. příklad na rovnoměrně zpomalený pohyb – brzdná dráha auta
28. rovnoměrně zrychlený pohyb – procvičení (HRW)
29. rovnoměrně zrychlený pohyb – procvičení II (HRW)
30. volný pád a svislý vrh: příklady 9 (opravář pustil klíče z šestého patra), 10 (chytání míčku puštěného z letadla), 11 (vyhození míčku svisle vzhůru)
31. volný pád a svislý vrh: cvičení I
32. volný pád a svislý vrh: cvičení II
33. opakování celku 02 (přímocharý pohyb): zkoušení teoretické

-
34. opakování celku 02 (přímočarý pohyb): větší písemka praktická
 35. **Kapitola 3: Vektory a některá jejich využití.** vektorové veličiny: úvod a motivace (jsou určeny velikostí a směrem ... např. posunutí, rychlost, síla): Př. 12: pohyb v jeskynním systému (tangens úhlu, Pythagorova věta pro výpočet velikosti přepony pravoúhlého troj.); arctg úhlu ... práce s kalkulačkou (zatím jen zapnutí funkce DEG)
 36. sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem – pouze graficky – prezentace (součet, asociativní zákon, nulový vektor, opačný vektor)
 37. sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem – pouze graficky 2 – cvičení (příklady z učebnice Matematika pro gymnázia – analytická geometrie, str. 36);
 38. rozklad vektoru na součet dvou vektorů graficky (fyzikální motivace: rozklad síly na součet dvou složek, jedna z nich je kolmá na směr posunutí, druhá působí práci při posunutí tělesa ve směru vektoru \vec{s}); příklad 14: start letadla, úhel, vzdálenost od letiště, rozklad polohového vektoru na součet; HRW oddíl 3.3: složky vektoru graficky – cvičení.
 39. Stupňová a oblouková míra úhlu, orientace úhlu, základní velikost úhlu; rozšíření goniometrických funkcí z ostrého úhlu na libovolný úhel pomocí oblouku délky x ; převod radiánů na stupně a naopak (význačné úhly i obecně); grafy a vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$.
 40. cvičení – převod radiánů na stupně a naopak; orientace úhlu základní velikost úhlu; Matematika pro gymnázia – goniometrie, str. 40, př. 2.30: grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, provnání funkčních hodnot na základě grafu; vlastnosti funkcí sinus a kosinus.
 41. výpočet hodnot sinus a kosinus význačných úhlů pomocí jednotkové kružnice (tabulka význačných úhlů a význačných hodnot); řešení jednoduchých goniometrických rovnic pomocí jednotkové kružnice
 42. cvičení k předchozímu – výpočet hodnot sinus a kosinus význačných úhlů pomocí jednotkové kružnice (tabulka význačných úhlů a význačných hodnot); řešení jednoduchých goniometrických rovnic pomocí jednotkové kružnice
 43. periodická funkce
 44. sudá a lichá funkce
 45. grafy a vlastnosti funkcí $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$; tabulka význačných hodnot ve význačných úhlech doplněna o tyto funkce
 46. cvičení – grafy a vlastnosti funkcí $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$
 47. souřadnice vektoru, rozklad vektoru na složky v souřadnicích (= algebraicky); jednotkové vektory ve směru souřadných os; velikost vektoru pomocí souřadnic (z Pythagorovy věty v dimenzi 2 i 3);

48. sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem – pomocí souřadnic; př.15: vyjádřete grafické skládání vektorů pro soutěžní trasu pomocí souřadnic;
49. cvičení k předchozímu: Matematika pro gymnázia – analytická geometrie, str. 15-19 (vytvoření vektoru, velikost vektoru, střed úsečky); HRW: sčítání vektorů algebraicky;
50. Definice skalárního součinu dvou nenulových vektorů pomocí úhlu, který svírají; aplikace: výpočet mechanické práce při posunu tělesa působením síly \vec{F} ve směru posunutí \vec{s} ;
51. cvičení: skalární součin nenulových vektorů (Matematika pro gymnázia – analytická geometrie, str.49), výpočet mechanické práce (HRW, skalární součin + příklad na výpočet práce)
52. Výpočet skalárního součinu pomocí souřadnic: odvození vzorce na základě jednotkové báze navzájem kolmých vektorů \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ; pozn.: tento druhý způsob výpočtu skalárního součinu je obecnější v tom, že některý nebo oba z vektorů vstupujících do operace součinu může být nulový
53. vektorový součin vektorů – aplikace: moment síly vzhledem k ose otáčení; nejprve vzorec pro vektorový součin dvou nenulových vektorů pomocí úhlu, který svírají
54. vektorový součin vektorů – výpočet pomocí souřadnic (determinant, Sarussovo pravidlo); příklad 18: výpočet skalárního a vektorového součinu dvou zadaných vektorů, včetně obrázku; příklad 19: výpočet vektorového součinu pomocí souřadnic
55. cvičení – vektorový součin vektorů (Matematika pro gymnázia – analytická geometrie, str. 60; HRW, výpočet vektorového součinu + příklad na výpočet momentu síly vzhledem k ose otáčení); v rámci cvičení je obsažen vzorec pro význam vektorového součinu jako obsahu rovnoběžníku, tj. jako důsledek obsah trojúhelníku jako polovina předchozího obsahu pomocí vzorce $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$)
56. Trojúhelník – obsah trojúhelníka různými způsoby
57. opakování celku 03 (vektory a některá jejich využití) – teoretické otázky;
58. opakování celku 03 – větší písemka praktická
59. **Kapitola 4: Pohyb hmotného bodu v rovině a prostoru.** Polohový vektor $\vec{r}(t)$ v časovém okamžiku t ; posunutí $\Delta\vec{r}(t)$, trajektorie
60. parametrické a obecné vyjádření přímky v rovině a prostoru (Matematika pro gymnázia – analytická geometrie, str. 63,64,67,74);
61. průměrná a okamžitá rychlost pohybu hmotného bodu v prostoru jako vektorové veličiny; situace je vektorovým zobecněním případu pohybu po přímce z kapitoly 2;

62. průměrná a okamžitá rychlost pohybu v prostoru – cvičení (HRW); spojením matematiky a fyziky je cílový příklad: napište rovnici tečny ke trajektorii pohybu v bodě $\vec{r}(t_0)$;
63. průměrné a okamžité zrychlení při pohybu v prostoru; příklad 21: pohyb králíka v rovině, určení směru polohového vektoru pomocí funkce $\arctg \frac{y}{x}$
64. cvičení – průměrné a okamžité zrychlení (HRW)
65. šikmý vrh – aplikace vektorového počtu, rozklad vektoru rychlosti do rovnoběžného a svislého směru (obrázky)
66. šikmý vrh – matematický popis (rozepsání vektoru trajektorie do souřadnic)
67. parabola – funkce popisující trajektorii šikmého vrhu: kreslení grafů kvadratické funkce (posuny ze základní polohy, doplnění na čtverec), hledání vrcholu paraboly dvěma metodami (doplněním na čtverec a derivací kvadratické funkce)
68. cvičení: parabola – kreslení grafu funkce (Matematika pro gymnázia – funkce, str. 67 a 70)
69. součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° ; podobnost trojúhelníků;
70. podobnost trojúhelníků – cvičení (podobnost trojúhelníků bude potřeba v následující hodině při odvození součtových vzorců $\cos(\alpha + \beta) = \dots$)
71. odvození doletu při výstřelu koule z děla – využití součtových vzorců; odvození vzorce $\cos(\alpha + \beta) = \dots$, $\sin(\alpha + \beta) = \dots$ (viz Odvárko, Goniometrické funkce) rozdělené do dílčích úkolů Například: a) z podobnosti trojúhelníků odvoďte vztah pro délku d z obrázku; b) dosadte do vztahu

$$\cos \alpha = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta - d}$$

za délku d a vyjádřete pak hodnotu $\cos(\alpha + \beta)$. Později (při probírání extrémů funkce) lze ještě řešit extrémální úlohu pro neupravený vzorec

$$R = \frac{2\|\vec{v}_0\|^2 \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0}{g}$$

a neupravovat jej do tvaru $R = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 \cdot \sin(2\theta_0)}{g}$. Vzhledem k tomu, že už nyní je údaj o maximálním doletu koule velmi zajímavý, bude asi použití součtových vzorců nyní velmi užitečné pro konkrétní příklady.

72. poznámka o odporu prostředí při výstřelu koule z děla; další příklady na šikmý vrh – prezentace; příklad 24: letoun háže záchranný vak
73. další příklady na šikmý vrh – prezentace 02: příklad 25 (přeskok na sousední dům při filmové honičce), příklad 26 (výstřel z děla z pirátské lodi (několik úkolů));

74. šikmý vrh – cvičení 01 (např. HRW)
75. šikmý vrh – cvičení 02
76. šikmý vrh – cvičení 03
77. rovnoměrný pohyb po kružnici – délka oblouku při různých poloměrech; určení obvodu kružnice poloměru r ; popis rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici: obrázek
78. rovnoměrný pohyb po kružnici – velikost a směr vektoru zrychlení
79. odvození limity výrazu $\frac{\sin \theta}{\theta}$ pro θ jdoucí k nule – několika způsoby, také podle l'Hospitalova pravidla
80. rovnoměrný pohyb po kružnici – prezentace příkladu (auto v zatáčce)
81. cvičení – rovnoměrný pohyb po kružnici
82. cvičení – výpočet limit funkcí (Matematika pro gymnázia, diferenciální a integrální počet, str. 80-81)
83. cvičení – výpočet limit funkcí 2 (i pomocí l'Hospitalova pravidla)
84. vzájemný pohyb vzhledem k různým vztažným soustavám – pohyb po přímce
85. vzájemný pohyb vzhledem k různým vztažným soustavám – pohyb v rovině
86. vzájemný pohyb vzhledem k různým vztažným soustavám – pohyb při vysokých rychlostech
87. vzájemný pohyb v jiných vztažných soustavách – cvičení
88. opakování celku 04 (pohyb hmotného bodu v rovině a prostoru) – teoretické otázky
89. opakování celku 04 (pohyb hmotného bodu v rovině a prostoru – větší praktická písemka)
90. **Kapitola 5: Síla a pohyb – Newtonovy zákony (zatím není uvažováno tření).** Úvod do Newtonovské mechaniky, volná částice, čím je způsobeno zrychlení, první Newtonův zákon
91. Inerciální vztažná soustava, definice jednotky 1 Newton, výslednice sil, vztah mezi silou a zrychlením, jednotka hmotnosti 1 kg.
92. cvičení – výslednice sil, vztah mezi silou a zrychlením (HRW, oddíl 5.3)
93. Druhý Newtonův zákon ve vektorovém tvaru, tentýž vztah rozepsaný do složek vektorů, příklad 35 (tažení saní), příklad 36 (přetahování o pneumatiku – výslednice tří sil); příklad 37 (je známý směr výslednice tří sil, neznámá je jedna ze sil, tu máme určit (její velikost i směr).

-
94. cvičení – druhý Newtonův zákon (HRW 5C, 7C, 9C, 11Ú)
 95. Některé typy sil (rychlý přehled): tíhová síla, kolmá tlaková síla podložky, třecí síla, tahová síla; příklad 38: tahová síla jako výslednice sil tíhové, tlakové a síly tažného jedince pod určitým úhlem k vodorovnému směru.
 96. Cvičení – některé typy sil (HRW 13C, 15C, 17C)
 97. Třetí Newtonův zákon
 98. příklady na Newtonovy zákony – Příklad 39 (klouzající kostka, kladka, zavěšená kostka); příklad 40 (kostka tlačena tyčkou vodorovně bez tření);
 99. příklady na Newtonovy zákony – Příklad 41 (kostka zavěšená na třech vláknech – výslednice sil); příklad 42 (kostka na nakloněné rovině upevněná na vláknech); příklad 43 (kostka se utrhne, určete její zrychlení)
 100. příklady na Newtonovy zákony – Příklad 44 (dvě kostky zavěšené na kladce); příklad 45 (nášlapná váha ve výtahu);
 101. cvičení – příklady na Newtonovy zákony 01
 102. cvičení – příklady na Newtonovy zákony 02
 103. cvičení – příklady na Newtonovy zákony 03
 104. opakování celku 05 (Newtonovy zákony) – teoretické otázky
 105. opakování celku 05 (Newtonovy zákony) – větší praktická písemka
 106. **Kapitola 6: Síla a pohyb – tření, dostředivá síla.** statická a dynamická třecí síla, vlastnosti sil tření; příklad 46 (mince na nakloněné rovině začne klouzat při úhlu 13° , určete koeficient statického tření), příklad 47 (zablokují se kola automobilu a ten klouže po silnici).
 107. síla a pohyb s třením – příklady: příklad 48 (sáně na sněhu), příklad 49 (kladka, nakloněná rovina s třením)
 108. cvičení – síla a pohyb s třením 01
 109. cvičení – síla a pohyb s třením 02
 110. cvičení – síla a pohyb s třením 03
 111. Odporová síla a mezní rychlost při volném pádu – padající kočka ze 32. patra (příklad 50), dešťová kapka (příklad 51)
 112. cvičení – odporová síla a mezní rychlost
 113. Rovnoměrný pohyb po kružnici 2 – dostředivá síla a tření; kosmická loď s kosmonautem (příklad 52), spirála smrti během cirkusového představení (příklad 53)

114. dostředivá síla a tření – příklad 54 (kuželové kyvadlo), příklad 55 (smyk auta v zatáčce a koeficient statického tření)
115. dostředivá síla a tření – příklad 56 (projíždění klopené zatáčky), příklad 57 (jízda na rotorovém válci v zábavním parku)
116. cvičení – dostředivá síla a tření (pohyb po kružnici) 01
117. cvičení – dostředivá síla a tření (pohyb po kružnici) 02
118. opakování celku 06 (síla a tření) – teoretické otázky
119. opakování celku 06 (síla a tření) – větší praktická písemka
120. **Kapitola 7: Kinetická energie hmotného bodu.** Jednotka kinetické energie (1 Joule); kinetická energie dvou rozjetých lokomotiv těsně před srážkou (příklad 58); práce jako změna kinetické energie tělesa ve směru posunutí se vypočte jako skalární součin síly a posunutí
121. Vykonaná práce – příklady: zločinci posunují sejf (příklad 59), pokus o zabrždění rozjetého vozíku (příklad 60)
122. cvičení – práce a kinetická energie
123. cvičení – práce a kinetická energie 02
124. práce tíhové síly – vzorce, zvedání činky (příklad 61); bedna vytahovaná na laně po hladké nakloněné rampě (příklad 62)
125. práce tíhové síly – kabina výtahu (příklad 63)
126. práce tíhové síly – cvičení
127. práce proměnné síly – určitý integrál podruhé, výpočet práce při působení proměnné síly; příklad 70 (proměnná síla působící při brždění klouzajícího hranolu)
128. práce proměnné síly – fyzikální cvičení (HRW, příklady 21C, 23C, 25Ú)
129. lineárně lomená funkce
130. lineárně lomená funkce – kreslení grafu
131. inverzní funkce – k lineární funkci, k funkci $y = x^2$ (odmocnina)
132. motivace logaritmické funkce $\ln x$ jako určitého integrálu z funkce $\frac{1}{x}$, k ní inverzní exponenciální funkce; grafy a vlastnosti funkce $y = \ln x$, $y = e^x$; integrační a derivační vzorce pro funkce $y = \ln x$, $y = e^x$;
133. vlastnosti exponenciální funkce $y = a^x$; pravidla pro mocniny; grafy funkcí $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, porovnávání funkčních hodnot na základě grafu;

-
134. cvičení – exponenciální funkce
 135. vlastnosti logaritmické funkce $\log_a x$; grafy funkcí $y = \log_5 x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$, porovnávání funkčních hodnot na základě grafu
 136. pravidla pro logaritmy, jednoduché vztahy s logaritmy; logaritmické a exponenciální rovnice (příklad 67)
 137. cvičení – logaritmické funkce
 138. cvičení – logaritmické funkce 02
 139. cvičení – logaritmické či exponenciální rovnice; včetně příkladů „ze života“ (vyučující Irena, Boskovice: 1 m² rybníka s plochou 50 m² je zarostlý sinicemi; plocha zarostlá sinicemi se každý den zdvojnásobí; za jak dlouho sinicemi zaroste celá plocha rybníka?)
 140. integrační metody – pomocí vzorce
 141. integrační metody – integrace „per partes“
 142. integrační metody – substituce
 143. aplikace neurčitého integrálu – model úbytku populace (= model úbytku radioaktivní látky) ... řešení diferenciálních rovnic; práce s výsledkem: určení poločasu rozpadu, určování stáří dřeva
 144. aplikace neurčitého integrálu – model míchání solného roztoku
 145. cvičení – řešení diferenciálních rovnic (obyčejné diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými)
 146. prezentace řešení lineární ODR prvního řádu metodou variace konstanty
 147. cvičení – lineární ODR metodou variace konstanty 1
 148. cvičení – lineární ODR metodou variace konstanty 2
 149. neurčitý integrál, diferenciální rovnice – větší písemka
 150. výpočet určitého integrálu – Matematika pro gymnázia, Diferenciální a integrální počet, str. 156-př. 11, str. 157-př. 12
 151. výpočet určitého integrálu – substituce a per partes pro určitý integrál
 152. výpočet určitého integrálu – cvičení
 153. výpočet obsahu plochy pomocí určitého integrálu
 154. výpočet obsahu plochy pomocí určitého integrálu – cvičení

155. objem rotačního tělesa pomocí určitého integrálu – odvození vzorce, př. 6.20 ze strany 178 (Diferenciální počet – matematika pro gymnázia)
156. objem rotačního tělesa – cvičení
157. určitý integrál a jeho aplikace – praktická větší písemka
158. aplikace integrálu při určení práce pružné síly pomocí Hookeova zákona
159. práce pružné síly – příklad 68 (protažení pružiny a síly), příklad 69 (klouzající kostka narazí na volný konec pružiny a stlačuje ji)
160. práce pružných sil – cvičení
161. průměrný a okamžitý výkon, jednotka výkonu (watt); další vzorce pro výkon užitím diferenciálního počtu pro posunutí $x(t)$; výkon při působení sil na krabici (příklad 71)
162. výkon – cvičení
163. kapitola 7 – práce a kinetická energie – teoretické opakování
164. kapitola 7 – práce a kinetická energie – praktická větší písemka
165. **Kapitola 8: Potenciální energie, zákon zachování energie mechanické soustavy.** Potenciální energie soustavy objektů, konzervativní a nekonzervativní síly
166. parametrické vyjádření funkce, přímky, úsečky, kružnice; typy křivek (jednoduché, ukončené, hladké, po částech hladké); neorientovaný křivkový integrál = křivkový integrál 1.druhu ... odvození (aplikace: např. délka křivky);
167. křivkový integrál 1.druhu přes jeden závit šroubovice (příklad 73) a obvod trojúhelníka (příklad 74)
168. křivkový integrál 1. druhu – cvičení
169. vnější a vnitřní orientace křivky (příklad 75), orientovaný křivkový integrál = křivkový integrál 2.druhu (motivace: výpočet práce při přemístění částice po křivce \vec{l} silou \vec{F} ... odvození)
170. křivkový integrál 2. druhu přes jeden závit šroubovice na kuželové ploše (příklad 77) a přes obvod trojúhelníka v rovině (příklad 76)
171. křivkový integrál 2. druhu – cvičení
172. křivkový integrál – větší praktická písemka
173. nezávislost práce konzervativních sil na trajektorii, výpočet hodnot potenciální energie: příklad 78 (balíček klouže po skluzavce)

-
174. tíhová potenciální energie; pružná potenciální energie; příklad 79: Lenochoď spadne z větve na zem
 175. cvičení – výpočet hodnot potenciální energie
 176. zákon zachování mechanické energie: příklad 80 (dítě na skluzavce), příklad 81 (pružina ve vzduchovce)
 177. zákon zachování mechanické energie: příklad 82 (bungee jumping)
 178. zákon zachování mechanické energie – cvičení 01
 179. zákon zachování mechanické energie – cvičení 02
 180. interpretace křivky potenciální energie
 181. práce nekonzervativních a vnějších sil: příklad 83 (robot je vytahován na laně po šikmé ploše sopečného kráteru)
 182. práce nekonzervativních vnějších sil – cvičení
 183. zákon zachování vnější i vnitřní energie: příklad 84 (puďl na skluzavce), příklad 85 (ocelová kulka je střelena do země a zaryje se do písku)
 184. zákon zachování vnější i vnitřní energie – cvičení
 185. kapitola 8 – potenciální energie, zákon zachování energie – teoretické otázky
 186. kapitola 8 – potenciální energie, zákon zachování energie – větší praktická písemka

1 Převody fyzikálních jednotek

Probráno v předmětu FYMA 1 – jen krátká zmínka o základních principech převádění jednotek.

2 Pohyb hmotného bodu po přímce

Probráno v předmětu FYMA 1 – pohybové a polohové rovnice odvozeny jak na základě průměrné rychlosti a průměrného zrychlení, tak na základě diferenciálního počtu (vztahy $v(t) = x'(t)$ a $a(t) = v'(t) = x''(t)$) a Newton-Leibnizovy formule. Základní funkce goniometrické ostrého úhlu, funkce lineární a některé vlastnosti funkcí.

3 Vektory a některá jejich využití

Probráno v předmětu FYMA 1 – vektory probrány graficky i na základě souřadnic, rozklad vektoru na součet složek je důležitý pro pojmy skalárního součinu vektorů (využití: výpočet mechanické práce při přemístění tělesa silou \vec{F} ve směru posunutí \vec{s}) a vektorového součinu vektorů (využití: výpočet momentu síly vzhledem k ose otáčení). Goniometrické funkce rozšířeny na celou reálnou osu s využitím jednotkové kružnice (stupňová i oblouková míra).

4 Pohyb hmotného bodu v rovině a prostoru

Probráno v předmětu FYMA 1 – pojmy a postupy v případě jedné dimenze (kapitola 2) zobecněny na případ roviny nebo prostoru. Kromě stěžejních kapitol o šikmém vrhu a pohybu po kružnici ještě pár poznámek o vzájemném pohybu v různých vztažných soustavách. Vlastnosti kvadratické funkce a kreslení grafu kvadratické funkce, parametrické rovnice přímky a křivky v rovině a prostoru. Poznámky o limitách, včetně l'Hospitalova pravidla. Vzorce pro kosinu a sinus součtu dvou úhlů.

5 Síla a pohyb – Newtonovy zákony

Probráno v předmětu FYMA 1 – Newtonovy pohybové zákony představeny v rámci různých typů sil, které na tělesa působí. Zatím není uvažováno tření a odporová síla (např. odpor vzduchu).

6 Síla a pohyb – tření, dostředivá síla

Probráno v předmětu FYMA 1 – situace podobné předchozí kapitole, ovšem tření a odpor vzduchu (a dalších prostředí) je brán v úvahu!!!

7 Kinetická energie při pohybu hmotného bodu

Touto kapitolou začíná vlastní předmět FYMA 2. Při odvození mechanické práce za proměnné síly je probrán určitý integrál. Dále je představena funkce $y = \ln x$ jako funkce vzniklá při integraci nepřímé úměrnosti $y = \frac{1}{x}$, a funkce k ní inverzní $y = e^x$ – exponenciální a logaritmické funkce a jejich vlastnosti. Tedy logaritmická funkce se objevuje jako řešení jistých jednoduchých diferenciálních rovnic, při integraci elementárních funkcí!! Určitý integrál se dále používá pro výpočet obsahu plochy a objemu rotačního tělesa. Aplikací integrálního počtu je odvození vzorce pro výpočet práce pružné síly. Výkon, další vzorce pro výkon vznikají z diferenciálního počtu, pokud posunutí, vzhledem k němuž práce probíhá, je dáno funkcí $x(t)$.

Na Olympijských hrách v roce 1976 zvedl Vasilij Aleksejev činku o váze 2500 N ($\doteq \frac{2500}{9,80665} \doteq 255$ kg) z podlahy nad hlavu do výšky 2 m. Téměř o 20 let dříve (kolem roku 1960) se Paul Anderson sehnul pod nákladní plošinu ze dřeva vyztuženého ocelí, opřel si ruce o stoličku a zády nadzvedl plošinu i s nákladem (celkem 27900 N $\doteq 2845$ kg) o jeden centimetr. Je možné oba tyto výkony nějak porovnat?

7.1 Kinetická energie

Slovo „energie“ užíváme v běžné řeči, ale fyzikálně je není jednoduché definovat. Jednoduše řečeno, ve fyzikální významu, **energie** je skalární veličina, která charakterizuje stav tělesa nebo částice.

V celé této kapitole se budeme zabývat pojmem **kinetická energie** = skalární veličina, která charakterizuje pohybový stav částice nebo tělesa.

Kinetickou energii E_k částice o hmotnosti m , která se pohybuje rychlostí \vec{v} velmi malou ve srovnání s rychlostí světla, vyjadřujeme (definujeme) vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (7.1)$$

(a $E_k \geq 0$, protože vždy $m \geq 0$, $v^2 \geq 0$). Stejný vzorec lze užít pro kinetickou energii E_k tělesa nezanedbatelných rozměrů, pokud všechny jeho části se pohybují stejnou rychlostí (tzv. posuvný = translační pohyb); těleso nesmí rotovat ani se deformovat.

Jednotkou kinetické energie je **J = joule**¹, pojmenovaný podle anglického vědce 18. století (James Prescott Joule):

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \quad (7.2)$$

(tj. kinetickou energii 1 J má těleso o hmotnosti 1 kg, které se právě pohybuje rychlostí 1 ms⁻¹). V oblasti atomové fyziky jsou výsledky uváděny v elektronvoltech = eV:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (7.3)$$

¹Čti: džaul.

Příklad 7.1 Roku 1896 v Texasu provedli neobvyklý experiment – postavili dvě lokomotivy na opačné konce trati dlouhé 6,4 km proti sobě a pustili je plnou parou (obě se zrychlením $0,26 \text{ ms}^{-2}$, každá vážila $1,2 \cdot 10^6 \text{ N}$) proti sobě. Náraz sledovalo asi 30 000 lidí, několik z nich bylo smrtelně zraněno. Jaká byla celková kinetická energie obou lokomotiv těsně před srážkou?

Řešení: Každá z lokomotiv urazila 3,2 km, $v_0 = 0$. Dosaďme údaje do rovnic (2.11), (2.15) pro rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t & : & & v &= 0,26 \cdot t; \\ x &= x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 & : & & 3\,200 &= \frac{1}{2} \cdot 0,26 \cdot t^2 \end{aligned}$$

(při řešení těchto dvou rovnic o dvou neznámých vypočteme t ze druhé rovnice a dosadíme do první rovnice), dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{6\,400}{0,26}} \doteq 156,9 \Rightarrow v = 0,26 \cdot 156,9 \doteq 40,8 \text{ ms}^{-1}.$$

Dále potřebujeme znát hmotnost m – tu určíme ze vztahu $G = m \cdot g$:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \text{ N}}{9,80665 \text{ ms}^{-2}} \doteq 122\,366 \text{ kg}.$$

Celkem energie kinetická obou lokomotiv je rovna dvojnásobku E_k jedné lokomotivy, tj.

$$2 \cdot E_k = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 122\,366 \text{ kg} \cdot 40,8^2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \doteq 203,7 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Tato energie je ekvivalentní výbuchu asi 45 kg trinitrotoluenu (TNT).

7.2 Práce

Pokud těleso může nějakou energii získat nebo ztratit, dochází k přenosu energie (formou silového působení nebo tepelné výměny). Tepelnou výměnou se budeme zabývat později (kapitola 19), zde si všimneme přenosu energie vlivem silového působení.

Práce se definuje jako změna kinetické energie částice (nebo tělesa) působením vnější síly. Označujeme $W \dots$ z anglického work. Jiná definice říká, že práce je ta část kinetické energie, kterou těleso získává (nebo ztrácí) prostřednictvím silového působení jeho okolí.

Fyzikální pojem práce je tedy něco jiného než fyziologická námaha. Pokud působíme např. na stěnu silou, tak se namáháme, ale stěna se ani nepohne. Tj. na stěnu nebyla vykonána žádná práce (i když jsme se namáhali), protože její E_k se nezměnila.

7.3 Práce a kinetická energie

Vyjáďřeme nyní pojem práce rovnicí: vztah mezi prací a kinetickou energií lze psát ve tvaru

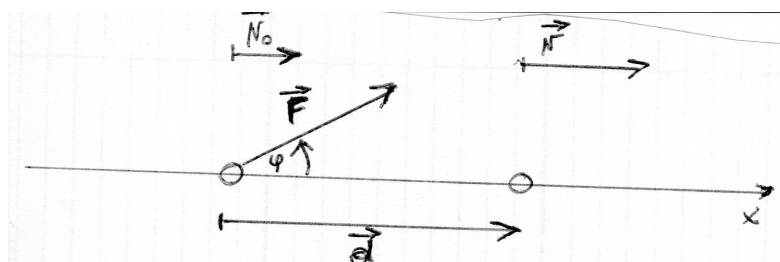
$$W = \Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i}, \quad (7.4)$$

kde $E_{k,i} = \frac{1}{2}mv_0^2$ je počáteční (= initial) kinetická energie, $E_{k,f} = \frac{1}{2}mv^2$ je koncová (= final) kinetická energie. Vzorec 7.4 lze přepsat do tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \quad (7.5)$$

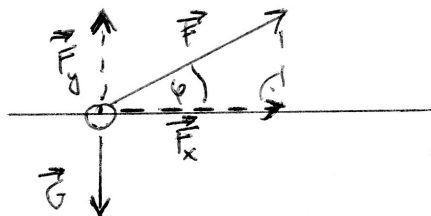
Pokud při práci (ve fyzikálním smyslu) dojde ke snížení rychlosti částice, říkáme, že působící síla práci spotřebovala ($W < 0$). Pokud ke zvýšení rychlosti, říkáme, že působící síla práci vykonala ($W > 0$). Pokud rychlost částice (tělesa) se nezmění, říkáme, že působící síla nevykonala na částici žádnou práci ($W = 0$).

Kontrola 1. Částice se pohybuje po ose x . Rozhodněte, zda se její kinetická energie sníží, zvýší, nebo zachová, změní-li se rychlost částice a) z -3 ms^{-1} na -2 ms^{-1} , b) z -2 ms^{-1} na $+2 \text{ ms}^{-1}$; c) pro každou z uvedených situací rozhodněte, zda je práce vykonaná na částici působícími silami kladná, záporná, nebo nulová.



Obr. 7.1: Působením síly \vec{F} se částice posune o vektor \vec{d} .

Odvoďme nyní vztah mezi prací vykonanou na částici a působící silou \vec{F} : necht' se například částice posune o vektor \vec{d} působením stálé síly \vec{F} – viz obrázek 7.1 – takže kinetická energie částice při posunutí vzrostla. Síla \vec{F} samozřejmě není jedinou silou, která na částici působí – jinak by se částice nepohybovala ve směru osy x , ale ve směru síly \vec{F} . Určitě kromě \vec{F} působí ještě tíhová síla \vec{G} (obr. 7.2):



Obr. 7.2: Rozklad sil působících na částici při jejím posunu o vektor \vec{d} .

Napíšeme-li pohybové rovnice (2.11), (2.15) pro posunutí délky d , dostaneme:

$$v = v_0 + a \cdot t;$$

$$d = x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2.$$

Umocněním obou stran první rovnice na druhou dostaneme

$$v^2 = v_0^2 + 2v_0at + a^2t^2 = v_0^2 + 2a(v_0t + \frac{1}{2}at^2),$$

a po dosazení druhé rovnice do pravé strany odvozeného vztahu obdržíme

$$v^2 = v_0^2 + 2ad. \quad (7.6)$$

Vynásobením vztahu 7.6 hmotností m částice máme $mv^2 - mv_0^2 = mad$ a vydělením této rovnosti dvěma

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = m \cdot a \cdot d. \quad (7.7)$$

Vztah 7.7 už na levé straně udává změnu W kinetické energie a na pravé straně se vyskytuje síla \vec{F}_x o velikosti $\|\vec{F}_x\| = m \cdot a$, a protože platí $\|\vec{F}_x\| = \|\vec{F}\| \cdot \cos \varphi$, celkem máme $m \cdot a = \|\vec{F}\| \cdot \cos \varphi$, a tedy dosazením do pravé strany vztahu 7.7 obdržíme pro práci konstantní síly

$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos \varphi, \quad (7.8)$$

kde φ je úhel mezi vektory \vec{F} a \vec{d} .

Dále můžeme říci, že pro $\varphi < 90^\circ$ kinetická energie částice roste ($W > 0$), pro $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ kinetická energie částice klesá ($W < 0$) a pro $\varphi = 90^\circ$ se síla \vec{F} nepodílí na práci ve směru posunutí \vec{d} , protože je kolmá na směr posunutí ($W = 0$).

Jednotkou práce je jeden Joule, v soustavě SI někdy také používáme jednotku Newtonkrát-metr, tj.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

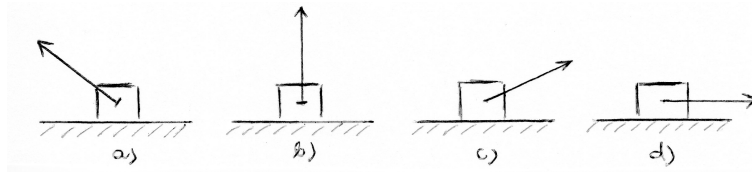
V britském systému jednotek je používána stopa-krát-libra, $1 \text{ J} = 0,738 \text{ ft} \cdot \text{lb}$.

Pravá strana vztahu (7.8) je přesně ve tvaru vzorce (3.15) ve 3. kapitole, tj. s využitím skalárního součinu vektorů můžeme vztah (7.8) psát jako (3.16): práci konstantní síly \vec{F} vykonanou při působení na částici ve směru konstantního vektoru \vec{d} lze spočítat jako $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (o něco později v této kapitole uvedeme i vzorec pro práci W při působení nekonstantní, proměnné síly \vec{F}).

Poznámka: Vztah práce a kinetické energie. Tato poznámka se týká vztahů (7.4), (7.5): počítat práci podle těchto vzorců jako změnu kinetické energie můžeme jen tehdy, pokud se jedná o částici nebo bodový objekt.

Například pokud tlačíme postel na kolečkách, část energie se spotřebuje na urychlení rotačního pohybu koleček – vzorce (7.4), (7.5) můžeme použít jen tehdy, když považujeme energii potřebnou na urychlování koleček za zanedbatelnou (když tuto energii zanedbáme, postel lze považovat za bodový objekt a můžeme užít (7.4), (7.5)).

Kontrola 2. Na obrázku 7.3 vidíte čtyři možnosti působení síly konstantní délky, ale různého směru na kostku, která klouže po dokonale hladké podložce směrem doprava. Uspořádejte obrázky podle vykonané práce – od největší práce po nejmenší práci.



Obr. 7.3: Příklady práce různých sil působících na těleso.

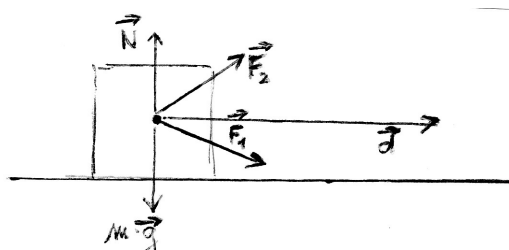
Pokud působí na bodový objekt několik sil současně, výslednou práci lze určit podle vztahu

$$W = \left(\sum_{j=1}^k \vec{F}_j \right) \cdot \vec{d} = \sum_{j=1}^k \vec{F}_j \cdot \vec{d} = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + \dots + \vec{F}_k \cdot \vec{d}, \quad (7.9)$$

protože výslednou sílu \vec{F} lze rozložit na součet jednotlivých sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$.

Příklad 7.2 Dva zločinci posunují bankomat vymlácený ze zdi (o hmotnosti 225 kg) k přistavenému nákladnímu autu po úsečce dlouhé 8,5 m (zpočátku byl bankomat v klidu). Zločinec 001 působí silou \vec{F}_1 o velikosti 12 N a směru, který svírá s vodorovným směrem posunutí úhel 30° a míří dolů. Zločinec 002 působí silou \vec{F}_2 o velikosti 10 N směrem vzhůru 40° od vodorovné roviny. Bankomat klouže bez tření (je zima, na zemi je led).

- Jak velkou celkovou práci vykonají oba zločinci při posunutí bankomatu o 8,5 m?
- Jakou práci W_g vykoná síla \vec{G} při tomtéž posunutí?
- Bankomat byl zpočátku v klidu. Jak velká je jeho rychlost na konci posunutí?



Obr. 7.4: Působení sil dvou zločinců v příkladu 7.2.

Řešení:

ad a) Podle vzorce (7.9) dostaneme

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} = \|\vec{F}_1\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos \varphi_1 + \|\vec{F}_2\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos \varphi_2 = \\ &= 12 \cdot 8,5 \cdot \cos 30^\circ + 10 \cdot 8,5 \cdot \cos 40^\circ \doteq 153,45 \text{ J.} \end{aligned}$$

ad b) Síly $m \cdot \vec{g}$ a \vec{N} jsou kolmé ke směru posunutí, tj. nekonají žádnou práci (neboť $\cos 90^\circ = 0$). Tedy $W_g = W_N = 0$ J.

ad c) Využijeme vztahu (7.4), potažmo (7.7), pro počáteční rychlost $v_0 = 0$:

$$153,45 \text{ J} = W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2,$$

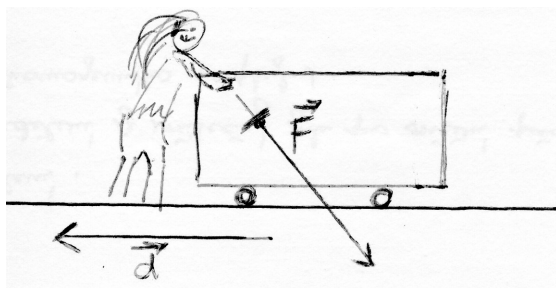
a tedy

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 153,45}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 153,45}{225}} \doteq 1,17 \text{ ms}^{-1}.$$

Příklad 7.3 Ujíždějící vozík s bednami se rozjel z kopce a nyní jede po vodorovné zemi směrem k ženě, která se jej snaží zabrzdit silou $\vec{F} = 2N \cdot \vec{i} - 6N \cdot \vec{j}$ a ustupuje před ním – viz obrázek 7.5. Vozík s bednami se přitom posune o vektor $\vec{d} = -3 \cdot \vec{i}$. energii potřebnou na pohánění či brzdění koleček vozíku zanedbejte.

a) Jakou práci vykonala síla \vec{F} při posunutí \vec{d} ?

b) Jaká je kinetická energie vozíku s bednami, měla-li na začátku brzdění hodnotu 10 J?



Obr. 7.5: Žena brzdí rozjetý vozík v příkladu 7.3.

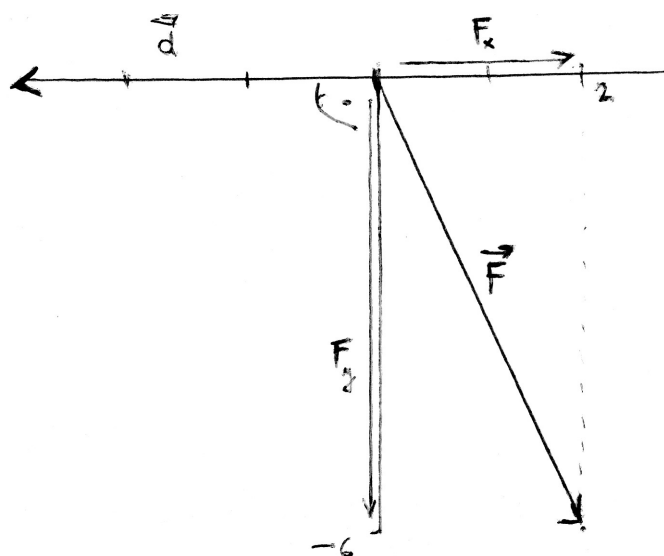
Řešení: Důležitá je pro nás pouze složka síly \vec{F}_x působící proti směru posunutí (viz obrázek 7.6); složka \vec{F}_y je kolmá na směr posunutí, proto na velikost práce nemá vliv, pokud zanedbáme tření koleček vozíku.

ad a) $W = \vec{d} \cdot \vec{F}_x = 3 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = -6J$. Práce má záporné znaménko, protože žena danou silou vozík brzdila (působila proti směru jeho pohybu).

ad b) Při zanedbání tření koleček uijeme vzorce 7.5: $E_{k,f} = E_{k,i} + W$. Dosazením do něj dostaneme

$$E_{k,f} = 10J - 6J = 4J.$$

Kinetická energie vozíku na konci posunutí je tedy 4J.



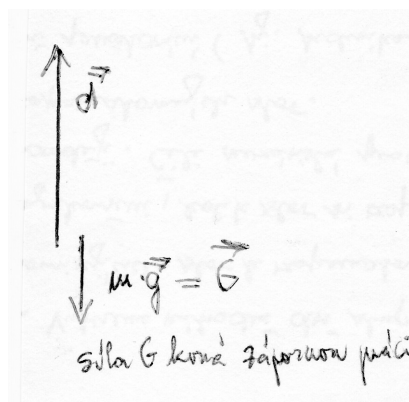
Obr. 7.6: Rozbor působících sil v př. 7.3.

7.4 Práce tíhové síly \vec{G}

Zabývejme se nyní chvíli situacemi, kdy jistou nenulovou práci koná tíhová síla $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$ (vzorec 5.6) při pohybu bodového objektu ve svislém či šikmém směru.

Kombinací vzorců (5.6) a (3.16) dostáváme vzorec pro práci tíhové síly

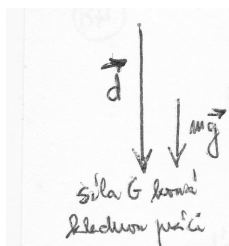
$$W_g = m \cdot g \cdot d \cdot \cos \varphi. \quad (7.10)$$



Obr. 7.7: Vrh svisle vzhůru.

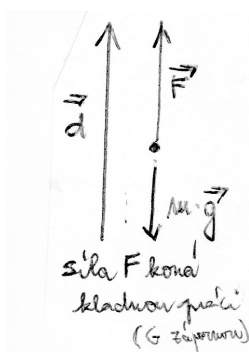
Když například vyhodíme rajče svisle vzhůru (obrázek 7.7), tak po určité chvíli jeho stoupání lze určit W_g , ta bude mít ovšem záporné znaménko, protože \vec{G} působí proti směru posunutí a snižuje kinetickou energii rajčete ($\varphi = 180^\circ$).

Pokud naopak rajče pustíme z okna šestipatrové budovy, za chvíli bude mít W_g kladné znaménko, protože \vec{d} a \vec{g} mají stejný směr.

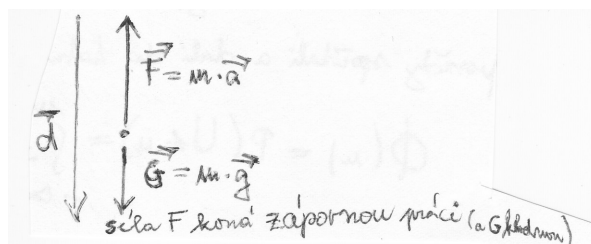


Obr. 7.8: Vrh svisle dolů.

Nyní do našich úvah přidejme sílu \vec{F} , kterou zvedáme těleso svisle vzhůru (obrázek 7.9), nebo kterou chytáme (zbrzdíme) padající těleso (obrázek 7.10).



Obr. 7.9: Zvedání tělesa.



Obr. 7.10: Brždění (chytání) padajícího tělesa.

Kombinací vzorců 7.4 a 7.9 pak dostáváme vztahy popisující tuto situaci:

$$W = \Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_g = \vec{F} \cdot \vec{d} + \vec{G} \cdot \vec{d}.$$

Důležité je v této chvíli označení

- W_a ... práce vykonaná silou \vec{F} ;
- W_g ... práce vykonaná silou \vec{G} .

Zajímavá je pro nás možná situace, kdy kinetická energie tělesa na začátku i na konci posunutí je nulová, tj. celková vykonaná práce je nulová:

$$W_a + W_g = 0 \quad (7.11)$$

(např. zejména tehdy, když těleso je na začátku pohybu i na konci pohybu v klidu); Třeba když rajče pustíme dolů s nulovou počáteční rychlostí a ono spadne na zem; nebo zvedneme knihu ze stolu a dáme ji do police nad stolem.

Když celková vykonaná práce je nulová, neznamená to, že např. člověk při zvedání knihy nevykoná žádnou práci – on vykoná práci W_a , která překonává působení síly \vec{G} . Pouze práce W_a W_g mají opačná znaménka, takže jejich součet je roven nule.

Kombinací vzorců 7.10, 7.11 dostáváme vztah pro práci W_a vykonanou působením síly \vec{F} v situaci, kdy kinetická energie tělesa na začátku i na konci posunutí je stále stejná:

$$W_a = -m \cdot g \cdot d \cdot \cos \varphi. \quad (7.12)$$

Je zajímavé, že vztah 7.12 platí, i když síla \vec{F} není konstantní, ale proměnná: Například když vzpěrač Vasilij Aleksejev zvedal nad hlavu rekordní činku o váze $2500N$, musela se jeho síla během tohoto úkonu výrazně měnit. Činka byla ovšem na začátku i na konci úkonu v klidu, takže celkovou práci vzpěrače lze určit ze vztahu 7.12.

Příklad 7.4 a) *Aleksejev zvedl činku o váze $2500N$ do výšky $2m$. Jakou práci přitom vykonala tíhová síla \vec{G} ?*

- b) *Jakou práci vykonala síla, kterou působil na činku Aleksejev?*
 c) *Jakou práci vykonala síla, kterou působil Aleksejev, když držel činku nad hlavou?*
 d) *Jakou práci vykonal Anderson, když zvedl třicet osob o celkové váze $27900N$ o $1cm$?*

Řešení:

ad a) Podle 7.10 máme

$$W_g = 2500N \cdot 2m \cdot \cos 180^\circ = -5000J.$$

ad b) Podle 7.11 $W_a = -W_g = +5000J$.

ad c) Pokud by Aleksejev dokázal držet činku naprosto nehybně, tak nekoná žádnou práci ($W_a = 0$); ovšem v nehybném stavu člověk držet činku nedokáže – ve skutečnosti činka trochu klesá a vychýlí se, a tak musí konat neustále práci, aby činku posunul ten kousek do její původní polohy. Proto je namáhavé i jen držet činku v poloze nad hlavou.

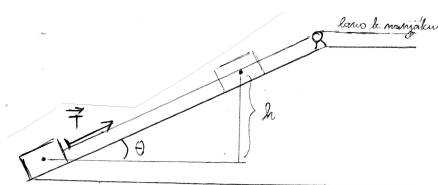
ad d) Anderson sice působil obrovskou silou, ale vykonal menší celkovou práci než Aleksejev:

$$W_a = 27900 \cdot 0,01 = 279J.$$

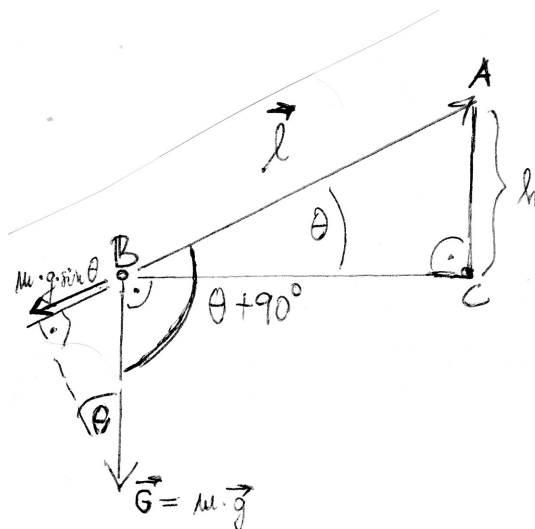
Příklad 7.5 a) *Bedna o hmotnosti $15kg$, která byla zpočátku v klidu, je vytahována po dokonale hladké rampě až do výšky $h = 2,5m$ nad zemí. Urazila přitom vzdálenost $l = 5,7m$ a pohyb tažného lana se zastavil. Jakou práci přitom vykonala tíhová síla?*

b) *Jakou práci vykonala tahová síla lana?*

Řešení:



Obr. 7.11: Bedna vytahovaná na rampě.



Obr. 7.12: Bedna na rampě – rozbor sil.

ad a) Užijeme vztah 7.10 pro úhel

$$\theta + 90^\circ = \arcsin \frac{2,5}{5,7} + 90^\circ \doteq 26^\circ + 90^\circ = 116^\circ.$$

Pak dostaneme

$$W_g = mgl \cdot \cos 116^\circ = 15\text{kg} \cdot 9,80665\text{ms}^{-2} \cdot 5,7\text{m} \cos 116^\circ = -368\text{J}$$

(tíhová síla zbrzdí pohyb bedny = koná zápornou práci).

ad a) **jinak:** Jiný způsob výpočtu: z obrázku 7.12 je patrný ještě jiný vzorec pro projekci vektoru \vec{G} do směru posunutí \vec{l} :

$$W_g = -mgl \sin \theta.$$

Pak dostaneme z pravoúhlého trojúhelníku ABC , že $\sin \theta = \frac{h}{l}$, a tedy

$$W_g = -mgl \cdot \frac{h}{l} = -mgh.$$

Z tohoto vzorečku

$$W_g = \pm mgh \quad (7.13)$$

(kladné znaménko užijeme pro posunutí \vec{h} ve stejném směru jako \vec{G} , tedy ve směru dolů k zemi, záporné znaménko pro \vec{h} ve směru vzhůru od země) je vidět, že velikost tíhové práce nezávisí na délce uražené v šikmém směru², ale pouze na absolutní změně h nadmořské výšky.

Dojdeme ke stejnému výsledku: $W_g = -15kg \cdot 9,80665ms^{-2} \cdot 2,5m = -368J$.

ad b) Na bednu působí tři síly:

- \vec{G} ... tu jsme právě spočítali;
- \vec{N} ... normálová síla podložky je kolmá na směr posunutí \vec{l} , a proto nekoná práci;
- \vec{T} ... tahová síla lana.

Protože bedna je v klidu na začátku i na konci posunutí, platí vztah 7.11: $W_T + W_g = 0$, a tedy W_T lze určit jako $W_T = -(-368) = 368J$ (využili jsme vztahu 7.11 a spočítali práci lana pomocí práce tíhové síly).

Kontrola 3. Bednu z příkladu 7.5 jsme vytáhli do stejné výšky, ale po delší rampě.

a) Jak se změní práce síly \vec{T} – bude větší, menší či stejná?

b) Jak se změní velikost síly \vec{T} – bude větší, menší či stejná?

Příklad 7.6 *Kabina výtahu o hmotnosti 500kg klesá rychlostí $v_i = 4ms^{-1}$. Tažné lano začne najednou klouzat a pokles kabiny se urychluje, přičemž $\vec{a} = \frac{\vec{g}}{5}$.*

a) *Jakou práci vykoná tíhová síla $m \cdot \vec{g}$ působící na padající kabinu při posunutí $d = 12m$?*

b) *Jakou práci vykoná při témže posunutí tahová síla lana?*

c) *Jaká je celková práce všech sil působících na kabinu?*

d) *Jaká je kinetická energie kabiny na konci posunutí?*

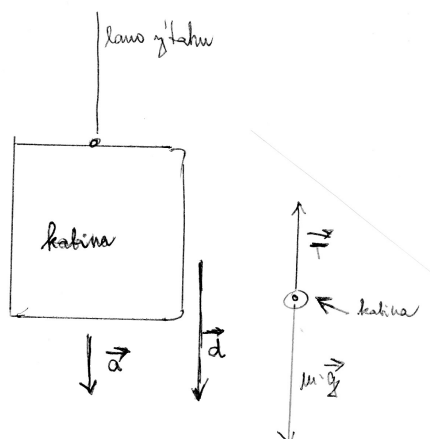
e) *Jaká je velikost rychlosti v_f na konci posunutí?*

Řešení:

ad a) Podle vzorce 7.10 dostaneme

$$W_1 = mgd \cos 0 = 500kg \cdot 9,80665ms^{-2} \cdot 12m \cdot 1 \doteq 5,88 \cdot 10^4 J.$$

²Ještě jednou: pokud zatím neuvažujeme tření na nakloněné rovině v šikmém směru.



Obr. 7.13: Výtah klouzající se zrychlením směrem dolů.

ad b) Velikost výsledné síly \vec{F} získáme jako výslednici součtu velikostí sil \vec{T} a $m\vec{g}$ (viz obr. 7.13), tj. $F = ma = T - mg$ (kde a je zrychlení výsledné síly), protože síly působí v navzájem opačném směru. Ze zadání víme, že $a = \frac{-g}{5}$ (protože zrychlení nastává v opačném směru než působí tahová síla lana), tedy pro velikost T platí

$$T = mg + ma = m(g - \frac{g}{5}) = m \cdot \frac{4}{5}g \doteq 3920N.$$

Nyní můžeme spočítat práci tahové síly lana. Pozor! Na rozdíl od příkladů 7.4, 7.5 není kinetická energie na začátku a na konci posunutí stejná, tj. nelze použít vzorce 7.11, 7.12 – musíme užít vzorec 7.8 pro $\varphi = 180^\circ$:

$$W_2 = F \cdot d \cdot \cos \varphi = 3920N \cdot 12m \cdot (-1) = -4,7 \cdot 10^4 J.$$

ad c) $W = W_1 + W_2 = 1,18 \cdot 10^4 J$. Jiný způsob výpočtu: Určíme nejprve výslednici sil (respektive její velikost), což je jednoduché, protože máme zadáno výsledné zrychlení:

$$\sum F_i = m \cdot a = 500kg \cdot \frac{-9,80665}{5} \doteq -980N.$$

$$\text{Pak } W = 980N \cdot 12m \cdot \cos 0^\circ \doteq 1,18 \cdot 10^4 J.$$

ad d) $E_{k,i} = \frac{1}{2} \cdot 500kg \cdot (4ms^{-2})^2 = 4000J$. Odtud

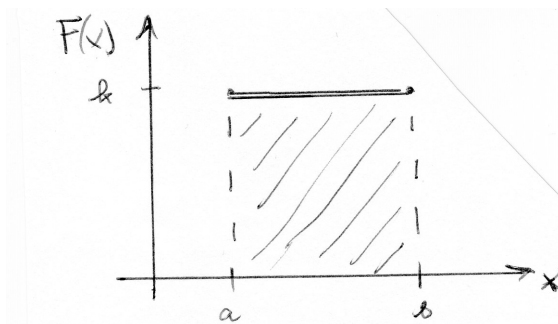
$$E_{k,f} = E_{k,i} + W = 4000J + 11800J = 15800J.$$

ad e)

$$E_{k,f} = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2E_{k,f}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15800J}{500kg}} \doteq 7,9ms^{-1}.$$

7.5 Práce proměnné síly

Pokud síla $F(x)$ působí na částici-těleso v kladném směru osy x , lze vztah polohy x částice=tělesa a síly $F(x)$ na částici-těleso působící vyjádřit grafem za kterého je vidět, že (obrázek 7.14)



Obr. 7.14: Obsah plochy vyjadřuje vykonanou práci.

- i) Síla $F(x)$ je po celou dobu posunutí tělesa konstantní a je rovna hodnotě k (Newtonů).
- ii) Práce, kterou síla F koná při posunutí tělesa z a do b , je rovna obsahu šrafované plochy – obsahu obdélníka $k \cdot (b - a)$ s jednotkami $N \cdot m$.

Pokud by síla $F(x)$ nebyla po celou dobu posunutí konstantní, ale proměnlivá, jak bychom spočetli celkovou práci při posunutí tělesa z polohy a do polohy b na ose x ?

- a) První strategií by mohlo být rozdělit interval $\langle a; b \rangle$ na několik menších, nahradit na menším interválu $\langle a_i; a_{i+1} \rangle$ funkci $F(x)$ konstantou k_{i+1} a výslednou práci určit přibližně (obsah obrazce mezi funkcí $F(x)$ a osou x je přibližně roven součtu obsahů vyšrafovaných obdélníků – viz obrázek 7.15):

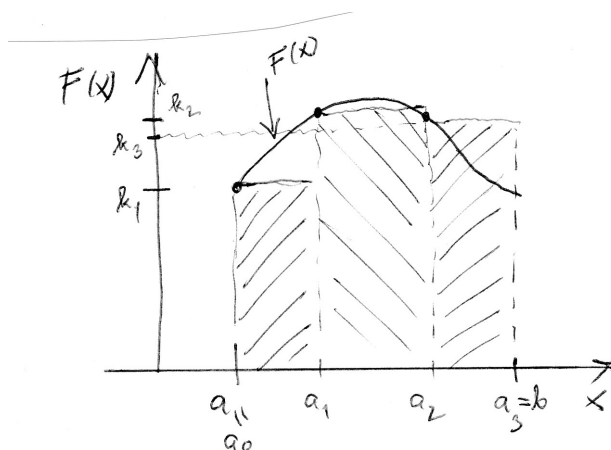
$$W \doteq k_1 \cdot (a_1 - a_0) + k_2 \cdot (a_2 - a_1) + k_3 \cdot (a_3 - a_2).$$

- b) Přesnější výpočet poskytne jemnější rozdělení intervalu $\langle a; b \rangle$ na intervály stejné délky $d = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$ (viz obrázek 7.16):

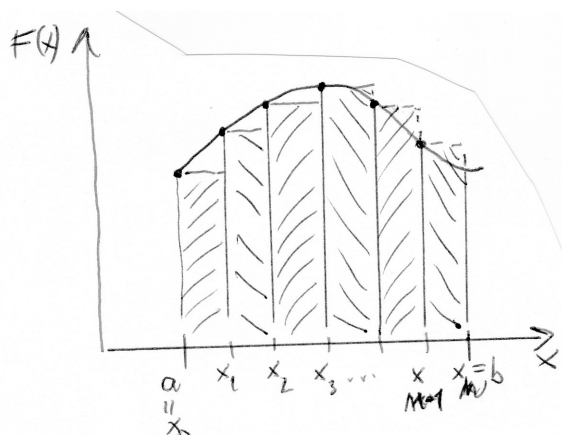
$$W \doteq \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

- c) Limitním přechodem pro $d \rightarrow 0$ dostaneme³ práci jako přesnou hodnotu určitého integrálu z funkce $F(x)$ na intervalu $\langle a; b \rangle$ (viz obr. 7.17), který je pro nezápornou

³Přesněji bychom měli říci, podobně jako v kapitole 2, tento určitý integrál v Riemannově smyslu existuje tehdy, když daná limita nezávisí na výběru bodů c_i z intervalů $\langle x_i; x_{i+1} \rangle$ – a pokud můžeme vybrat $c_i \in \langle x_i; x_{i+1} \rangle$ libovolně, tak vybereme například $c_i := x_i$, a tedy v dané limitě není uvedeno $F(c_i)$, ale hned $F(x_i)$. Tento fakt vdy platí pro spojitou funkci $F(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$.



Obr. 7.15: Hrubý výpočet obsahu pomocí součtu obsahů obdélníků.



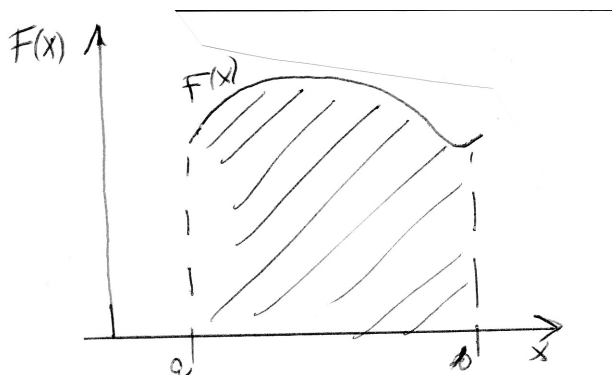
Obr. 7.16: Přibližný výpočet obsahu pro menší dělení intervalu na podintervaly.

spojitou funkci $F(x)$ roven obsahu šrafované plochy mezi funkcí $F(x)$ a osou x na intervalu $\langle a; b \rangle$:

$$W = \lim_{d \rightarrow 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \right) = \int_a^b F(x) dx.$$

Případ proměnné síly tedy řešíme podobnou technikou jako případ proměnné rychlosti v kapitole 2:

- (kapitola 2) určitý integrál z rychlosti je roven délce dráhy přímočarého pohybu tělesa (respektive stále uvažujeme hmotný bod, tj. rozměry tělesa vzhledem k délce pohybu a působícím silám zanedbáváme);
- (nyní v kapitole 7) určitý integrál ze síly působící vkladným směrem osy x je roven množství práce při přímočarém posunutí tělesa.



Obr. 7.17: Určitý integrál jako obsah plochy mezi nekonstantní kladnou funkcí a osou x .

Oba právě popsané fyzikální významy lze přiřadit k matematickému (geometrickému) významu výpočtu obsahu plochy mezi nezápornou spojitou funkcí a osou x na intervalu $\langle a; b \rangle$. Tomuto obrazci budeme říkat podgraf funkce $F(x)$ na intervalu $\langle a; b \rangle$.

Přesněji řečeno (viz též kapitola 2), význam určitého integrálu je trojí:

Algebraický význam určitého integrálu: určitý integrál = limita z jistého výrazu, a sice

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{(x_{i+1}-x_i) \rightarrow 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \right).$$

Geometrický význam určitého integrálu: určitý integrál = obsah mezi nezápornou spojitou funkcí $F(x)$ a osou x na intervalu $\langle a; b \rangle$.

Fyzikální významy určitého integrálu: Fyzikálních významů určitého integrálu je celá řada, zmiňme zatím ty, se kterými jsme se setkali:

- $x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt$... délka dráhy (= změna polohy) = určitý integrál z rychlosti (při přímočarém pohybu hmotného bodu);
- $v(b) - v(a) = \int_a^b a(t)dt$... změna rychlosti = určitý integrál ze zrychlení (při přímočarém pohybu hmotného bodu)
- $W = E_k(b) - E_k(a) = \int_a^b F(x)dx$... vykonaná práce (= změna kinetické energie) = určitý integrál z působící síly (v kladném směru osy x).

Pro výpočet práce při působení proměnné síly platí tedy obecně vztah

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx. \quad (7.14)$$

Pokud známe $F(x)$, lze práci W spočítat podle vzorce (2.5) a integračních vzorců probraných v kapitole 2 (viz cvičení za kapitolou 2) – protože integrace je proces opačný k derivování, při výpočtu integrálů se užívají stejné vzorce jako při derivaci s tím rozdílem, že nyní známe výsledek derivace a hledáme vzor, jehož derivováním výsledek vznikl.

Příklad 7.7 Těleso o hmotnosti 2kg se pohybuje vkladným směrem osy x (rozměry tělesa i tření zatím zanedbáváme). Toto těleso začneme zbrzdňovat proměnnou silou o velikosti $F_x = -6x$ Newtonů (působí proti směru pohybu tělesa). Rychlost tělesa v poloze $x = 3m$ je $v_x = 8ms^{-1}$.

- a) Jaká je rychlost tělesa v poloze $x = 4m$?
- b) V jaké poloze má těleso rychlost $v_x = 5ms^{-1}$?

Řešení: Viz obrázek 7.18:

ad a) Kombinací vzorců 7.14 a 7.4 máme

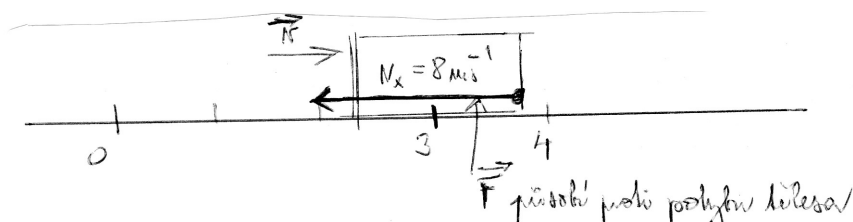
$$W_{3,4} = \int_3^4 (-6x) dx = E_{k,f} - E_{k,i} = \frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_3^2.$$

Integrací levé strany podtržené rovnice a dosazením do její pravé strany dostaneme

$$\begin{aligned} \left[-6 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{x=3}^{x=4} &= \frac{1}{2}m(v_4^2 - 8^2), \\ -3(16 - 9) &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (v_4^2 - 64), \\ -21 + 64 &= v_4^2 \Rightarrow v_4 = \sqrt{43} \doteq 6,557ms^{-1}. \end{aligned}$$

ad b) Dosazením do podobného vztahu jako v (a), jen na intervalu $\langle 3; x_0 \rangle$ máme

$$\begin{aligned} W_{3,x_0} &= \int_3^{x_0} (-6x) dx = \frac{1}{2}m \cdot 25 - \frac{1}{2}m \cdot 64 = E_{k,x_0} - E_{k,3} \\ -3(x_0^2 - 9) &= -39 \Rightarrow x_0^2 = 13 + 9 = 22 \Rightarrow x_0 = \sqrt{22} \doteq 4,69m. \end{aligned}$$



Obr. 7.18: Příklad nekonstantní brzdicí síly.

7.6 Funkce $y = \ln x$, $y = e^x$ a jejich vlastnosti

Kromě vzorců integrace vycházejících ze vzorců pro derivování v kapitole 2 se při integraci používají i další vzorce, které dosud nebyly zmíněny. Integrováním velmi jednoduché funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ (nepřímé úměrnosti) získáme funkci, kterou označujeme jako $\ln x$:

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

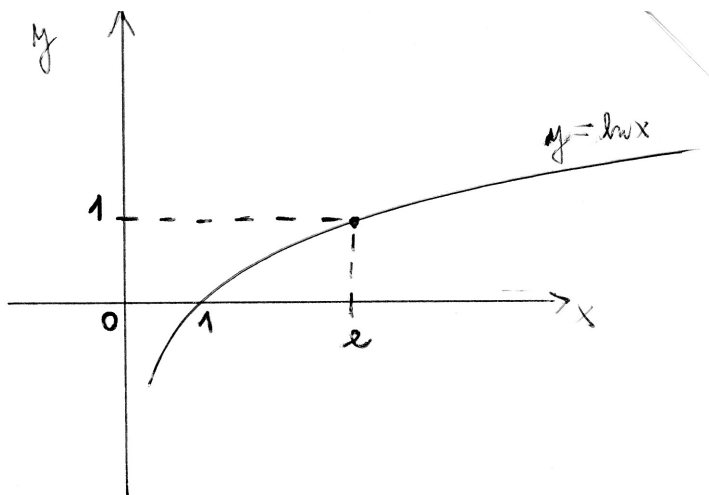
Při tomto označení máme dva často užívané vzorce pro hledání neurčitého integrálu:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c,$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

kde funkce $y = e^x$ (tzv. exponenciální funkce o základu e , což je Eulerovo číslo s nekonečným neperiodickým desetinným rozvojem: $e = 2,71828\dots$) funkcí inverzní k funkci $y = \ln x$ (tzv. funkce přirozený logaritmus z hodnoty x). Pojdme se nyní zabývat těmito dvěma funkcemi (a funkcemi jim nejbližší příbuznými) podrobněji, tj. exponenciálními a logaritmickými funkcemi.

Věnujme se tedy nyní vlastnostem funkcí $y = \ln x$, $y = e^x$: Z obrázku 7.19



Obr. 7.19: Graf funkce $y = \ln x$.

jsou patrný následující **vlastnosti funkce** $y = \ln x$:

Definiční obor: $Dy = R^+ = (0; \infty)$... funkce $\ln x$ je definovaná pouze pro kladné hodnoty x .

Obor funkčních hodnot: $Hy = R$... funkce $\ln x$ nabývá všech možných hodnot z množiny reálných čísel.

y je rostoucí: Z grafu vidíme, že pro rostoucí hodnoty proměnné x rostou funkční hodnoty $\ln x$ (graf funkce „jde do kopce“).

Lokální extrémy: Funkce $\ln x$ nemá lokální extrémy (lokální minimum, lokální maximum), pouze pro kladné hodnoty x blízké nule klesají funkční hodnoty $\ln x$ k minus nekonečnu,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

(čteme: limita z funkčních hodnot $\ln x$ pro x jdoucí k nule zprava je rovna minus nekonečnu), naopak pro velké hodnoty x rostou funkční hodnoty $\ln x$ k plus nekonečnu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

Funkce přirozeného logaritmu $\ln x$ souvisí s problematikou integrování: $\ln x$ lze definovat jako určitý integrál

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{x} dx,$$

tj. lze říci, že vznikla při integrování funkce $\frac{1}{x}$. Současně ovšem funkce $\ln x$ souvisí s funkcí e^x , kde konstanta e je tzv. Eulerovo číslo, které je iracionální (= nelze je vyjádřit ve tvaru zlomku), má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj. Prvních dvacet cifer Eulerova čísla je

$$e = 2,71828 18284 59045 23536 \dots$$

(pro běžné výpočty si stačí pamatovat prvních pět cifer za desetinnou čárkou: $e \doteq 2,71828$). Eulerovo číslo e je takové číslo, že platí $\ln e = 1$, neboli

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1.$$

Nyní se podívejme na graf a vlastnosti funkce $y = e^x$, která je inverzní k funkci $\ln x$. Za chvíli si blíže vysvětlíme, co to znamená inverzní funkce, nyní zatím ať si čtenář (student) pamatuje, že grafy funkcí navzájem inverzních jsou osově souměrné podle osy $y = x$ (viz obrázek 7.20).

Vlastnosti funkce $y = e^x$:

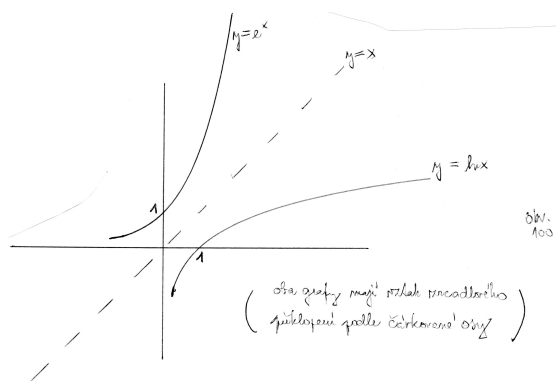
Definiční obor: $Dy = R \dots$ funkce e^x je definovaná pro jakékoli reálné číslo x .

Obor funkčních hodnot: $Hy = R^+ \dots$ funkce e^x nabývá pouze kladných reálných hodnot.

y je rostoucí: Z grafu vidíme, že pro rostoucí hodnoty proměnné x rostou funkční hodnoty e^x (graf funkce „jde do kopce“).

Lokální extrémy: Funkce e^x nemá lokální extrémy (lokální minimum, lokální maximum), pouze pro x blížící se minus nekonečnu funkční hodnoty e^x klesají k nule, tj.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

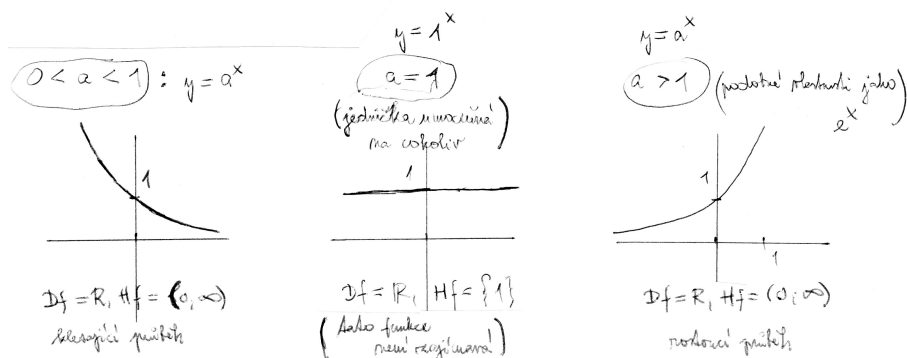


Obr. 7.20: Grafy navzájem inverzních funkcí $y = \ln x$ a $y = e^x$.

(čteme: limita z funkčních hodnot e^x pro x jdoucí k minus nekonečnu je rovna nule), dále pro velké hodnoty x rostou funkční hodnoty e^x k plus nekonečnu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty.$$

Pro matematiku a matematické výpočty má význam nejen funkce $y = e^x$, ale také $y = 2^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, atd., neboli funkce typu $y = a^x$, kde a je libovolná kladná konstanta a x je proměnná. Tyto funkce se nazývají **exponenciální funkce**, protože proměnná x se nachází v exponentu.



Obr. 7.21: Funkce $y = a^x$ pro různé hodnoty konstanty a .

Graf exponenciální funkce $y = a^x$ pro různé hodnoty reálné konstanty a lze vidět na obrázku 7.21: pro $a \in (0; 1)$ dostáváme klesající funkci, pro $a = 1$ konstantní funkci, a pro $a > 1$ rostoucí funkci. Ve všech třech případech $Df = R$, tj. funkce exponenciální je definována pro každé reálné číslo x .

Funkce $y = 1^x$ není zajímavá, protože umocněním čísla 1 na jakékoli číslo x dostaneme zase číslo 1, tj. $Hf = \{1\}$ (a většinou se této funkci ani neříká exponenciální funkce, protože jejím grafem je přímka). Pro zbývající dva typy $a \in (0; 1)$ a $a > 1$ pro oba

platí, že $Hf = R^+$, tj. umocněním kladného čísla a na jakékoli (i třeba záporné!!) číslo x dostáváme jako výsledek pouze kladné číslo.

Protože budeme u exponenciálních funkcí pracovat s mocninami, je nyní vhodné zapakovat vzorce, které pro ně platí:

$$\begin{aligned} a) \quad a^x \cdot a^y &= a^{x+y}; & b) \quad a^x \cdot \frac{1}{a^y} &= a^{x-y}, \text{ speciálně } \frac{1}{a^y} = a^{-y}; \\ c) \quad a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m}; & d) \quad (a^m)^n &= a^{m \cdot n}; \\ e) \quad a^0 &= 1 \text{ pro } a \in R; & f) \quad (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x, \text{ a podobně } \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Příklad 7.8 a) Nakreslete grafy funkcí $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$.

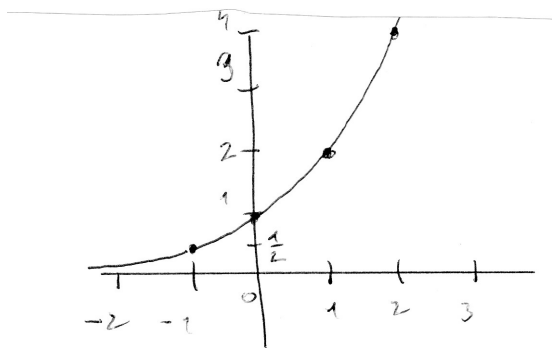
b) Zjistěte pomocí grafu exponenciální funkce, zda číslo $\left(\frac{7}{3}\right)^{-0,5}$ je menší než 1.

c) Zjistěte pomocí grafu exponenciální funkce, zda $0,4^{1,6} < 0,4^{1,8}$.

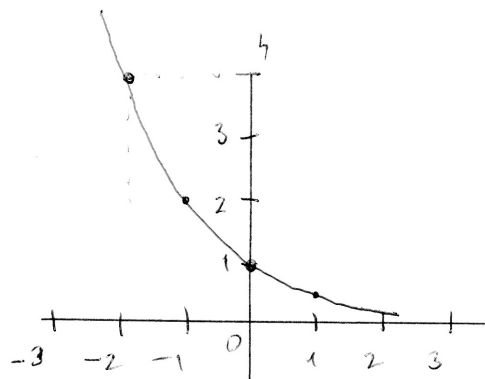
Řešení: Pro každý úkol nakreslíme graf exponenciálních funkcí nebo funkce.

ad a) Funkce $y = 2^x$ má graf velmi podobný grafu $y = e^x$, protože se jedná o typ $y = a^x$ pro $a > 1$ – viz obrázek 7.22.

Dále funkci $y = 2^{-x}$ upravíme podle vzorce 7.15 (b) na tvar $y = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, tj. vidíme, že základ $a = \frac{1}{2}$, a tedy exponenciální funkce je klesajícího typu – obrázek 7.23.



Obr. 7.22: Graf funkce $y = 2^x$.



Obr. 7.23: Graf funkce $y = 2^{-x}$.

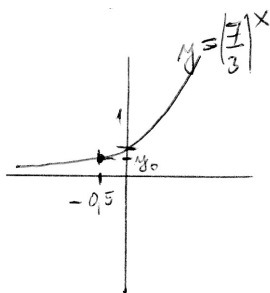
ad b) Nakresleme graf funkce $y = \left(\frac{7}{3}\right)^x$ pro $a = \frac{7}{3}$, což je hodnota větší než 1, tj. jedná se o exponenciálu rostoucího typu – viz obrázek 7.24. Nyní protože

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{-0,5} = f(-0,5),$$

vzneseme kolmici k ose x z hodnoty $-0,5$ – tato kolmice protne graf naší funkce v bodě, jehož odpovídající souřadnice y_0 , která je obrazem funkční hodnoty, je menší než 1:

$$f(-0,5) = y_0 < 1.$$

Z grafu dále vidíme, že $f(x) < 1$ pro jakékoli záporné x .



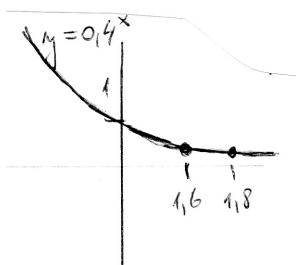
Obr. 7.24: Graf funkce $y = \left(\frac{7}{3}\right)^x$.

ad c) Z grafu funkce $y = 0,4^x$ vidíme, že se jedná o funkci klesající (obrázek 7.25). Pro klesající funkci platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

a tedy pro konkrétní hodnoty ze zadání máme

$$1,6 < 1,8 \Rightarrow 0,4^{1,6} > 0,4^{1,8}.$$



Obr. 7.25: Graf funkce $y = 0,4^x$.

Podobně jako $y = \ln x$ je inverzní funkcí k funkci $y = e^x$, existují i inverzní funkce k ostatním exponenciálním funkcím a nazývají se **logaritmické funkce**:

$$y = \log_a x \quad (\text{čti: logaritmus o základu } a \text{ z hodnoty } x)$$

je funkce inverzní k funkci $y = a^x$. A protože graf inverzní funkce je vždy obrazem původní funkce vzhledem k osové souměrnosti podle přímky $y = x$, bude mít graf funkce $\log_a x$ jiný průběh pro $a \in (0; 1)$ a pro $a > 1$.

Vlastnosti funkce $y = \log_a x$ pro $a \in (0; 1)$ (graf viz levá část obrázku 7.26):

Definiční obor: $Dy = \mathbb{R}^+$... logaritmus je definován jen pro kladné číslo x , jinak ne;

Obor funkčních hodnot: $Hy = \mathbb{R}$;

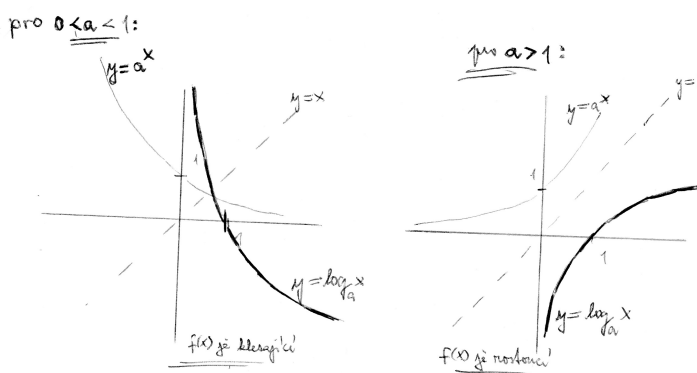
y je **klesající** (pomůcka pro zapamatování: inverzní proces zachovává klesající průběh, tj. pokud původní funkce a^x je klesající, také k ní inverzní $\log_a x$ je klesající)

Lokální extrém: Funkce $\log_a x$ nemá lokální extrém,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty$$

(čteme: limita z funkčních hodnot $\log_a x$ pro x jdoucí k nule zprava je rovna nekonečnu), dále pro velké hodnoty x rostou funkční hodnoty $\log_a x$ k minus nekonečnu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty.$$



Obr. 7.26: Grafy funkcí $y = a^x$ a $\log_a x$.

Vlastnosti funkce $y = \log_a x$ pro $a > 1$ (graf viz pravá část obrázku 7.26):

Definiční obor: $Dy = \mathbb{R}^+$... logaritmus je definován jen pro kladné číslo x , jinak ne;

Obor funkčních hodnot: $Hy = \mathbb{R}$;

y je **rostoucí** (pomůcka pro zapamatování: inverzní proces zachovává rostoucí průběh, tj. pokud původní funkce a^x je rostoucí, také k ní inverzní $\log_a x$ je rostoucí)

Lokální extrém: Funkce $\log_a x$ nemá lokální extrém,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

(čteme: limita z funkčních hodnot $\log_a x$ pro x jdoucí k nule zprava je rovna minus nekonečnu), dále pro velké hodnoty x rostou funkční hodnoty $\log_a x$ k nekonečnu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty.$$

Pokud bychom dokázali s funkcí $\log_a x$ pracovat běžně, což dokážeme, protože funkce $\ln x$ je součástí dnešních kalkulaček a platí vzorec převádějící logaritmus jakéhokoli základu na přirozený logaritmus o základu $e \doteq 2,71828$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad (7.16)$$

tak lze pomocí logaritmických funkcí řešit tzv. **exponenciální rovnice** (= rovnice, ve kterých se vyskytují exponenciální funkce): například při řešení rovnice

$$3^x = 8$$

se na její levé straně nachází funkce $y = 3^x$; pokud chceme vyjádřit z této rovnice neznámou x , použijeme inverzní proces, tj.

$$x = \log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3} = \frac{2,07944}{1,09861} \doteq 1,89279.$$

Nebo při řešení rovnice

$$5^{-x} = 8$$

upravíme podle 7.15 (b) na tvar

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 8.$$

Pro exponenciální funkci $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ použijeme funkci $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ k ní inverzní a dostaneme

$$x = \log_{\frac{1}{5}} 8 = \frac{\ln 8}{\ln \frac{1}{5}} \doteq -1,292.$$

Příklad 7.9 a) *Nakreslete grafy funkcí $y = \log_5 x$ a $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.*

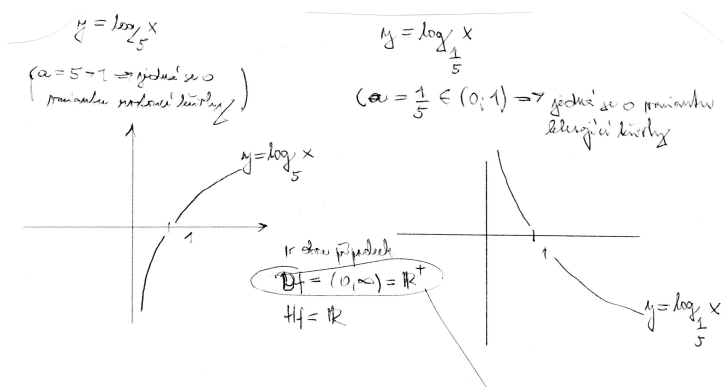
b) *Rozhodněte (pomocí grafu jisté funkce), zda platí $\log_4 7 < \log_4 9$.*

c) *Rozhodněte (pomocí grafů jistých funkcí), zda platí $\log_{10} 12 \leq \log_{0,3} 12$.*

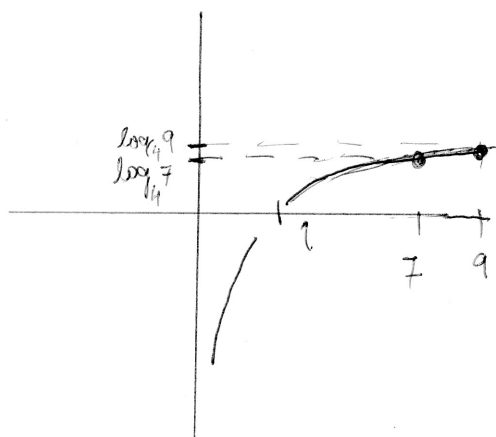
Řešení:

ad a) Grafy obou funkcí lze najít v náčrtku na obrázku 7.27. Křivka grafu $y = \log_5 x$ je mírně jinak nakloněna než křivka grafu $y = \ln x$, ovšem opět protíná vodorovnou osu soustavy souřadnic v bodě 1, tj. $\log_5 1 = 0$, protože jdeme-li v inverzním směru, platí $5^0 = 1$. A vůbec, jak je z grafů patrné, pro oba typy exponenciální funkce (klesající i rostoucí typ) platí $\log_a 1 = 0$, protože $a^0 = 1$.

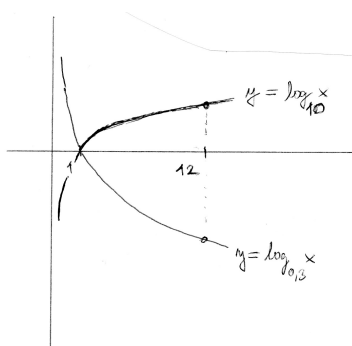
ad b) Nakresleme graf funkce $y = \log_4 x$, viz obrázek 7.28. Pro $a = 4$ bude mít funkce rostoucí charakter. Tedy pro $7 < 9$ platí, že funkční hodnoty zachovají stejné pořadí: $\log_4 7 < \log_4 9$, tj. vztah ze zadání platí.



Obr. 7.27: Grafy funkcí $y = \log_5 x$ a $\log_{\frac{1}{5}} x$.



Obr. 7.28: Graf funkce $\log_4 x$.



Obr. 7.29: Grafy funkcí $y = \log_{10} x$ a $\log_{0,3} x$.

ad c) Do jednoho obrázku 7.29 nakreslíme grafy funkcí $y = \log_{10} x$ (rostoucí průběh) a

$y = \log_{0,3} x$ (klesající průběh). Z grafů je jasně vidět, že pro $x = 12$ platí

$$\log_{10} 12 > 0 > \log_{0,3} 12,$$

tj. vztah ze zadání neplatí.

Z povahy funkce logaritmu jako inerzní funkce k exponenciální funkci plynou následující pravidla pro počítání s logaritmy (tyto vlastnosti plynou v podstatě ze vzorců 7.15, protože logaritmus funguje jako jakási mocnina, na kterou se umocňuje základ a):

- a) $\log_a x =$ taková hodnota, na kterou když umocníme základ a , dostaneme číslo x ;
- b) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ (logaritmus součinu = součet logaritmů); (7.17)
- c) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (logaritmus podílu = rozdíl logaritmů);
- d) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$ (mocninu z argumentu logaritmu lze vytknout před logaritmus).

Protože $y = \log_a x$ a $y = a^x$ jsou navzájem inverzní funkce, tak pokud je použijeme těsně za sebou, navzájem se zruší jejich účinek:

$$\begin{aligned} a) \quad a^{\log_a x} &= x; \\ b) \quad \log_a(a^x) &= x \end{aligned} \quad (7.18)$$

(vzorce platí pro $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$).

Příklad 7.10 Vyřešte bez kalkulačky na základě právě probraných vzorců:

- a) $\log_2 8 = \dots$
- b) $\log_{10} 0,01 = \dots$
- c) $\log_a a = \dots$
- d) $\log_8 t = 3 \Rightarrow t = \dots$
- e) Určete všechna $a \in R$, pro která platí $\log_a 100 = 2$.
- f) $4 \cdot \log_6 3 + 5 \cdot \log_6 2 - \log_6 12 = \dots$
- g) V oboru reálných čísel řešte rovnici: $2 \cdot \log_{10}(x - 1) = 0,5 \cdot (\log_{10} x^5 - \log_{10} x)$.
- h) V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\frac{1}{3^{-(u+2)}} - 2 = 3^u.$$

- i) V oboru reálných čísel řešte rovnici ($\log v$ je označení pro $\log_{10} v$, základ 10 se někdy v tomto zápisu vynechává):

$$v^{\log v} = 100v.$$

Řešení: S využitím vzorců uvedených v tomto oddílku můžeme počítat:

ad a) $\log_2 8 = \log_2 2^3 \stackrel{7.17(a)}{=} 3.$

ad b) $\log_{10} 0,01 \stackrel{7.17(a)}{=} -2.$

ad c) $\log_a a \stackrel{7.17(a)}{=} 1$ pro $a > 0, a \neq 1.$

ad d) $\log_8 t = 3 \Rightarrow t = 8^3 = 512.$

ad e) $\log_a 100 = 2 \Rightarrow a^2 = 100$, tj. $a = 10$ (číslo $a = -10$ není řešením, protože základ logarimu musí být kladný).

ad f) S využitím vztahů 7.17 b),c),d) dostaneme

$$4 \cdot \log_6 3 + 5 \cdot \log_6 2 - \log_6 12 = \log_6 \frac{3^4 \cdot 2^5}{12} = \log_6 \frac{3^4 \cdot 2^5}{3 \cdot 2^2} = \log_6 (3^3 \cdot 2^3) \stackrel{7.15(f)}{=} \log_6 6^3 = 3.$$

ad g) Levou stranu rovnice upravíme pomocí 7.17(d), pravou stranu nejprve podle 7.17(c), a pak 7.17(d), dostaneme

$$\log_{10}(x-1)^2 = 0,5 \cdot \log_{10} \frac{x^5}{x} = 0,5 \cdot \log_{10} x^4 = \log_{10} x^{4 \cdot 0,5} = \log_{10} x^2.$$

Protože logaritmus je prostá funkce, nabývá pro každá různá x_1, x_2 různých funkčních hodnot $\log_{10} x_1, \log_{10} x_2$, můžeme rovnost logaritmů nahradit rovností jejich argumentů:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= x^2 \\ 1 &= 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ale $x = \frac{1}{2}$ není řešením zadané rovnice, protože hodnota $\log_{10}(\frac{1}{2} - 1)$ není definována ($\frac{1}{2} - 1$ je záporné reálné číslo, které nepatří do definičního oboru funkce logaritmu). Tedy závěr zní: rovnice na množině reálných čísel nemá řešení⁴.

ad h) Nejprve pomocí 7.15(b) upravíme levou stranu zadané rovnice:

$$3^{n+2} - 2 = 3^n.$$

Nyní 3^{n+2} lze psát ve tvaru $9 \cdot 3^n$ a po zavedení substituce $3^n = y$ dostaneme

$$\begin{aligned} 9y - 2 &= y \\ 8y &= 2 \\ 4y &= 1 \\ y &= \frac{1}{4} \stackrel{subst.}{=} 3^n. \end{aligned}$$

⁴Z toho plyne poučení: při řešení rovnic, ve kterých se vyskytují logaritmy, nestačí jen slepě upravovat vzorce – musíme se vždy přesvědčit, zda nalezené číslo x patří do definičního oboru funkcí, jež se v rovnici vyskytují.

Tuto poslední podtrženou rovnost zlogaritmujeme podle základu 3, tj. před obě strany rovnice přidáme operátor \log_3 :

$$\log_3 \frac{1}{4} = \log_3 3^n = n \Rightarrow n = \log_3 \frac{1}{4} = \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln 3} \doteq -1,262.$$

ad i) Nejprve obě strany rovnice zlogaritmujeme, tj. před obě strany rovnice přidáme operátor \log_{10} :

$$\log_{10} v^{\log_{10} v} = \log_{10}(100 \cdot v).$$

Dále podle 7.17(d) můžeme „vyjít“ s mocninou na levé straně v argumentu logaritmu před logaritmus, pravou stranu upravíme podle 7.17(b):

$$\underbrace{\log_{10} v \cdot \log_{10} v}_{=(\log_{10} v)^2} = \underbrace{\log_{10} 100}_{=2} + \log_{10} v.$$

Zaveďme nyní substituci $y = \log_{10} v$ a dostaneme:

$$\begin{aligned} y^2 &= 2 + y \\ y^2 - y - 2 &= 0 \\ (y + 1)(y - 2) &= 0 \Rightarrow y_1 = -1, \quad y_2 = 2 \end{aligned}$$

Nyní se vraťme v substituci zpět a prozkoumejme obě hodnoty „podezřelé z řešení“:

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ \log_{10} v &= -1 \Rightarrow v_1 = 10^{-1} = 0,1 \\ y_2 &= 2 \\ \log_{10} v &= 2 \Rightarrow v_2 = 10^2 = 100. \end{aligned}$$

Obě hodnoty v_1, v_2 leží v definičním oboru funkce $\log_{10} v$, tj. obě jsou řešením rovnice.

7.7 Cvičení – neurčitý integrál – základní vzorce

7.8 Cvičení – neurčitý integrál – metoda per partes = po částech

7.9 Cvičení – neurčitý integrál – substituce

Na konci oddílku integračních metod s využitím substituce uveďte vzorce a metody pro integraci součinu funkcí sinus a cosinus, které nejsou součástí rukopisu (v učebnici Matematika pro gymnázia – diferenciální a integrální počet nejsou řešeny dostatečně, i když zbývá dodat jen malý krok).

a) V součinu funkcí se vyskytuje lichá mocnina sinu proměnné x ... substituce $\cos x = t$.

b) V součinu funkcí se vyskytuje lichá mocnina cosinu proměnné x ... substituce $\sin x = t$;

- c) V součtinu se vyskytují pouze sudé mocniny sinu a kosinu proměnné x ... jednodušší než užití substituce je snížit mocninu goniometrických funkcí pomocí vzorců

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

které získáme jako druhou stranu součtových vzorců funkcí sinus nebo cosinus dokazovaných v kapitole 3 ve cvičení.

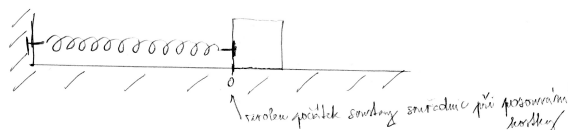
7.10 Práce pružné síly

Vraťme se nyní po exkurzi do intergrálního počtu a do vlastností funkcí a^x , $\log_a x$ zpět k výpočtu proměnné síly (tj. dané praktické aplikaci integrálního počtu).

V tomto oddíle se budeme zabývat pružnou silou neboli silou, kterou na částice působí natažená nebo stlačená pružina. Je zřejmé, že v průběhu pohybu částice (tělesa) se bude měnit natažení pružiny, a tím i působící síla.

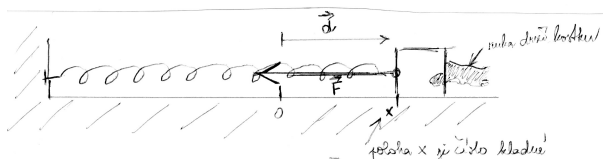
Uvažujme kostku připevněnou na pružině (příčemž jeden konec pružiny je upevněn ve zdi, se druhým je spojena kostka) – tato kostka se může nacházet v jednom ze tří stavů:

- a) **nenapjatý stav:** Kostka s pružinou zůstávají v klidu – viz obrázek 7.30.



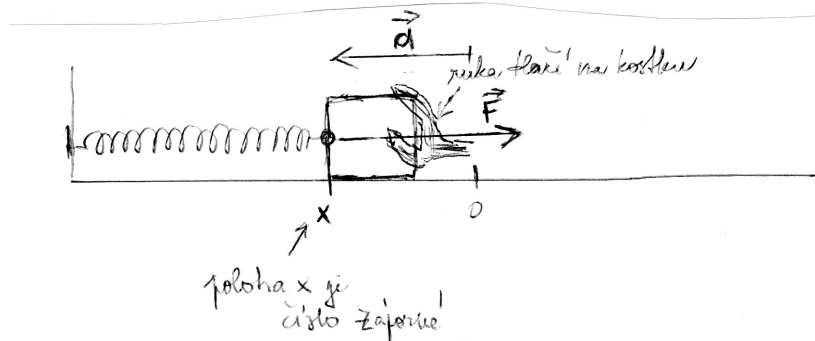
Obr. 7.30: Kostka připojená k pružině.

- b) **protážení pružiny:** Pružina působí na kostku silou \vec{F} a snaží se ji dostat zpět do nenapjatého stavu – viz obrázek 7.31.



Obr. 7.31: Kostka na pružině natažená vnější silou.

- c) **stlačení pružiny:** Kostku tlačíme směrem doleva, pružinu stlačujeme (viz obrázek 7.32).



Obr. 7.32: Kostka na pružině stlačené vnější silou.

Vztah mezi posunutím (= polohou) kostky a silou \vec{F} lze vyjádřit tzv. Hookeho zákonem⁵:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{d}, \quad (7.19)$$

kde k je kladná konstanta vyjadřující tuhost pružiny (její jednotkou je $N \cdot m^{-1}$, větší hodnota této kladné konstanty k znamená tužší pružinu). Znaménko minus v právě uvedeném vztahu vyjadřuje, že vratná síla působí vždy ve směru opačném než posunutí.

Vzorec 7.19 funguje v prostoru v jakémkoli směru, ve kterém pružinu natahujeme. – pokud do směru protažení umístíme osu x a počátek této osy do nenapjatého stavu pružiny (tak, jak je to na obrázcích), lze vzorec 7.19 psát bez vektorů pomocí velikostí daných veličin

$$F(x) = -k \cdot x, \quad (7.20)$$

kde x je poloha kostky vzhledem k souřadné soustavě umístěné do směru posunutí, $F(x)$ je velikost síly pružiny v kladném směru osy x .

Když nyní do kostky udeříme směrem doprava (= v kladném směru osy x), tak jí udělíme kinetickou energii a kostka se začne pohybovat směrem doprava. Síla \vec{F} pružiny pohyb kostky zpomaluje, kinetická energie kostky klesá. Za určitých předpokladů (nehmotná pružina ... její hmotnost je zanedbatelná; ideální pružina ... řídí se Hookeho zákonem) je změna kinetické energie určena výhradně pomocí síly \vec{F} .

Práci pružiny určíme podle vzorce 7.14, do kterého dosadíme vyjádření $F(x)$ ze vztahu 7.20:

$$\begin{aligned} W_p &\stackrel{7.14}{=} \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \stackrel{7.20}{=} \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx \stackrel{(2.5)}{=} \\ &= -k \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=x_i}^{x=x_f} = \frac{-k}{2} (x_f^2 - x_i^2) = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2. \end{aligned}$$

⁵Robert Hooke ... anglický vědec v 17. století.

Odvodili jsme tedy integračními metodami vzorec pro **práci pružné síly**

$$W_p = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad (7.21)$$

W_p může být kladná nebo záporná, protože souvisí s celkovou změnou kinetické energie kostky při jejím pohybu (v dané souřadné soustavě je jeden směr pohybu zvolen jako kladný).

Pro $x_i = 0$ vzorec 7.21 přechází do tvaru $W_p = \frac{1}{2}kx_f^2$.

Další věc: pokud kostku stále posunujeme silou \vec{F}_a , a ještě současně působí síla pružiny, podle 7.9 je celková práce rovna součtu dílčích prací:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_p.$$

Speciálně pokud kinetická energie na začátku i na konci působení je rovna nule, platí $W_a + W_p = 0$, tj.

$$W_a = -W_p \quad (7.22)$$

(práce vykonaná silou \vec{F}_a je rovna záporně vzaté práci pružné síly).

Poznámka. Ve vzorcích 7.19, 7.20 nevystupuje délka pružiny, ale tato délka je jedním z faktorů určujících tuhost pružiny k .

Příklad 7.11 Abychom pružinu na obrázku 7.31 udrželi protaženou o 12mm, musíme na kostku (uchycenou na volném konci pružiny) působit silou \vec{F}_a o velikosti $|\vec{F}_a| = 4,9N$.

- Jaká je tuhost pružiny?
- Jakou silou bude pružina působit na kostku při protažení o 17mm?
- Jakou práci vykoná pružná síla při protažení pružiny z nenapjatého stavu do polohy protažení pružiny o 17mm ?
- Pružinu protaženou o 17mm uvolňujeme přes nenapjatý stav do stavu stlačení o 12mm. Jakou práci vykoná pružná síla při celkovém posunutí kostky?

Řešení:

ad a) Ze vztahu 7.20 ($F = -kx$) vyjádříme

$$k = \frac{-F}{x} = \frac{-(-4,9N)}{12 \cdot 10^{-3}m} \doteq 408,3Nm^{-1}$$

(síla F působí v záporném směru, proto má záporné znaménko). Získali jsme tedy vztah závislosti síly na poloze

$$F(x) = -408,3x.$$

ad b) $F(0,017) = -408,3 \cdot 0,017 = -6,94N$ (při kladném posunutí je síla záporná, a naopak).

ad c) Užitím 7.21 pro $x_i = 0$ dostaneme

$$W_p = \frac{-1}{2}k \cdot x_f^2 = \frac{-1}{2} \cdot 408,3Nm^{-1} \cdot 0,017^2m^2 = -0,059N \cdot m$$

(jednotky metry se umocňují současně s hodnotou 0,017, jen tak budou jednotky výsledku dobře). W_p při posunu z nenapjatého stavu je vždy záporná, protože má vždy opačný směr než posunutí, ať už pružinu stlačíme nebo natáhneme.

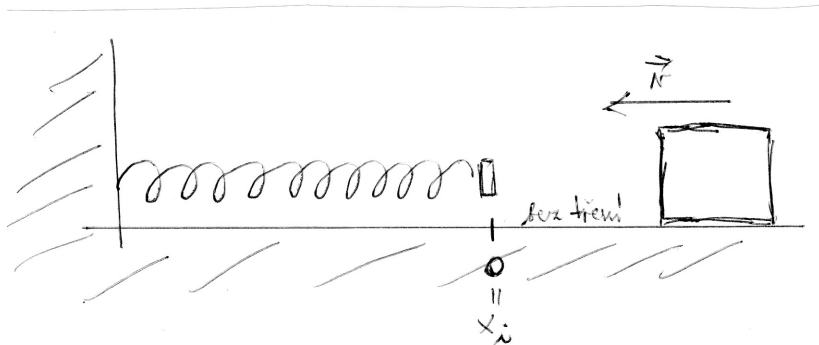
ad d) Při celkovém posunutí kostky vykoná pružná síla práci

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 408,3Nm^{-1}(0,017^2 - 0,012^2)m^2 = 0,0296N \cdot m = 0,0296J$$

(práce W_1 vykonaná při posunu z polohy 0,017 do polohy 0 je kladná, práce W_2 vykonaná při posunu z nenapjatého stavu (= polohy 0) do polohy $-0,012$ je záporná).

Kontrola 4. Je práce pružné síly pro interval polohy a) $(-3cm, 2cm)$, b) $(2cm, 3cm)$, c) $(-2cm, 2cm)$ kladná, záporná nebo nulová?

Příklad 7.12 Kostka o hmotnosti $5,7kg$ klouže po vodorovném dokonale hladkém stole konstantní rychlostí o velikosti $1,2ms^{-1}$. Narazí na volný konec pružiny (viz obrázek 7.33) a stlačuje ji. Vypočítejte délku d , o kterou je pružina stlačena. Tuhost pružiny je $k = 1500N \cdot m^{-1}$.



Obr. 7.33: Klouzající kostka narazí na pružinu.

Řešení: Užijeme 7.21 pro $x_i = 0$, dostaneme $W_p = \frac{-1}{2} \cdot k \cdot d^2$. Dále ze vztahů 7.1, 7.4 máme také

$$W_p = E_{k,f} - E_{k,i} = 0 - \frac{1}{2}mv^2.$$

Z tohoto dvojího vyjádření W_p lze sestavit rovnici $\frac{-1}{2}kd^2 = \frac{-1}{2}mv^2$, a odtud

$$d^2 = \frac{mv^2}{k} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = \sqrt{\frac{5,7kg}{1500N}} \cdot 1,2ms^{-1} \doteq 0,074m = 7,4cm.$$

7.11 Výkon

Výkon představuje míru toho, jak rychle bude práce dané velikosti vykonána, tj. nezáleží jen na tom, kolik práce se stihne, ale i na tom, za jakou dobu.

Úvahy při výpočtu rychlosti práce jsou podobné jako úvahy při výpočtu rychlosti pohybu v kapitole 2: Průměrný výkon vypočteme podle vztahu

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (7.23)$$

(ΔW je práce, kterou na těleso vykoná síla \vec{F} za časový interval Δt). Vzorec je podobný vzorcí pro průměrnou rychlost přímočarého pohybu $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (průměrná rychlost pohybu za dobu Δt je rovna podílů změny polohy Δx a intervalu Δt).

Vzorec pro okamžitý výkon v okamžiku t pak získáme limitním přechodem ve vzorcí 7.23 pro Δt jdoucí k nule:

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt}, \quad (7.24)$$

podobně jako když jsme okamžitou rychlost přímočarého pohybu získali jako $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Jednotkou výkonu v soustavě SI je joule za sekundu ($J \cdot s^{-1}$). Tato veličina se ovšem užívá tak často, že jednotka dostala svůj vlastní název watt (W) podle Jamese Watta, který se věnoval výkonu parních strojů. V britském systému jednotek je jednotkou výkonu „stopa · libra za sekundu“ ($ft \cdot lb \cdot s^{-1}$). Někdy se užívá i jednotka koňská síla (HP = horse power, z angličtiny). Mezi jednotkami existují tyto převodní vzorce:

$$\begin{aligned} 1W &= 1J \cdot s^{-1} = 0,738 ft \cdot lb \cdot s^{-1}, \\ 1HP &= 550 ft \cdot lb \cdot s^{-1} = 746W. \end{aligned}$$

Ze vztahu 7.23 lze vidět, že práci lze vyjádřit jako součin výkonu a času, a z tohoto pohled lze pak získat její často užívanou jednotku kilowatthodinu:

$$1kW \cdot h = 10^3W \cdot 3600s = 3,6 \cdot 10^6J = 3,6MJ$$

(tedy kilowatthodina je naprosto obecná jednotka práce, netýká se jen práce v elektřině).

Výkon pro konstantní sílu pomocí skalárního součinu. Pomocí vzorců 7.24 a 7.8 lze pro konstantní sílu F při přímočarém posunu částice-tělesa odvodit

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{d \left[|\vec{F}| \cdot \cos \alpha \cdot x(t) \right]}{dt} = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha \cdot \frac{dx(t)}{dt} = F \cdot \cos \alpha \cdot v(t),$$

protože rychlost $v(t)$ přímočarého pohybu definujeme jako derivaci polohy podle času. Pak lze vzorec

$$\frac{dW(t)}{dt} = F \cdot v \cdot \cos \alpha$$

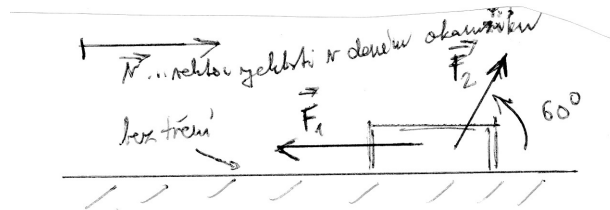
pomocí vzorce pro skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ upravit na tvar

$$\frac{dW(t)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (7.25)$$

kde \vec{v} je vektor rychlosti tělesa ve směru jeho pohybu. Například pokud tahač táhne naložený přívěs, lze v této souvislosti nyní mluvit o výkonu tahače (nesmíme ovšem zapomenout definiční vztah 7.24 ... výkon = rychlost práce neboli rychlost, s jakou síla koná práci).

Příklad 7.13 Na obrázku 7.34 jsou vyznačeny konstantní síly \vec{F}_1 , \vec{F}_2 působící na krabici, která klouže bez tření po dokonale hladké ploše, $|\vec{F}_1| = 2N$, $|\vec{F}_2| = 4N$. Rychlost krabice má v určitém okamžiku velikost $|\vec{v}| = 3ms^{-1}$.

- a) Jaký je výkon každé z obou sil v tomto okamžiku? Jaký je jejich celkový výkon (interpretujte tuto hodnotu celkového výkonu)?
- b) Řešte úlohu (a) znovu pro $|\vec{F}_2| = 6N$.



Obr. 7.34: Síly působící na krabici.

Řešení:

ad a) Užijeme vzorec 7.25 (a). Pro sílu \vec{F}_1 je $\alpha_1 = 180^\circ$, tj.

$$P_1 = 2N \cdot 3ms^{-1} \cdot \cos 180^\circ = -6Js^{-1} = -6W$$

(síla \vec{F}_1 „spotřebovává práci rychlostí $6Js^{-1}$ “).

Pro sílu \vec{F}_2 je $\alpha_2 = 60^\circ$, tj.

$$P_2 = 4N \cdot 3ms^{-1} \cdot \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} = 6Js^{-1} = 6W$$

(síla \vec{F}_2 „koná“ kladnou práci rychlostí $6J$ za sekundu).

Další působící síly (\vec{G} tíhová, \vec{T} tlaková) nekonají práci, protože jsou kolmé na směr posunutí a $\cos \alpha = 0$ pro ně.

Interpretace P_{celk} : platí $P_{celk} = P_1 + P_2 = 0W \dots$ výkon v daném okamžiku je nulový, kinetická energie se nemění. Výslednice všech působících sil je nulová. Pro souřadnice vektoru výslednice sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{G}$ (gravitační síla), \vec{N} (tlaková síla podložky) dostaneme $\vec{F} = (F_x, F_y)$, kde

$$F_x = F_1 \cdot \cos \varphi_1 + F_2 \cdot \cos \varphi_2 = 2 \cdot \cos(180^\circ) + 4 \cdot \cos(60^\circ) \Rightarrow a_x = 0;$$

a

$$F_y = F_2 \cdot \sin \alpha + N - mg = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N - mg$$

(síly \vec{N}, \vec{G} působí pouze ve směru osy y , síla \vec{F}_1 působí pouze ve směru osy x) a protože víme, že krabice se pohybuje pouze vodorovně, platí $a_y = 0$, odtud $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N - mg = 0$, a tedy $N = mg - 2 \cdot \sqrt{3}$ je velikost síly podložky v Newtonech.

Celkový výkon P_{celk} a celková výslednice sil jsou tedy nulové trvale, nejen v jediném okamžiku zadání úlohy.

ad b) Pro $|\vec{F}_2| = 6N$ dostaneme

$$P_2 = 6N \cdot 3ms^{-1} \cdot \cos 60^\circ = 9Js^{-1} \quad P_{celk} = P_1 + P_2 = -6 + 9 = 3Js^{-1}$$

(celkový výkon v daném okamžiku je kladný, tj. roste kinetická energie, tj. i rychlost pohybu – hodnoty ze zadání se tedy týkají pouze daného okamžiku).

Kontrola 5. Kostka je uvázána na provaze a pohybuje se rovnoměrně po kružnici, v jejímž středu je druhý konec provazu upevněn. Rozhodněte, zda je výkon tahové síly provazu kladný, záporný nebo nulový.

7.12 Vztažné soustavy

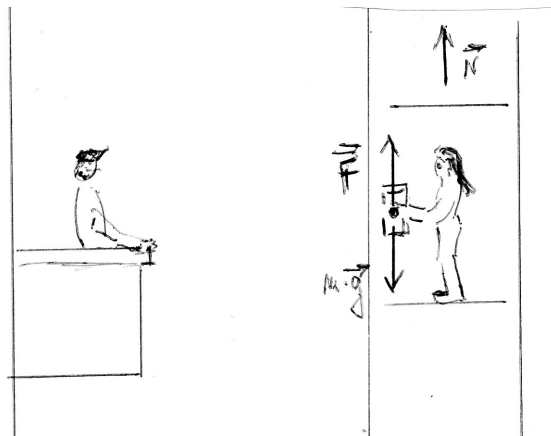
Při pomeňme si, že Newtonovy zákony platí v tzv. inerciálních vztažných soustavách (viz kapitola 5), tj. v soustavách, které se navzájem pohybují rovnoměrně přímočaře. Invariantní veličiny (= neměnné veličiny) jsou takové, které při měření v různých inerciálních soustavách vykazují tytéž hodnoty⁶. Jsou to např. síla, hmotnost, zrychlení, čas.

Příklady veličin, které nejsou invariantní: posunutí $\vec{x}(t)$, rychlost $\vec{v}(t)$, práce $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (protože ta závisí na posunutí), kinetická energie E_k (protože ta závisí na rychlosti a rychlost dále na volbě vztažné soustavy).

Fyzikové dospěli k tzv. principu invariance: fyzikální zákony musí mít stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách. Co to znamená pro veličiny, které nejsou invariantní? V různých vztažných soustavách sice naměříme jejich různé hodnoty, ale ve stejném poměru určeném daným fyzikálním zákonem.

⁶V Newtonovské mechanice, tj. v mechanice, kde platí Newtonovy zákony.

Příklad 7.14 Soňa jede ve výtahu nahoru a drží v ruce knihu, Štěpán ji pozoruje z balkonu (obrázek 7.35). Máme zde dvě různé inerciální soustavy – nepohyblivý balkon a rovnoměrně se pohybující prosklený výtah. Jaká je platnost vztahů 7.4 a 7.5 mezi prací a kinetickou energií?



Obr. 7.35: Balkon a pohybující se výtah.

- a) **Soňa:** Vztažnou soustavou je zde skříň výtahu. Síla \vec{F} ruky ani síla $m\vec{g}$ nekonají práci, protože kniha je v klidu; tedy celková práce všech sil působících na knihu je nulová. Též kinetická energie je nulová a zachovává se (je stále nulová), vztahy 7.4, 7.5 tedy platí.
- b) **Štěpán:** Vztažnou soustavou je zde balkon. Síla \vec{F} vykoná práci $W_f = F \cdot h$ (kniha je zvednuta do výšky h). Tíhová síla vykoná práci stejné velikosti, ale s opačným znaménkem: $W_{\vec{a}} = -mgh$. Celková práce je nulová: $F \cdot h - mgh = 0$; platí vztahy 7.4, 7.5. Kinetická energie knihy se tedy nemění a zachovává se (je stále rovna hodnotě $\frac{1}{2}mv^2$).

Vidíme tedy, že i když kinetická energie knihy v každé z těchto soustav je jiná, dané zákony 7.4, 7.5 platí v každé ze soustav. Z toho plyne důležité poučení: při měření úlohy je důležité používat stále tutéž vztažnou soustavu.

7.13 Otázky k opakování – práce a kinetická energie

Otázka 7.1 Oddíl 7.1. Co je to kinetická energie a jak se spočítá? (7.1)

Otázka 7.2 Co je jednotkou kinetické energie? (7.2)

Otázka 7.3 Oddíl 7.2. Co je to práce částice nebo tělesa?

Otázka 7.4 Oddíl 7.3. Jaký je vztah mezi prací a kinetickou energií? (7.4, 7.5)

Otázka 7.5 *Odvoďte vztah (7.8) mezi prací W a působící silou \vec{F} ... práce konstantní síly.*

Otázka 7.6 *Jaký je vztah mezi \vec{F} a W s využitím skalárního součinu? (vztah 3.16 opakování)*

Otázka 7.7 *Co to znamená, že práce W je kladná (nulová, záporná)?*

Otázka 7.8 *Jak spočítáme práci při působení většího počtu sil? (7.9)*

Otázka 7.9 **Oddíl 7.4.** *Jaký vzorec platí pro velikost práce $|W_g|$ tíhové síly? (7.10)*

Otázka 7.10 *Jak určíme znaménko práce W_g (tj. kdy je kladné a kdy záporné)?*

Otázka 7.11 *Jaké dva vzorce platí při působení další síly \vec{F} , pokud změna kinetické energie nenastane? (7.11, 7.12)*

Otázka 7.12 *Jak můžeme zjednodušit vzorce 7.10 a 7.12 a co z toho plyne? ((7.13) ... práce tíhové síly (či práce jiné síly na překonání tíhové síly) nezávisí na délce uražené v šikmém směru, ale pouze na změně nadmořské výšky)*

Otázka 7.13 **Oddíl 7.5.** *Jaký je geometrický význam práce při působení konstantní či proměnné síly?*

Otázka 7.14 *Vyjádřete W při působení proměnné síly F vzorcem (7.14).*

Otázka 7.15 *Jaký je algebraický, geometrický a fyzikální význam určitého integrálu?*

Otázka 7.16 *Jaký je neurčitý integrál z funkce $y = \frac{1}{x}$ a z funkce e^x ?*

Otázka 7.17 **Oddíl 7.6.** *Nakreslete graf funkce $y = \ln x$ a určete její vlastnosti.*

Otázka 7.18 *Nakreslete graf funkce $\ln x$ a funkce k ní inverzní do jednoho obrázku.*

Otázka 7.19 *Nakreslete graf funkce $y = e^x$ a určete její vlastnosti.*

Otázka 7.20 *Jak se definuje číslo e (vzorec bez čísla) a čemu se rovná (prvních šest cifer)?*

Otázka 7.21 *Nakreslete grafy funkcí $y = a^x$ pro $a \in (0; 1)$, $a = 1$, $a > 1$.*

Otázka 7.22 *Jakých šest vzorců platí při počítání s mocninami? (7.15)*

Otázka 7.23 *Nakreslete grafy funkcí $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ a určete jejich vlastnosti.*

Otázka 7.24 *Nakreslete grafy funkcí $y = \log_a x$ pro $a \in (0; 1)$ a pro $a > 1$ a určete jejich vlastnosti.*

Otázka 7.25 Jak lze vyjádřit $\log_a x$ pomocí tzv. přirozeného logaritmu \ln ? (7.16)

Otázka 7.26 Nakreslete grafy funkcí $y = \log_5 x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ a určete jejich vlastnosti.

Otázka 7.27 Uveďte definici $\log_a x$ a další tři vzorce pro počítání s logaritmy. (7.17)

Otázka 7.28 Jaké dva vzorce plynou z toho, že exponenciální funkce a logaritmus jsou navzájem inverzní procesy?

Otázka 7.29 Oddíl 7.10. Co je to pružná síla a nenapjatý stav?

Otázka 7.30 Co říká Hookeho zákon? (7.19)

Otázka 7.31 Co je to tuhost pružiny a jakou má jednotku?

Otázka 7.32 Jaký tvar má Hookeho zákon vzhledem k poloze x konce pružiny? (7.20)

Otázka 7.33 Odvoďte vzorec pro práci pružné síly z Hookeho zákona integrací (7.21).

Otázka 7.34 Jaký vzorec platí při působení další síly \vec{F} (kromě pružné síly) na dané těleso, když jeho kinetická energie na začátku a na konci sledovaného časového intervalu je nulová? (7.22)

Otázka 7.35 Oddíl 7.11. Co je to výkon? V jakých jednotkách se udává?

Otázka 7.36 Uveďte vzorce pro průměrný a okamžitý výkon (7.23, 7.24).

Otázka 7.37 Odvoďte vztah mezi okamžitým výkonem a polohou $x(t)$ při přímočarém pohybu tělesa. Odpověď:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d(F \cdot \cos \alpha \cdot x(t))}{dt} = F \cdot \cos \alpha \cdot \frac{dx(t)}{dt} = F \cdot \cos \alpha \cdot v(t).$$

Otázka 7.38 Jaký je vztah mezi okamžitým výkonem a rychlostí tělesa? (7.25 a), b))

Otázka 7.39 Oddíl 7.12. Co jsou to inerciální vztažné soustavy?

Otázka 7.40 Co jsou to invariatní veličiny? Uveďte příklad.

Otázka 7.41 Které čtyři veličiny (například) nejsou invariantní?

Otázka 7.42 Co je to princip invariance?

Otázka 7.43 Jaký vliv má princip invariance na veličiny, které nejsou invariantní?

Otázka 7.44 Příklad Soni s knihou ve výtahu jedoucím nahoru a Štěpána stojícího na balkonu: vysvětlete hodnoty kinetické energie knihy a práce na ni vykonané z pohledu Soni a z pohledu Štěpána.

Cvičení ke kapitole bude dodáno později, až po dokončení celého textu. Přehled cvičení k této kapitole:

F.17 Oddíly 7.1, 7.2, 7.3: kinetická energie a práce.

F.18 Práce tíhové síly (7.4).

F.19 Práce proměnné síly (7.5).

M.12 Funkce $y = \ln x$, $y = e^x$ a jejich vlastnosti (7.6).

M.13 Neurčitý integrál, integrační metody.

M.14 Řešení některých jednoduchých diferenciálních rovnic (rovnice se separovatelnými proměnnými, lineární rovnice 1. řádu).

M.15 Výpočet určitého integrálu.

M.16 Výpočet obsahu plochy.

F.20 Práce pružné síly (7.10).

F.21 Výkon (7.11).

8 Potenciální energie, zákon zachování energie

V rámci kapitoly je probrána parametrizace křivek v prostoru a křivkový integrál 1. a 2. druhu. Z fyzikálních témat je pozornost soustředěna na potenciální energii hmotného bodu, zákon zachování energie mechanické soustavy. Kapitola pak končí úvahami o zákonu zachování energie dané součtem vnější (= mechanické) a vnitřní (= tepelné) energie.

Jedním z nebezpečných sportů je bungee-jumping („zaražené skákání“). Skokan připoutaný k speciálnímu pružnému lanu se vrhá dolů z velké výšky, většinou z vysokých mostních konstrukcí. Napínající se lano způsobí zbrzdění střemhlavého letu. Jak lze zjistit, jaké největší hloubky skokan dosáhne?

8.1 Potenciální energie

Zatímco pohybová (kinetická) energie souvisí s výslednicí všech sil, které na danou částici (bodový objekt) působí, potenciální energie souvisí s konfigurací (= vzájemnou polohou) částice (objektu) s jiným objektem (například Zemí), se kterým na sebe navzájem působí gravitačními silami.

Například: potenciální energie činky vzhledem k zemi – když vzpěrač drží činku ve výšce 2 m nad zemí, je potenciální energie činky jiná, než kdyby činka ležela na zemi. Konfigurace (neboli vzájemný vztah, vzájemná poloha) mezi činkou a Zemí je rozdílná v obou situacích.

Jiný příklad: Protážená pružina má jinou potenciální energii (navzájem mezi svými závitů), než v nenapjatém stavu. Tyto situace představují odlišné konfigurace mezi sousedními závitů pružiny navzájem, respektive mezi kostkou natahující-stlačující pružinu a upevněným koncem pružiny.

Vraťme se k příkladu jablka vrženého svisle vzhůru (viz oddíl 7.4 ... práce tíhové síly) – jak už tam bylo řečeno, při stoupání jablka koná tíhová síla zápornou práci, kdežto při klesání jablka kladnou. Nyní si položme další otázku: co lze říci o vzájemné konfiguraci (poloze) jablka a země v obou fázích pohybu?

Pokud je jablko vrženo svisle vzhůru, tak při stoupání jablka

- tíhová síla koná zápornou práci;
- kinetická energie jablka klesá;
- potenciální energie jablka vzhledem k zemi roste.

Ve fázi klesání jablka

- tíhová síla koná kladnou práci;
- kinetická energie jablka roste;
- potenciální energie jablka vzhledem k zemi klesá.

Zpřesněme nyní tyto úvahy: **Tíhová potenciální energie soustavy těleso + Země je záporně vzatá práce vykonaná interakčními tíhovými silami \vec{F}_g a $-\vec{F}_g$** ; označujeme ji E_p a pro její změnu ΔE_p platí vzorec

$$\Delta E_p = -W_g \quad (8.1)$$

(vždy mějme na paměti, že potenciální energie se týká soustavy dvou těles či objektů).

Příklad stlačené či protažené pružiny (= vzájemné konfigurace kostky upevněné na volném konci pružiny a pevného konce pružiny):

- pokud udeříme do kostky tak, že dojde ke stlačení pružiny, kinetická energie kostky postupně klesá, ale roste pružná potenciální energie soustavy kostka–pružina;
- až se kostka se stlačenou pružinou zastaví, vlivem pružné síly se začne pružina roztahovat, tj. roste kinetická energie kostky, klesá potenciální energie soustavy kostka–pružina;
- v okamžiku, kdy se kostka vlivem stlačené pružiny zastavila, byla její kinetická energie nulová, ale potenciální energie soustavy kostka–pružina byla maximální, co se týká velikosti její absolutní hodnoty (když vezmeme v úvahu i znaménko, byla maximálně kladná nebo maximálně záporná).

Shrňme si popisované dvě situace zavedením či upřesněním dalších pojmů:

1. Soustava = dva nebo více objektů;
2. Sledovaný objekt (jablíčko, kostka) a zbytek soustavy na sebe navzájem působí interakčními silami;
3. Při změně konfigurace soustavy konají interakční síly práci W_1 a mění se kinetická energie E_k daného objektu;
4. Při obrácení směru konfigurace (= směru změn konfigurace) soustavy konají interakční síly práci W_2 .

Interakční síly se nazývají **konzervativní síly**, jestliže za všech okolností platí $W_1 = -W_2$. Příkladem jsou obě popisované situace – tíhová síla i pružná síla. V opačném případě se interakční síly nazývají **nekonzervativní**.

Příkladem nekonzervativních sil jsou třecí síly: kostka se pohybuje po podlaze, která není dokonale hladká. Vlivem třecích sil, kterými na sebe navzájem působí podlaha a kostka podél styčných ploch, se kinetická energie kostky snižuje, až je nulová při zastavení kostky – spotřebovala se na zvýšení vnitřní energie soustavy kostka–podlaha, což se projevilo zvýšením teploty obou těles. ALE opačný proces není možný – ochlazením kostky ji nelze znovu uvést do pohybu po podlaze (vnitřní energie soustavy podlaha + kostka není potenciální energií).

8.2 Výklad – křivkový integrál prvního druhu

Vzorec 7.14 výpočtu práce vykonané při přesunu objektu po úsečce lze rozšířit i na situaci, kdy objekt (či částici) přesunujeme po jakékoliv křivce v prostoru:

$$W = \int_{\vec{l}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l}. \quad (8.2)$$

Vztah 8.2 představuje **výpočet práce při působení síly \vec{F} a přesunu objektu ve směru orientované křivky \vec{l}** . Jedná se o tzv. křivkový integrál 2. druhu. Dovolte mi podat ještě základní informaci o křivkách v prostoru a o tom, jaký je vztah mezi křivkovým integrálem prvního a druhého druhu.

Pod křivkou budeme rozumět graf vektorové funkce $\vec{\varphi}(t)$ definované pro $t \in \langle a; b \rangle$; pokud daná křivka leží v třírozměrném prostoru, platí

$$\vec{\varphi}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)] \quad \text{pro } t \in \langle a; b \rangle.$$

Funkce $\vec{\varphi}(t)$ se nazývá parametrizace křivky l .

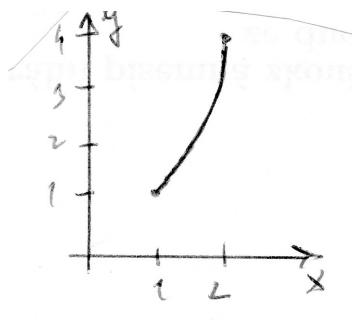
Příklad 8.1 a) Určete parametrické vyjádření křivky zadané jako funkce $y = x^2$ pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

b) Určete parametrické vyjádření přímky procházející body $A = [1, 2, 3]$, $B = [5, 6, 8]$.

c) Určete parametrické vyjádření úsečky AB s krajními body $A = [1, 2, 3]$, $B = [5, 6, 8]$.

d) Najděte parametrizaci kružnice se středem $[2, 5]$ a poloměrem 3 cm (jednotky na obou osách v rovině jsou centimetry).

ad a) Křivka je částí grafu funkce jedné proměnné $f(x) = x^2$ – viz obrázek 8.36. V tomto



Obr. 8.36: K příkladu 8.1(a) – křivka jako část grafu funkce.

případě lze parametrizaci vždy volit ve tvaru $\vec{\varphi}(t) = [t, f(t)]$; v našem příkladu pro $f(x) = x^2$ máme $\vec{\varphi}(t) = [t, t^2]$ pro $t \in \langle 1; 2 \rangle$.

Zde je možná vhodné dodat, že parametrizace křivky není jednoznačná – jednu křivku můžeme popsat různými parametrizacemi. V našem příkladu je

- $\vec{\varphi}(t) = [t^2, t^4]$ pro $t \in \langle 1; \sqrt{2} \rangle$ opět parametrizací křivky z obrázku 8.36;
- $\vec{\varphi}(t) = [t^3, t^6]$ pro $t \in \langle 1; \sqrt[3]{2} \rangle$ opět parametrizací křivky z obrázku 8.36;
- $\vec{\varphi}(t) = [t + 1, (t + 1)^2]$ pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$ opět parametrizací křivky z obrázku 8.36.

Zkrátka pro danou křivku je možné svolit takovou parametrizaci z těch nekonečně mnoha, která se vám líbí nejvíc (jak říká William Shakespeare, as you like it).

ad b) Přímka ve třírozměrném prostoru jiné než parametrické vyjádření nemá, snad se tedy jedná o úkol čtenáři známý z analytické geometrie. Ke konstrukci parametrizace $\vec{\varphi}$ budeme potřebovat souřadnice bodu ležícího na této přímce (vezměme třeba $A = [1, 2, 3]$) a souřadnice směrového vektoru (vezměme třeba $\vec{AB} = (4, 4, 5)$). Pak pro parametr $t \in R$ jsou parametrické rovnice této přímky

$$\begin{aligned}x &= 1 + t \cdot 4, \\y &= 2 + t \cdot 4, \\z &= 3 + t \cdot 5.\end{aligned}$$

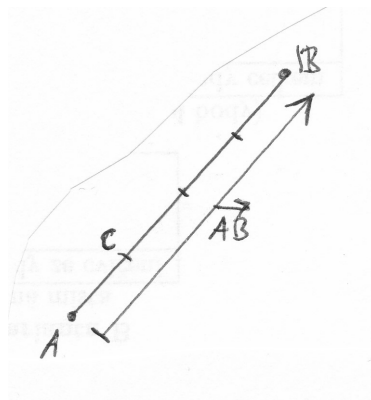
Nyní parametrizaci přímky vytvoříme, když tyto souřadnice přímky napíšeme do vektoru:

$$\vec{\varphi}(t) = [1 + 4t, 2 + 4t, 3 + 5t], \quad \text{kde } t \in R.$$

ad c) Parametrizace úsečky je podobná jako parametrizace přímky v úkolu (b), pouze si musíme dát pozor, abychom

- za vybraný bod volili jeden z krajních bodů úsečky, například bod A ;
- za směrový vektor volili takový vektor, který „posunuje“ vybraný bod A směrem „po úsečce“, např. \vec{AB} .

Parametrizace je pak stejná, $\vec{\varphi}(t) = [1 + 4t, 2 + 4t, 3 + 5t]$ jako v příkladu (b), ovšem parametr t nyní „neprobíhá“ celou reálnou osu, nýbrž jen určitý interval – viz obrázek 8.37:



Obr. 8.37: K příkladu 8.1(c) – parametrizace úsečky.

$t = 0$: jedná se o bod A .

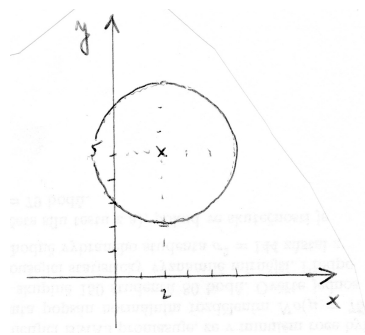
$t = \frac{1}{4}$: Bod A se posune o $\frac{1}{4}$ délky vektoru \vec{AB} , tj. do bodu C .

$t = 1$: Bod A se posune právě o vektor \vec{AB} , tj. do bodu B .

Celkem tedy vidíme, že $t \in \langle 0; 1 \rangle$.

ad d) Hledaná parametrizace vychází z popisu bodů na kružnici se středem v počátku a poloměrem r – tyto body mají souřadnice $[x, y] = [r \cdot \cos t, r \cdot \sin t]$ pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$... to plyne z vlastností goniometrických funkcí (viz kapitoly 2 a 3) z pravoúhlého trojúhelníka tvořeného bodem $[x, y]$, počátkem soustavy souřadnic a patou kolmice z bodu $[x, y]$ na osu x .

Dále pokud střed kružnice neleží v počátku, ale v bodě $[2, 5]$, tak celou konstrukci vytvořenou výše (pro $r = 3$ pouze posuneme o hodnoty odpovídající souřadnicím středu (obr. 8.38):



Obr. 8.38: K příkladu 8.1(d) – parametrizace kružnice.

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3 \cos t, \\ y &= 5 + 3 \sin t, \quad \text{pro } t \in \langle 0; 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Parametrizace má tedy tvar

$$\vec{\varphi}(t) = [2 + 3 \cos t, 5 + 3 \sin t], \quad \text{pro } t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Křivku l (zadanou jako graf parametrizace $\vec{\varphi}(t)$ pro $t \in I$) nazýváme

- **jednoduchou**, pokud pro každé navzájem různé body $t_1, t_2 \in I$ (příčemž aspoň jeden z bodů t_1, t_2 je vnitřním bodem intervalu I) platí $\vec{\varphi}(t_1) \neq \vec{\varphi}(t_2)$... jedná se tedy o křivku, která sama sebe neprotíná v žádném vnitřním bodě;
- **ukončenou**, má-li l konečnou délku;
- **uzavřenou**, je-li l ukončená, $I = \langle a; b \rangle$ a platí $\vec{\varphi}(a) = \vec{\varphi}(b)$;

- **hladkou**, je-li l ukončená a vektor derivace $\vec{\varphi}'(t)$, který není pro žádné $t \in (a; b)$ roven nulovému vektoru, je vektorem spojitých funkcí;
- **po částech hladkou**, je-li l sjednocením dvou a více (ale konečně mnoha) hladkých křivek.

V dalším se budeme zabývat jen křivkami ideálních vlastností, tj. jednoduchými po částech hladkými křivkami.

Nyní můžeme už přistoupit k vysvětlení, co je to **křivkový integrál 1. druhu** – jedná se o neorientovaný křivkový integrál v R^3 (nebo R^2) ze skalární funkce $f(x, y, z)$ (nebo v případě R^2 funkce $f(x, y)$).

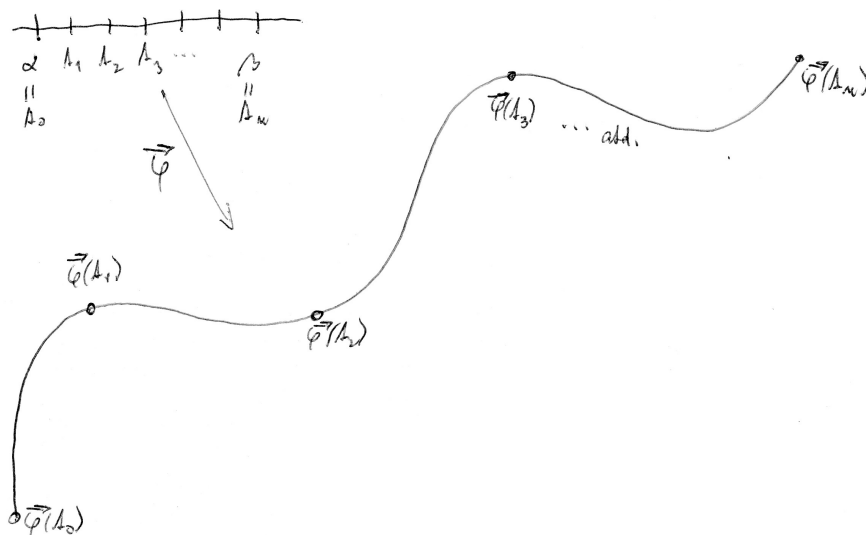
Podme se stručně podívat na označení, sestavení a výpočet křivkového integrálu 1. druhu v prostoru R^3 : Křivka l je zadaná parametrizací

$$\vec{\varphi}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)] \quad \text{pro } t \in \langle \alpha; \beta \rangle$$

a je to hladká křivka se spojitou a nenulovou derivací $\vec{\varphi}'(t)$ v intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$. Dále je dána spojitá reálná funkce $f(x, y, z)$ ohraničená na křivce l , která udává např. hustotu rozložení hmoty (nebo hustotu rozložení elektrického náboje) na křivce l .

Chceme určit hmotnost křivky (nebo celkový obsah elektrického náboje na křivce) ... označme tuto hodnotu jako křivkový integrál 1. druhu (= neorientovaný) $\int_l f(x, y, z) dl$.

Nyní nějaké dělení intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$ na podintervaly $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$ šířky $d = t_i - t_{i-1} = \frac{\beta - \alpha}{n}$ (viz obrázek 8.39), kde $\alpha = t_0$ a $\beta = t_n$, rozdělí křivku l na části

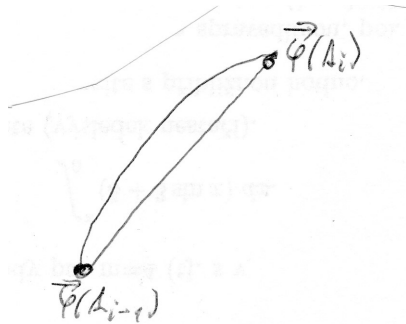


Obr. 8.39: K odvození neorientovaného křivkového integrálu.

$\vec{\varphi}(t_0)\vec{\varphi}(t_1)$, $\vec{\varphi}(t_1)\vec{\varphi}(t_2)$, ..., $\vec{\varphi}(t_{n-1})\vec{\varphi}(t_n)$. Pro dostatečné jemné dělení $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$ intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$ dostaneme dělení křivky l na dostatečně

malé části $\vec{\varphi}(t_0)\vec{\varphi}(t_1)$, $\vec{\varphi}(t_1)\vec{\varphi}(t_2)$, \dots , $\vec{\varphi}(t_{n-1})\vec{\varphi}(t_n)$, takže na každé z částí $\vec{\varphi}(t_{i-1})\vec{\varphi}(t_i)$ nahradíme

- proměnnou funkci $f(x, y, z)$ konstantní hodnotou $f(\vec{\varphi}(c_i))$ neboli hodnotou $f(\varphi_1(c_i), \varphi_2(c_i), \varphi_3(c_i))$, kde c_i je nějaký bod (tzv. reprezentant) z intervalu $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$;
- délku části křivky $\vec{\varphi}(t_{i-1})\vec{\varphi}(t_i)$ délkou úsečky $\overline{\vec{\varphi}(t_{i-1})\vec{\varphi}(t_i)}$ neboli hodnotou $|\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1})|$ (obrázek 8.40).



Obr. 8.40: Délku části křivky nahradíme zhruba délkou úsečky.

Pak hmotnost části křivky $\vec{\varphi}(t_{i-1})\vec{\varphi}(t_i)$ (resp. množství el. náboje na této části) se přibližně rovná hodnotě

$$f(\vec{\varphi}(c_i)) \cdot |\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1})|,$$

a tedy součtem těchto hodnot přes jednotlivé části křivky dostaneme, že celková hmotnost křivky l (resp. celkové množství náboje na křivce l) se přibližně rovná součtu

$$S \doteq \sum_{i=1}^n f(\vec{\varphi}(c_i)) \cdot |\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1})|.$$

Provedeme nyní drobnou úpravu, která nezmění hodnotu daného výrazu, a sice každý člen součtu vynásobíme i vydělíme hodnotou $(t_i - t_{i-1})$, dostaneme

$$S \doteq \sum_{i=1}^n f(\vec{\varphi}(c_i)) \cdot \left| \frac{\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Nyní limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$, tedy pro $d = (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$, tj. pro stále jemnější dělení křivky l na její části dostaneme:

$$\begin{array}{ccccccc} S = & \sum_{i=1}^n & f(\vec{\varphi}(c_i)) & \cdot \left| \frac{\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| & \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \int_l f(x, y, z) dl = & \int_{\alpha}^{\beta} & f(\vec{\varphi}(t)) & \cdot |\vec{\varphi}'(t)| & dt \end{array}$$

(limitním přechodem pro $d = \frac{\beta - \alpha}{n} \rightarrow 0$, pokud tato limita existuje a nezávisí na výběru reprezentantů c_i z intervalů $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$, jsme odvodili vzorec pro výpočet křivkového integrálu 1. druhu). Jedná se o vzorec pro vektory a funkce v dimenzi 3 (ovšem podobný vzorec by platil i v dimenzi 2):

$$\int_l f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \cdot |(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t))| dt. \quad (8.3)$$

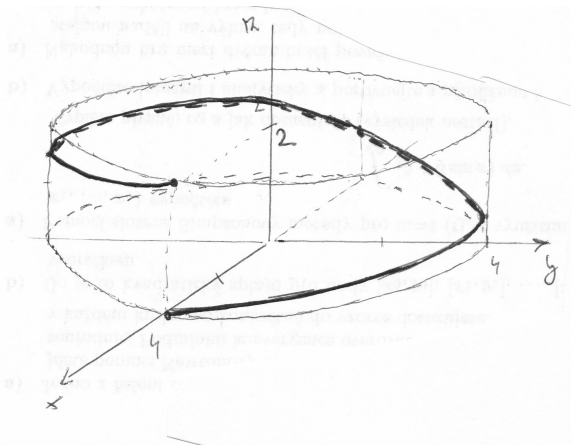
Připomeňme ještě, že velikost vektoru $(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t))$ vypočteme klasicky jako odmocninu ze součtu druhých mocnin jeho jednotlivých souřadnic (viz následující příklad).

Ze vzorce 8.3 speciálně plyne, že délku křivky l spočteme, když zvolíme funkci $f(x, y, z) = 1$, tj. na základě vztahu

$$d(l) = \int_l dl = \int_{\alpha}^{\beta} |(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t))| dt. \quad (8.4)$$

Pomocí vzorce 8.3 se křivkový integrál prvního druhu převede na klasickou jedno-rozměrnou integraci přes interval $\langle \alpha; \beta \rangle$ (integrál z reálné funkce jedné reálné proměnné) procvičovaný v kapitole 7.

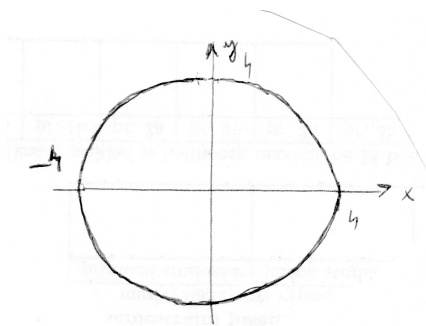
Příklad 8.2 Vypočtěte $\int_l x^2 y^2 dl$, kde l je závit šroubovice na válcové ploše s osou z a poloměrem 4 (viz obr. 8.41 – závit prochází od bodu $[4, 0, 0]$ do bodu $[4, 0, 2]$, tj. jeho výška je rovna 2 výškové jednotky).



Obr. 8.41: K příkladu 8.2 – šroubovice na povrchu válce.

Řešení: délku tohoto závitu lze určit z paměti rozvinutím pláště válce do roviny – pak je závit roven délce přepony trojúhelníku, jehož výška je rovna 2 a délka základové odvěsny je rovna $2\pi \cdot r$, tj. 8π . Ovšem pokud integrujeme nikoli hodnotu 1, ale funkci $f(x, y, z) = x^2 \cdot y^2$, nevyhneme se výpočtu (nesmíme zapomenout, že popisujeme situaci ve třírozměrném prostoru, přestože proměnná z ve vzorci funkce f nevystupuje).

- (i) Budeme potřebovat nějakou parametrizaci $\vec{\varphi}(t)$ našeho závitu válcové plochy. Začneme průmětem závitu do roviny podstavy válce x, y : je to kružnice se středem v počátku a poloměrem 4, kterou parametrizovat umíme, jelikož jsme se to naučili v příkladu 8.1 (viz obrázek 8.38). Pomocí tohoto průmětu



Obr. 8.42: K příkladu 8.2 – průmět šroubovice do roviny proměnných x, y .

lze popsat první dvě souřadnice parametrizace:

$$\vec{\varphi}(t) = (4 \cdot \cos t, 4 \cdot \sin t, ??), \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

(čili parametr t hraje roli měnícího se úhlu).

- (ii) Třetí souřadnice bodů závitu rovnoměrně roste s výškou závitu ... a je potřeba tento rovnoměrný růst vyjádřit pomocí t z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, neboť tento interval je určující pro první dvě souřadnice. Pravděpodobně bude třetí souřadnice $\varphi_3(t)$ parametrizace křivky tvaru $\varphi_3(t) = \text{const} \cdot t$, protože funkce tohoto tvaru je funkcí přímé úměrnosti, která vyjadřuje rovnoměrný nárůst. V krajních bodech intervalu $\langle 0; 2\pi$ bychom potřebovali dosáhnout funkčních hodnot $\varphi_3(0) = 0$ (pro počáteční t je „výška“ φ_3 bodu křivky nulová), $\varphi_3(2\pi) = 2$ (pro počáteční t je „výška“ φ_3 bodu křivky maximální, tj. je rovna hodně 2). Tyto požadavky odpovídají konstantě $\text{const} = \frac{2}{2\pi}$, tj. $\varphi_3(t) = \frac{2}{2\pi} \cdot t = \frac{1}{\pi} \cdot t$, pak totiž

$$\varphi_3(2\pi) = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2,$$

tedy požadavek na to, aby koncový bod křivky byl dosažen pro $t = 2\pi$, je splněn. Parametrizací našeho závitu je vektorová funkce

$$\vec{\varphi}(t) = \left(4 \cdot \cos t, 4 \cdot \sin t, \frac{t}{\pi} \right) \quad \text{pro } t \in \langle 0; 2\pi \rangle,$$

její derivací je vektorová funkce

$$\vec{\varphi}'(t) = (-4 \cdot \sin t, 4 \cdot \cos t, \frac{1}{\pi}),$$

jejíž velikost vypočteme na základě Pythagorovy věty⁷ jako

$$|\vec{\varphi}'(t)| = \sqrt{4^2 \sin^2 t + 4^2 \cos^2 t + \frac{1}{\pi^2}} = \sqrt{\frac{16\pi^2 + 1}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{16\pi^2 + 1}}{\pi}.$$

(iii) Můžeme se pustit do výpočtu (do funkce $f(x, y, z)$ dosadíme parametrizaci $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$). Pro integraci naší funkce využijeme vzorce pro snížení mocniny goniometrických funkcí – viz kapitolka 7.9. Vzorec užitíme dokonce dvakrát za sebou – pro náhradu funkcí $\cos^2 t$, $\sin^2 t$, a potom pro náhradu funkce $\cos^2 2t$:

$$\begin{aligned} \int_l x^2 y^2 dl &\stackrel{8.3}{=} \int_0^{2\pi} 16 \cos^2 t \cdot 16 \sin^2 t \cdot \frac{\sqrt{16\pi^2 + 1}}{\pi} dt = \\ &= \frac{16^2}{\pi} \cdot \sqrt{16\pi^2 + 1} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt = \frac{64}{\pi} \cdot \sqrt{16\pi^2 + 1} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 2t) dt = \\ &= \frac{64}{\pi} \cdot \sqrt{16\pi^2 + 1} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4t) dt = \frac{64}{\pi} \cdot \sqrt{16\pi^2 + 1} \cdot \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{64}{\pi} \cdot \sqrt{16\pi^2 + 1} \cdot \pi = 64 \cdot \sqrt{16\pi^2 + 1}. \end{aligned}$$

Příklad 8.3 Vypočtěte $\int_l (x + y)dl$, kde l je obvod trojúhelníka ABC pro $A = [1; -1]$, $B = [2; -1]$, $C = [1; 0]$.

Řešení: Obrázek 8.43 nám bude inspirací v našem postupu:

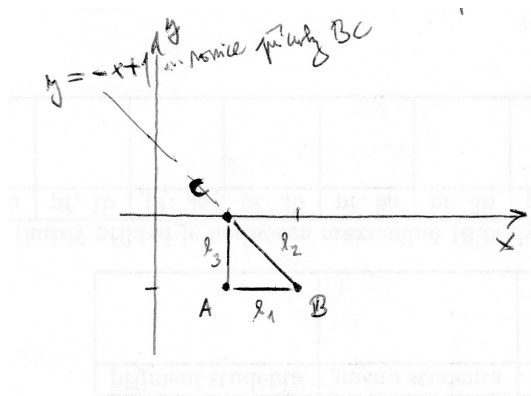
Křivka l není hladká, nýbrž po částech hladká – je složena ze tří hladkých částí. Každou z částí l_1 , l_2 , l_3 musíme popsat jinou parametrizací a užít vzorce, který zde dosud nebyl řečen, ale snad je přirozený:

$$\text{pro } l = l_1 \cup l_2 \cup l_3 : \int_l f(x, y) dl = \int_{l_1} f(x, y) dl_1 + \int_{l_2} f(x, y) dl_2 + \int_{l_3} f(x, y) dl_3. \quad (8.5)$$

(křivkový integrál 1.druhu přes křivku l je roven součtu integrálů přes její tři navzájem disjunktní části l_1 , l_2 , l_3). Pojdme tedy sestavit parametrizace:

$$\begin{aligned} l_1 : \vec{\varphi}(t) &= (t, -1) \text{ pro } t \in \langle 1; 2 \rangle; \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) = (1; 0) \Rightarrow |\vec{\varphi}'(t)| = 1; \\ l_2 : \vec{\varphi}(t) &= (t, 1 - t) \text{ pro } t \in \langle 1; 2 \rangle; \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) = (1; -1) \Rightarrow |\vec{\varphi}'(t)| = \sqrt{2}; \\ l_3 : \vec{\varphi}(t) &= (1, t) \text{ pro } t \in \langle -1; 0 \rangle; \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) = (0; 1) \Rightarrow |\vec{\varphi}'(t)| = 1. \end{aligned}$$

⁷Jsou studenti už schopni vypočítat délku tělesové úhlopříčky kvádrů? Podle vzorce $|(a, b, c)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Obr. 8.43: K příkladu 8.3 – křivkový integrál přes obvod trojúhelníka.

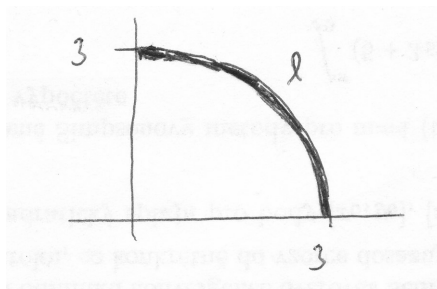
Možná je užitečné zde dodat, že parametrizace jednotlivých úseček může být skutečně libovolná, pouze při zápisu mezi pro parametr t musíme postupovat přirozeně, tedy levá = dolní mez musí být menší než pravá = horní mez. Pak můžeme provést výpočet:

$$\begin{aligned}
 \int_l (x+y) dl &= \int_{l_1} (x+y) dl_1 + \int_{l_2} (x+y) dl_2 + \int_{l_3} (x+y) dl_3 = \\
 &= \int_1^2 (t-1) \cdot 1 dt + \int_1^2 (t+1-t) \cdot \sqrt{2} dt + \int_{-1}^0 (1+t) \cdot 1 dt = \\
 &= \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^2 + \sqrt{2} + \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 = \\
 &= \frac{-1}{2} + 1 + \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

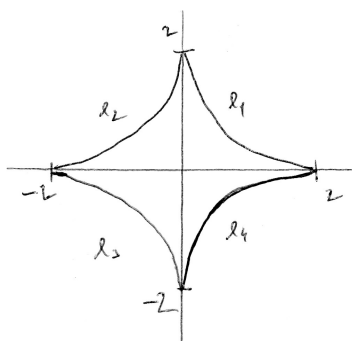
8.3 Cvičení – křivkový integrál 1.druhu

Úloha pro cvičení 01. Vypočtěte $\int_l x^2 \cdot y dl$, kde l je čtvrtkružnice se středem v počátku a krajními body $[0; 3]$, $[3; 0]$ – viz obr. 8.44.

Úloha pro cvičení 02. Vypočtěte $\int_l (\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{y^4}) dl$, kde l je asteroida daná parametrizací $\vec{\varphi}(t) = (2 \cos^3 t, 2 \sin^3 t)$ – viz obr. 8.45 (nebo jednodušší úloha: vypočtěte délku této asteroidy). Pozor, obrázek naznačuje, že asteroida má čtyři hroty, musíme ji proto rozdělit na čtyři hladké části a celkový integrál určit jako součet křivkových integrálů přes jednotlivé části.



Obr. 8.44: Ke cvičení 01 – křivkový integrál přes čtvrtkružnici.

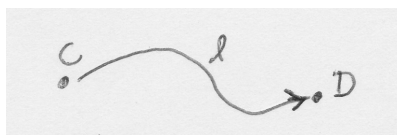


Obr. 8.45: Asteroida – ke cvičení 02.

8.4 Výklad – křivkový integrál 2. druhu – orientovaný

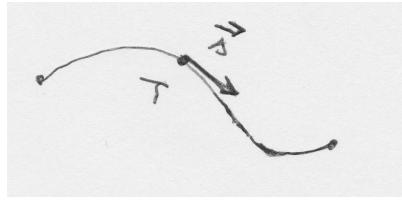
V každé parametrizaci je obsažena jistá vnitřní orientace křivky l (neboli orientace zadaná parametrizací) ... jedná se o to, že pro rostoucí hodnotu parametru t se „vykreslují“ body křivky $\vec{\varphi}(t)$ v jistém směru, takže lze stanovit ($t \in \langle \alpha; \beta \rangle$)

- počáteční bod C křivky l ... $C = \vec{\varphi}(\alpha)$;
- koncový bod D křivky l ... $D = \vec{\varphi}(\beta)$;
- vnitřní orientace křivky l je tedy dána od bodu C po křivce směrem k bodu D – viz obr. 8.46.



Obr. 8.46: Vnitřní orientace křivky zadaná počátečním a koncovým bodem.

Vnitřní orientaci křivky l lze kromě počátečního a koncového bodu zadat také tečným vektorem $\vec{\varphi}'(\gamma) = (\varphi'_1(\gamma), \varphi'_2(\gamma), \varphi'_3(\gamma))$ v nějakém bodě $\gamma \in \langle \alpha; \beta \rangle$, nebo jednotkovým tečným vektorem \vec{s} , který zkonstruujeme z vektoru $\vec{\varphi}'(\gamma)$ vynásobením převrácenou hodnotou



Obr. 8.47: Tečný vektor ke křivce v bodě T .

jeho velikosti (viz obr. 8.47):

$$\vec{s} = \frac{1}{|\vec{\varphi}'(\gamma)|} \cdot \vec{\varphi}'(\gamma) = \left(\frac{\varphi'_1(\gamma)}{|\vec{\varphi}'(\gamma)|}, \frac{\varphi'_2(\gamma)}{|\vec{\varphi}'(\gamma)|}, \frac{\varphi'_3(\gamma)}{|\vec{\varphi}'(\gamma)|} \right).$$

Zadání vnitřní orientace křivky tečným vektorem je výhodné například u uzavřené křivky, kdy počáteční a koncový bod křivky splývají, tj. orientace tečným vektorem je názornější.

Kromě vnitřní orientace křivky existuje i pojem vnější orientace křivky – ta je dána fyzikálním významem (např. směrem pohybu částice po trajektorii \vec{l} (takto budeme křivku s vnější orientací značit), směrem působení síly, apod.). U uzavřených křivek v rovině mluvíme dále o orientaci kladné (= proti směru pohybu hodinových ručiček na ciferníku hodin) nebo záporné.

Pokud hraje v dané situaci roli vnější (= fyzikální) orientace křivky \vec{l} , pro kombinaci vnější a vnitřní orientace křivky mohou nastat dvě možnosti:

- Křivka je orientována **souhlasně se svou parametrizací** ... vnější orientace je ve stejném směru jako vnitřní orientace křivky;
- Křivka je orientována **nesouhlasně se svou parametrizací** ... vnější orientace je v opačném směru než vnitřní orientace křivky.

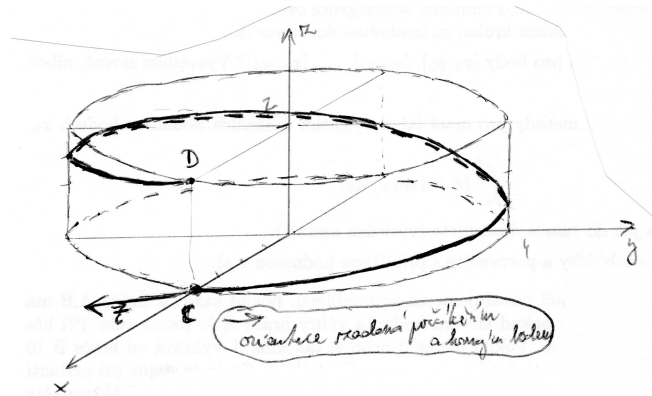
Orientace křivky hraje roli při výpočtu orientovaného křivkového integrálu, kdy je důležité, v jakém směru se částice pohybovala, v jakém směru bylo působením síly těleso přesunuto, apod.

Příklad 8.4 *Vnější orientace závitů šroubovice z příkladu 8.2 je zadána tečným vektorem*

$$\vec{\tau}(C) = \left(0, \frac{-4\pi}{\sqrt{16\pi^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{15\pi^2 + 1}} \right) \text{ pro } C = [4; 0; 0].$$

Zjistěte, zda je tato orientace souhlasná s parametrizací závitů.

Řešení: Vnitřní orientace (daná parametrizací) je určena počátečním bodem $C = [4, 0, 0]$ v rovině x, y a koncovým bodem $D = [4, 0, 2]$. Do obrázku 8.48 zbývá dokreslit tečný vektor $\vec{\tau}(C)$ a zjistit, zda leží ve směru „vykreslení“ křivky nebo ne. Můžeme uvážit, že



Obr. 8.48: K příkladu 8.4 – orientovaná šroubovice na válcové ploše.

- druhá souřadnice vektoru \vec{r} je záporná, tj. vektor ukazuje do záporného směru osy y ;
- třetí souřadnice vektoru \vec{r} je záporná, tj. vektor ukazuje do záporného směru osy z (= klesá pod základní rovinu x,y).

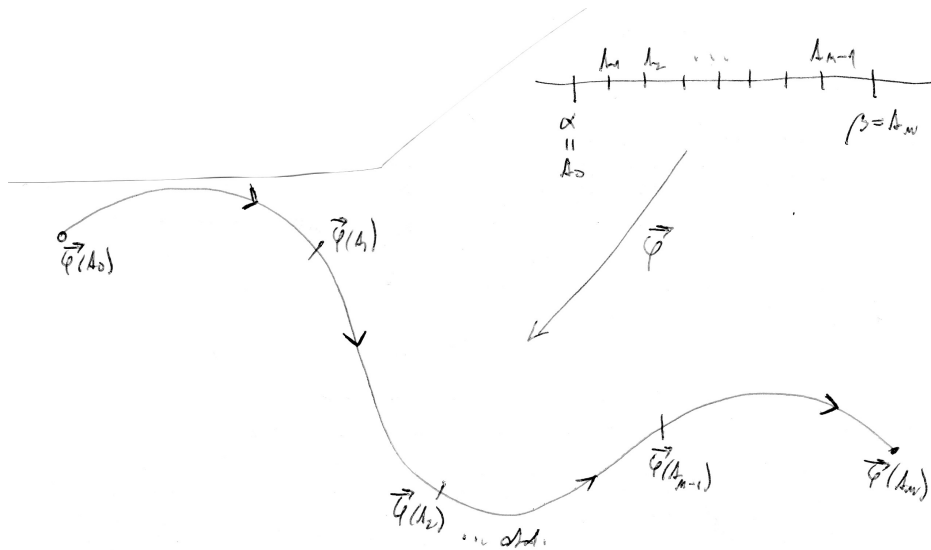
Ze dvou možných tečných směrů ke křivce v bodě C je tedy hledaný směr vektoru \vec{r} ten, co je vyznačen na obrázku – tedy vnější (fyzikální) orientace křivky je nesouhlasná s její parametrizací.

Odvodíme nyní vzorec pro výpočet orientovaného křivkového integrálu (= křivkového integrálu 2. druhu): Je dána vektorová funkce $\vec{E}(x, y, z) = (E_1(x, y, z), E_2(x, y, z), E_3(x, y, z))$ intenzity elektrického pole a chceme určit elektrické napětí U podél křivky \vec{l} . Respektive (druhý příklad reálné situace pro ty, kdo si neumí představit intenzitu) je dána síla $\vec{F}(x, y, z)$ působící na částici při pohybu po orientované křivce \vec{l} (vnější orientace) a chceme určit práci, kterou vykoná vektorové pole \vec{F} při přesunu částice po orientované křivce \vec{l} .

Označme dané elektrické napětí $U = \int_{\vec{l}} \vec{E}(x, y, z) d\vec{l}$, respektive označme danou vykonanou práci $W = \int_{\vec{l}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l}$... v obou příkladech se jedná o orientovaný křivkový integrál = křivkový integrál 2. druhu. V dalším budeme pokračovat v odvození výpočtu tohoto vzorce pro první z obou příkladů.

Dělení $\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = \beta$ určuje rozdělení křivky \vec{l} na orientované části $\vec{\varphi}(t_0) \rightarrow \vec{\varphi}(t_1)$ až $\vec{\varphi}(t_{n-1}) \rightarrow \vec{\varphi}(t_n)$ (obrázek 8.49).

Šipky udávají vnitřní orientaci křivky \vec{l} , vnější orientace je zadána počátečním a koncovým bodem, tedy $\vec{\varphi}(t_0) \rightarrow \vec{\varphi}(t_n)$ nebo $\vec{\varphi}(t_n) \rightarrow \vec{\varphi}(t_0)$ za předpokladu, že křivka není uzavřená. Pak pro dostatečně jemné dělení křivky \vec{l} můžeme na její části $\vec{\varphi}(t_{i-1}) \rightarrow \vec{\varphi}(t_i)$



Obr. 8.49: K odvození orientovaného křivkového integrálu.

- a) nahradit orientovaný oblouk $\vec{\varphi}(t_{i-1}) \rightarrow \vec{\varphi}(t_i)$ orientovanou úsečkou $\overline{\vec{\varphi}(t_{i-1})\vec{\varphi}(t_i)}$ (obrázek 8.50);



Obr. 8.50: Náhrada orientované části křivky orientovanou úsečkou.

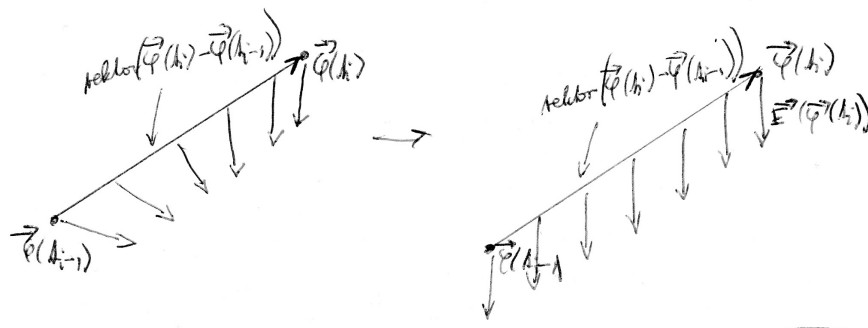
- b) nahradit proměnnou vektorovou funkci $\vec{E}(x, y, z)$ konstantním vektorem (viz obrázek 8.51)

$$\vec{E}(\vec{\varphi}(t_i)) = (E_1(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \varphi_3(t_i)), E_2(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \varphi_3(t_i)), E_3(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \varphi_3(t_i)))$$

Pak napětí podél orientovaného oblouku $\vec{\varphi}(t_{i-1}) \rightarrow \vec{\varphi}(t_i)$ se přibližně rovná hodnotě

$$U_i \doteq \begin{cases} \text{or. souhl. s param.} & : \vec{E}(\vec{\varphi}(t_i)) \cdot (\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1})) \\ \text{or. nesouhl. s param.} & : \vec{E}(\vec{\varphi}(t_i)) \cdot (\vec{\varphi}(t_{i-1}) - \vec{\varphi}(t_i)) = -\vec{E}(\vec{\varphi}(t_i)) \cdot (\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1})) \end{cases}$$

Tedy vzorce se souhlasnou a nesouhlasnou vnější orientací křivky vzhledem k její vnitřní parametrizaci se liší o znaménko. Celkové napětí U je nyní přibližně dáno součtem napětí



Obr. 8.51: Náhrada vektorové funkce konstantním vektorem.

na jednotlivých částech, tj.

$$U = \sum U_i \doteq \begin{cases} \text{or. s.} & : \sum_{i=1}^n \vec{E}(\vec{\varphi}(t_i)) \cdot \frac{(\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} \cdot (t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) dt; \\ \text{or. nes.} & : \sum_{i=1}^n \vec{E}(\vec{\varphi}(t_i)) \cdot \left[-\frac{(\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} \right] \cdot (t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) dt \end{cases}$$

(nesouhlasná vnější orientace s vnitřní parametrizací křivky mění znaménko integrálu).

Odvodili jsme tedy vzorec pro výpočet orientovaného křivkového integrálu (= křivkového integrálu 2. druhu). Tedy například v dimenzi 3 (v dimenzi 2 by chyběly třetí souřadnice vektorů v následujícím vzorci) a pro vnější orientaci souhlasnou s parametrizací (nesouhlasná orientace by změnila znaménko integrálu na záporné) platí:

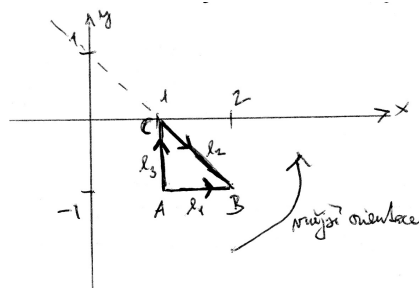
$$\int_{\vec{l}} \vec{E}(x, y, z) d\vec{l}^{\text{s.or.}} \doteq (E_1(\vec{\varphi}(t)), E_2(\vec{\varphi}(t)), E_3(\vec{\varphi}(t))) \cdot (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t)) dt \quad (8.6)$$

(výraz za znakem integrálu je vlastně skalární součin vektorů \vec{E} a $\vec{\varphi}'$). Tímto způsobem se křivkový integrál 2. druhu v prostoru převedl pomocí parametrizace $\vec{\varphi}(t)$ převedl na klasickou jednorozměrnou integraci funkce jediné proměnné t na intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$, kterou jsme procvičovali v kapitole 7.

Někdy se označení integrálu $\int_{\vec{l}} \vec{E}(x, y, z) d\vec{l}$ uvádí v jiném způsobu zápisu, ze kterého jsou zřejmé jednotlivé souřadnice vektoru \vec{E} :

$$\int_{\vec{l}} \vec{E}(x, y, z) d\vec{l} = \int_{\vec{l}} (E_1(x, y, z) dx + E_2(x, y, z) dy + E_3(x, y, z) dz) = \dots \text{ viz 8.6.} \quad (8.7)$$

Příklad 8.5 Vypočítejte $\int_{\vec{l}} (x+y, 0) d\vec{l}$, což je vzhledem k zápisu 8.7 totéž jako $\int_{\vec{l}} (x+y) dx + 0 \cdot dy$, kde \vec{l} je obvod trojúhelníka ABC orientovaný kladně ($A = [1; -1]$, $B = [2; -1]$, $C = [1; 0]$).



Obr. 8.52: K příkladu 8.5 – orientovaný obvod trojúhelníka.

Řešení: Křivka \vec{l} je sjednocením tří hladkých částí (viz obrázek 8.52), uijeme vzorec 8.5 (křivkový integrál je součtem integrálů přes jednotlivé hladké části křivky).

Na obrázku je šipkou vyznačena vnitřní orientace dané části daná její parametrizací. Jedná se o stejnou křivku jako v příkladu 8.3, tj. vezmeme tytéž parametrizace:

$$\begin{aligned} l_1: \vec{\varphi}(t) &= (t, -1) \text{ pro } t \in \langle 1; 2 \rangle; \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) = (1; 0) \Rightarrow |\vec{\varphi}'(t)| = 1; \\ l_2: \vec{\varphi}(t) &= (t, 1 - t) \text{ pro } t \in \langle 1; 2 \rangle; \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) = (1; -1) \Rightarrow |\vec{\varphi}'(t)| = \sqrt{2}; \\ l_3: \vec{\varphi}(t) &= (1, t) \text{ pro } t \in \langle -1; 0 \rangle \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) = (0; 1) \Rightarrow |\vec{\varphi}'(t)| = 1. \end{aligned}$$

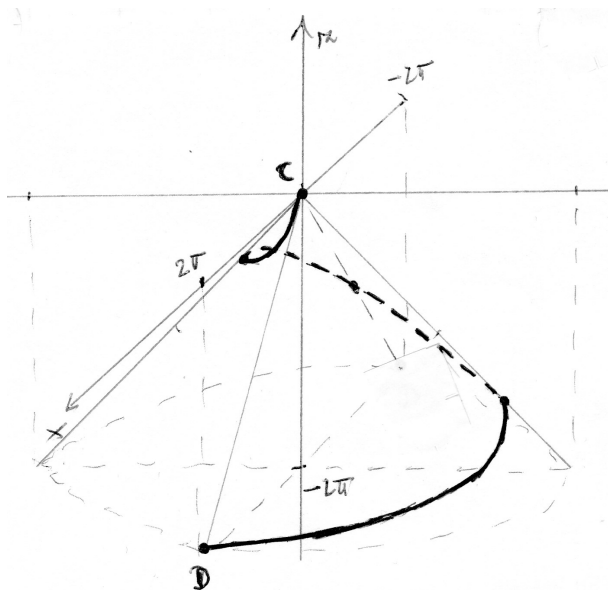
Na rozdíl od příkladu 8.3 je nyní ještě zadána vnější (asi fyzikální) orientace jako kladná (= proti směru pohybu hodinových ručiček), která je souhlasná s vnitřní orientací křivky l_1 , ale nesouhlasná s vnitřní orientací křivek l_2, l_3 , před jejichž integrály přidáme znaménko MINUS. Tedy celkem dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\vec{l}} (x + y, 0) d\vec{l} &= \int_{\vec{l}_1} (x + y, 0) d\vec{l} + \int_{\vec{l}_2} (x + y, 0) d\vec{l} + \int_{\vec{l}_3} (x + y, 0) d\vec{l} = \\ &= \int_1^2 (t - 1, 0) \cdot (1, 0) dt - \int_1^2 (t + 1 - t, 0) \cdot (1, -1) dt - \int_{-1}^0 (1 + t, 0) \cdot (0, 1) dt = \\ &= \int_1^2 (t - 1) dt - \int_1^2 1 dt - \int_{-1}^0 0 dt = \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^2 - 1 = \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

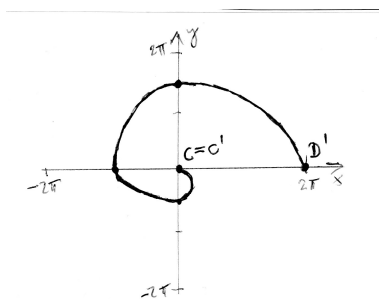
Při výpočtu je možné využít toho, že vektor $(x + y, 0)$ je vždy kolmý na křivku l_3 , tj. vždy je kolmý na její tečný vektor $\vec{\varphi}'(t) = (0; 1)$, a tedy jejich skalární součin (součin dvou kolmých vektorů) je roven nule, a tedy výsledek integrálu přes část \vec{l}_3 je roven nule – tak to vyšlo i při našem dosazení do dané části integrace.

Příklad 8.6 Vypočtete $\int_{\vec{l}} (x, y, z) d\vec{l}$, kde \vec{l} je jeden závit šroubovice na kuželové ploše (viz obrázek 8.53; obrázek je součástí zadání, aby bylo patrné, jakým způsobem se závit vykresluje a jakou má orientaci) s počátečním bodem $C = [0; 0; 0]$ a koncovým bodem $D = [2\pi; 0; -2\pi]$.

Řešení: Pokusme se nejprve si představit kolmý průmět závitu do roviny x, y – viz obrázek 8.54.



Obr. 8.53: K příkladu 8.6 – šroubovice na kuželové ploše.



Obr. 8.54: K příkladu 8.6 – kolmý průmět šroubovice do roviny proměnných x, y .

Pokud by vzdálenost bodů průmětu od počátku roviny x, y byla stále stejná, jednalo by se o kružnici, kterou bychom mohli parametrizovat pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$; ovšem vzdálenost bodů průmětu od počátku rovnoměrně klesá (pohybujeme-li se od bodu D' k bodu $C' = C$). Tedy pro dané $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ je potřeba příslušný bod na kružnici $(\cos t; \sin t)$ vynásobit hodnotou $(2\pi - t)$, abychom zajistili neustále klesající vzdálenost bodů průmětu od počátku při vykreslování průmětu od bodu D' k bodu $C' = C$:

$$\vec{\varphi}(t) = ((2\pi - t) \cdot \cos t, (2\pi - t) \cdot \sin t, ??), \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Zbývá určit třetí souřadnici naší parametrizace: z obrázku křivky v prostoru vidíme, že třetí souřadnice je záporná a rovnoměrně roste k nule, pokud body křivky „vykreslujeme“ = popisujeme směrem od bodu D k bodu C (musí to být stejný směr, jako „vykreslujeme“ = popisujeme body průmětu; není možné, aby jedna souřadnice parametrizace byla vykreslována v opačném směru jako ty ostatní dvě souřadnice). Mohli bychom ji tedy popsat

funkcí $\varphi_3(t) = t - 2\pi$ pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Celkem máme

$$\vec{\varphi}(t) = ((2\pi - t) \cdot \cos t, (2\pi - t) \cdot \sin t, t - 2\pi), \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Můžeme se pustit do výpočtu:

- a) Porovnáním zadané vnější orientace křivky s konstrukcí její parametrizace vidíme, že vnější orientace je s parametrizací nesouhlasná – před integrálem tedy bude znaménko MINUS.
- b) Tečný vektor ke křivce vypočteme derivací vektoru parametrizace (derivujeme podle proměnné t , první dvě souřadnice derivujeme podle vzorce pro derivaci součinu funkcí):

$$\vec{\varphi}'(t) = (-\cos t - (2\pi - t) \cdot \sin t, -\sin t - (2\pi - t) \cdot \cos t, 1).$$

c) Výpočet: $\int_{\vec{l}} f(x, y, z) d\vec{l} =$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{2\pi} \underbrace{(2\pi - t) \cdot \cos t, (2\pi - t) \cdot \sin t, t - 2\pi) \cdot (-\cos t - (2\pi - t) \cdot \sin t, -\sin t - (2\pi - t) \cdot \cos t, 1)}_{\substack{= (t - 2\pi) \cdot \cos^2 t - (t - 2\pi)^2 \sin t \cos t \\ + (t - 2\pi) \cdot \sin^2 t + (t - 2\pi)^2 \sin t \cos t \\ + t - 2\pi}} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (4\pi - 2t) dt = [4\pi t - t^2]_0^{2\pi} = 4\pi^2. \end{aligned}$$

8.5 Cvičení – křivkový integrál 2. druhu – orientovaný

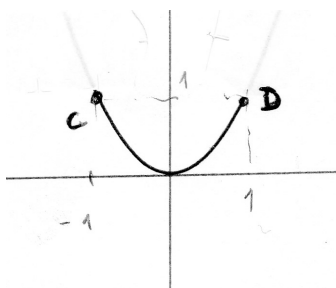
Úloha pro cvičení 03. Vypočtěte $\int_{\vec{l}} (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy) d\vec{l}$, kde \vec{l} je oblouk paraboly s počátečním bodem $C = [-1; 1]$ a koncovým bodem $D = [1; 1]$ – viz obrázek 8.55.

Úloha pro cvičení 04. Vypočtěte $\int_{\vec{l}} (x, y, x + y - 1) d\vec{l}$, kde \vec{l} je úsečka s počátečním bodem $C = [1; 1; 1]$ a koncovým bodem $D = [2; 3; 4]$ – viz obrázek 8.56.

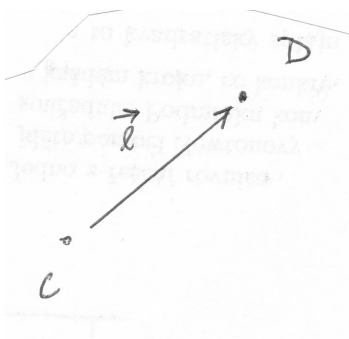
8.6 Nezávislost práce konzervativních sil na trajektorii. Výpočet hodnot potenciální energie.

Jiný způsob definice konzervativní síly můžeme vyslovit na základě uzavřené křivkové dráhy, po které tato síla působí:

Práce vykonaná konzervativní silou na částici, která se pohybuje po libovolné (8.8) uzavřené (po částech hladké) trajektorii, je nulová.



Obr. 8.55: Ke cvičení 03 – orientovaná část paraboly.



Obr. 8.56: Ke cvičení 04 – orientovaná úsečka.

Právě uvedený poznatek vlastně znamená, že kinetická energie tělesa-částice se v souhrnu nezmění. Například:

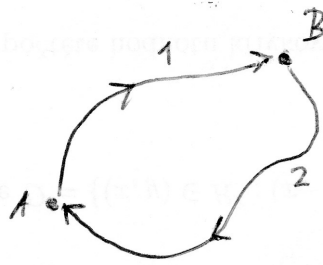
- práce vykonaná gravitační silou Slunce při pohybu Země po eliptické oběžné dráze (při jednom oběhu eliptické dráhy) je nulová;
- práce při pohybu po trajektorii, kterou opíše jablko vyhozené svisle vzhůru, je nulová. Vyhodíme-li jablko rychlostí v_0 svisle vzhůru, jeho počáteční kinetická energie je $\frac{1}{2}mv_0^2$, během výstupu jablka tíhová síla spotřebovává práci W_1 ($W_1 < 0$), při jeho zpětném pádu kinetická energie jablka roste a v okamžiku dopadu je opět rovna $\frac{1}{2}mv_0^2$, při zpětném pádu tíhová síla vykonala práci $W_2 > 0$, $W_2 = -W_1$.

Uzavřená trajektorie je obecně složena z částí 1, 2 – viz obr.8.57. Pokud je síla působící přesun objektu-částice konzervativní, platí $W_{AB,1} + W_{BA,2} = 0$, kde $W_{AB,1}$ je práce vykonaná při přesunu objektu od A do B po křivce 1, $W_{BA,2}$ je práce vykonaná při přesunu z B do A po křivce 2. Můžeme analogicky psát

$$W_{AB,1} = -W_{BA,2} \quad (8.9)$$

(slovně: práce, kterou vykoná konzervativní síla při cestě částice z bodu A do bodu B , musí být rovna záporně vzaté práci při návratu částice).

Jinými slovy, pokud $W_{BA,2}$ je záporně vzatá hodnota $W_{AB,1}$, tak při pohybu po křivce 2 v opačném směru (tedy ve směru z A do B) musí být vykonána práce $W_{AB,1}$ se stejným



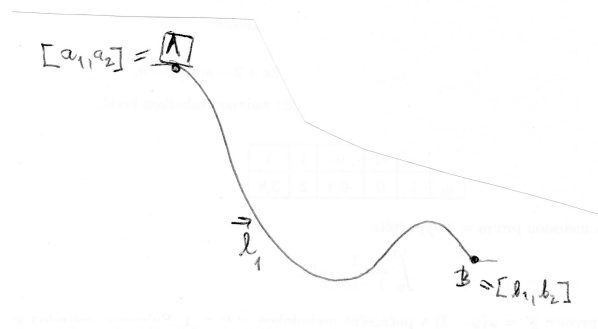
Obr. 8.57: Příklad uzavřené trajektorie pohybu částice.

znaménkem: $W_{AB,2} = -W_{BA,2}$, tj.

$$W_{AB,2} = W_{AB,1} \quad (8.10)$$

(práce konzervativní síly při pohybu částice z bodu A do bodu B nezávisí na trajektorii částice).

Příklad 8.7 Balíček o hmotnosti 2 kg klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B – viz obr. 8.58. Celková dráha (= délka orientované křivky \vec{l}) je rovna 2 m , svislá vzdálenost bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$ je rovna $(a_2 - b_2) = 0,8 \text{ m}$. Jakou práci vykoná při pohybu balíčku tíhová síla?

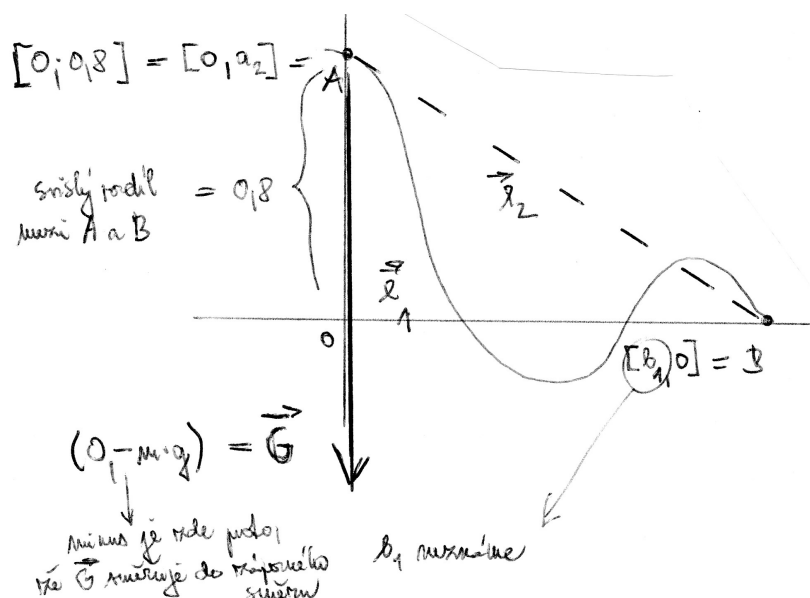


Obr. 8.58: K příkladu 8.7 – balíček na skluzavce.

Řešení: Tíhová síla je příkladem konzervativní síly, proto vykonaná práce nezávisí na tvaru trajektorie mezi body A, B . Proto místo křivky \vec{l} můžeme zvolit jednodušší křivku – např. orientovanou úsečku $A \rightarrow B$ (viz obr. 8.59).

Abychom mohli využít vzorce 8.6 pro výpočet práce, musíme

- zvolit soustavu souřadnic;
- vymyslet parametrizaci křivky \vec{l}_2 (viz obrázek 8.59).



Obr. 8.59: K příkladu 8.7 – rozbor řešení.

Parametrizaci sestavíme obdobně jako v příkladu 8.1 (c): Uvažujme $A = [0; 0,8]$ a vektor $\vec{AB} = (b_1 - 0; 0 - 0,8) = (b_1; -0,8)$.

Pak orientovaná úsečka $A \rightarrow B$ má parametrizaci $\vec{\varphi}(t) = A + t \cdot \vec{AB}$, tj.

$$\vec{\varphi}(t) = [0; 0,8] + t \cdot (b_1 - 0,8) \quad \text{pro } t \in \langle 0; 1 \rangle,$$

a tedy

$$\vec{\varphi}(t) = (0 + t \cdot b_1; 0,8 - t \cdot 0,8), \quad \text{pro } t \in \langle 0; 1 \rangle.$$

Budeme také potřebovat tečný vektor (= vektor derivované parametrizace) $\vec{\varphi}'(t) = (b_1; -0,8)$. Na základě vzorce 8.4 nyní platí

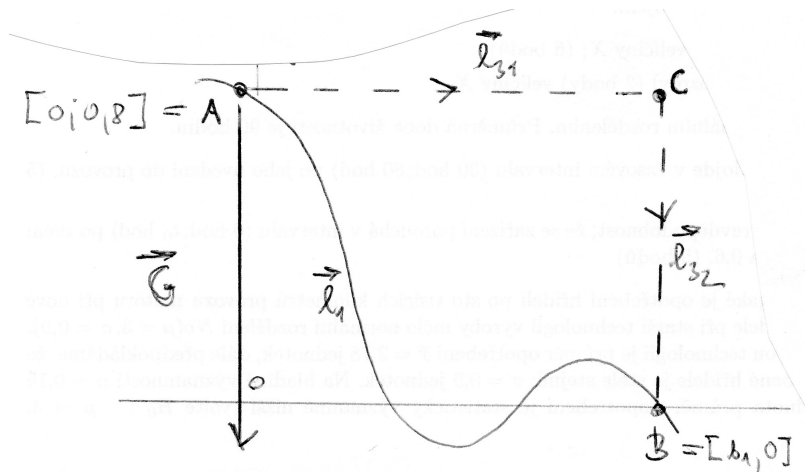
$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{l}_2} (0; -mg) d\vec{l}_2 = \int_{\vec{l}_2} (0; -mg) \cdot (b_1; -0,8) dt = \\ &= \int_0^1 [0 \cdot b_1 + mg \cdot 0,8] dt = m \cdot g \cdot 0,8 \cdot \int_0^1 dt = \\ &= 2 \cdot 9,80665 \cdot 0,8 \doteq 15,7 J. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že pokud je skluzavka dokonale hladká, vykonaná práce nezávisí na poloze b_1 , ale pouze na změně výšky (= druhé souřadnice) mezi body A , B .

Jiný způsob řešení: Protože výpočet práce nezávisí na křivce, lze místo \vec{l}_1 nebo \vec{l}_2 volit křivku \vec{l}_3 , která je sjednocením křivek $\vec{l}_{31} \cup \vec{l}_{32}$ – viz obr. 8.60. Parametrizujme křivku

$\vec{l}_{32}: C = [b_1; 0,8], \vec{CB} = (b_1 - b_1; 0 - 0,8) = (0; -0,8)$, tedy

$$\vec{l}_{32}: \vec{\varphi}(t) = (b_1 + t \cdot 0; 0,8 - 0,8t) \quad \text{pro } t \in \langle 0; 1 \rangle.$$

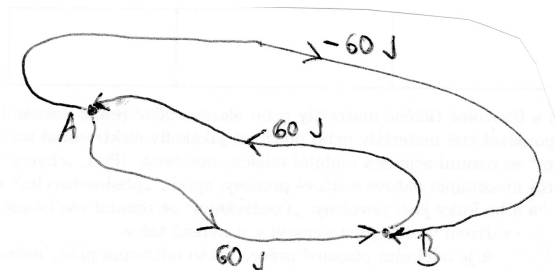


Obr. 8.60: K příkladu 8.7 – jiný způsob řešení.

A můžeme počítat:

$$\int_{\vec{l}} \vec{G} d\vec{l}_1 = \underbrace{\int_{\vec{l}_{31}} \vec{G} d\vec{l}_{31}}_{= 0, \text{ protože vektory } \vec{G} \text{ a } \vec{l}_{31} \text{ jsou kolmé}} + \int_{\vec{l}_{32}} \vec{G} d\vec{l}_{32} = \int_0^1 (0; -mg) \cdot (0; -0,8) dt = mg \cdot 0,8 = 15,7 J.$$

Kontrola 1. Obrázek 8.61 ukazuje tři cesty spojující body A a B. Síla \vec{F} vykoná při působení na částici pohybující se po daných trajektoriích práci, jejíž hodnota je také v obrázku vyznačena.



Obr. 8.61: Orientované trajektorie – ke kontrole 1 .

- a) Rozhodněte, zda je síla \vec{F} konzervativní.
- b) Dokázali byste rozhodnout i v případě, že by údaj u nejnižše zakresleného úseku byl (-60) J?

Vraťme se nyní ještě k výpočtu potenciální energie: Kombinací vzorců 8.1, 8.2, 8.6 dostaneme

$$\Delta E_p = - \int_{\vec{l}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l} = \begin{cases} \stackrel{s.or.}{=} - \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) dt; \\ \stackrel{nes.or.}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) dt. \end{cases} \quad (8.11)$$

Navíc při působení konzervativních sil vzorec 8.11 nezávisí na dané křivce, tj. většinou lze volit takový souřadný systém, že částice (objekt) se pohybuje ve směru osy x . Pak

- stačí zadat pouze počáteční x_i a koncovou x_f souřadnici polohy;
- též velikost síly \vec{F} závisí pouze na hodnotě jediné proměnné x (a uvažujeme situaci, kdy \vec{F} působí ve směru osy x).

Při praktických výpočtech tedy většinou lze převést 8.11 do tvaru

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \quad (8.12)$$

(praktický výpočet změny potenciální energie ve většině případů, kdy síla F působí na částici ve směru osy x , dále x_i je počáteční a x_f koncový bod její trajektorie).

Vzorec 8.12 vlastně nepotřebuje teorii křivkového integrálu 2. druhu probírané v této kapitole, ale vystačí si se základními metodami kapitoly 7 (8.12 je vlastně „převlečený“ vzorec 7.14, kombinací obou těchto vzorců dostaneme):

U konzervativních sil působících na částici (objekt) platí:

$$\text{Pokud kinetická energie objektu naroste o } \Delta E_k, \quad (8.13)$$

potenciální energie soustavy o stejnou hodnotu klesne, (tj. $\Delta E_p = -\Delta E_k$).

Podívejme se nyní na dva příklady situací, kdy dochází ke změně potenciální energie.

Situace A: Tíhová potenciální energie (= potenciální energie soustavy objekt + Země). V příkladu 8.7 jsme viděli, že změna potenciální energie souvisí pouze se změnou

vzdálenosti objektu od Země, tj. změnou na svislé souřadné ose y . Proto je rozumnější psát zde vzorec 8.12 spíše ve tvaru s proměnnou y , tj.

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= - \int_{y_i}^{y_f} (-m \cdot g) dy = m \cdot g \cdot \int_{y_i}^{y_f} dy = \\ &\stackrel{(kap.7)}{=} mg \cdot (y_f - y_i) = m \cdot g \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

Dospěli jsme tedy ke vzorci

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot \Delta y \quad (8.14)$$

(změna potenciální energie soustavy objekt – Země). Pokud pro zjednodušení vyjadřování napevno zafixujeme referenční bod $y_i = 0$ (souvisí s volbou počátku kladné osy) jako hodnotu pro konfiguraci, kdy kinetická energie E_p soustavy objekt-Země byla nulová, pak $E_p = 0 + \delta E_p$ a s využitím 8.14 můžeme psát

$$E_p(y) = m \cdot g \cdot y \quad (8.15)$$

(vzorec pro výpočet tíhové potenciální energie, kde $y = y_f$ je aktuální poloha objektu = výška objektu nad referenčním bodem).

Situace B: pružná potenciální energie (= potenciální energie soustavy kostka + pružina + Země). Pro pružnou sílu platí Hookeův zákon $F(x) = -k \cdot x$, a dosazením do 8.12 máme

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_f} (-k \cdot x) dx = k \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=x_i}^{x=x_f} = \frac{1}{2} k x_f^2 - \frac{1}{2} k x_i^2. \quad (8.16)$$

Pro zjednodušené vyjádření napevno zafixujeme referenční bod $x_i = 0$ (nenapjatý stav) jako hodnotu pro konfiguraci, kdy E_p soustavy pružina + kostka je nulová. Pak $E_p = 0 + \delta E_p$ a s využitím 8.15 můžeme psát

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

(vzorec pro výpočet pružné potenciální energie, kde $x = x_f$ je aktuální vychýlení kostky z nenapjatého stavu).

Poznámka. O potenciální energii objektu má smysl mluvit jen tehdy, když

- víme, vzhledem ke kterému druhému objektu je v konfiguraci;
- byl zvolen jakýsi referenční (= odkazový) stav konfigurace, kdy potenciální energie konfigurace je nulová.

Příklad 8.8 Lenochoď o hmotnosti $m = 2\text{kg}$ se drží větve, která je pět metrů nad zemí.

a) Jaká je tíhová E_p soustavy lenochod + Země, volíme-li za referenční hodnotu místo o souřadnici $y = 0$ ležící

1. na povrchu Země;
2. na balkóně 3 metry nad zemí;
3. na větvi;
4. ve výšce 1 metr nad větví?

b) Lenochoď spadne na zem – pro každou referenční hodnotu z bodu (a) určete změnu potenciální energie ΔE_p .

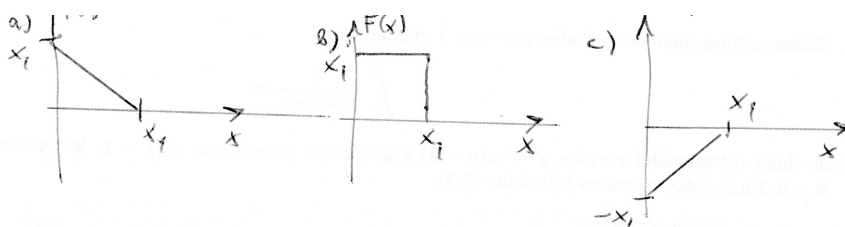
Řešení:

ad a) $m \cdot g \doteq 20\text{ N}$. Odtud

1. $y = 0$ je na povrchu Země: $E_p(5) = 5 \cdot 20 \doteq 100\text{ J}$.
2. $y = 0$ je tři metry nad zemí: $E_p(2) = 2 \cdot 20 \doteq 40\text{ J}$.
3. $y = 0$ je na větvi: $E_p(0) = 0\text{ J}$.
4. $y = 0$ je metr nad větví: $E_p(-1) = -20\text{ J}$.

ad b) $\Delta E_p = mg \cdot \Delta y = 20 \cdot (-5) = -100\text{ J}$... pro všechny volby referenčního bodu, tj. změna ΔE_p není závislá na volbě referenčního bodu.

Kontrola 2. Částice se pohybuje po ose x z bodu $x_0 = 0$ do bodu x_1 . Působí na ni konzervativní síla $F(x)$ ve směru osy x , jejíž velikost se mění podle obrázku 8.62 a),b)c).



Obr. 8.62: Pohyb částice – ke kontrole 2.

Uspořádejte tyto situace sestupně podle odpovídající změny potenciální energie.

8.7 Zákon zachování mechanické energie

Mechanická energie E soustavy je definována jako součet její potenciální energie a celkové kinetické energie E_k všech jejích objektů.

$$E = E_p + E_k \quad (\text{mechanická energie soustavy}) \quad (8.17)$$

Izolovaná soustava je taková soustava, ve které působí výhradně konzervativní síly. V izolovaných soustavách se energie mění na úkor potenciální energie, viz 8.13. Podle 8.12, 8.13 platí $\Delta E_k = -\Delta E_p$. Jinými slovy, nárůst jednoho typu energie je přesně vyjádřen poklesem energie druhého typu:

$$E_{k,2} - E_{k,1} = -(E_{p,2} - E_{p,1}).$$

Přepisem tohoto vztahu lze postihnout zákon zachování mechanické energie:

$$E_{k,1} + E_{p,1} = E_{k,2} + E_{p,2} \quad (8.18)$$

(je to vlastně jen přepis rovnice 8.13 v jiném tvaru) – součet kinetické a potenciální energie izolované soustavy je stálý. Odtud vzniklo o označení **konzervativní síly** – tyto síly uchovají stav mechanické energie soustavy. Jiný přepis vztahu 8.13 či 8.18:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0.$$

Tento zákon zachování mechanické energie nám umožňuje porovnávat množství mechanické energie soustavy v různých okamžicích, aniž bychom uvažovali působící síly a počítali práci v intervalu určeném těmito dvěma okamžiky.

Například při pohybu kyvadla – viz obrázek 8.63:

V nejzazší (= nejvíce vychýlené poloze) platí $|\vec{v}| = 0$, tj. $E_k = 0$ a (například) $E_p = 20$ J. Na základě této znalosti E_p v nejvyšším bodě kyvadla lze určit E_k v nejnižším bodě:

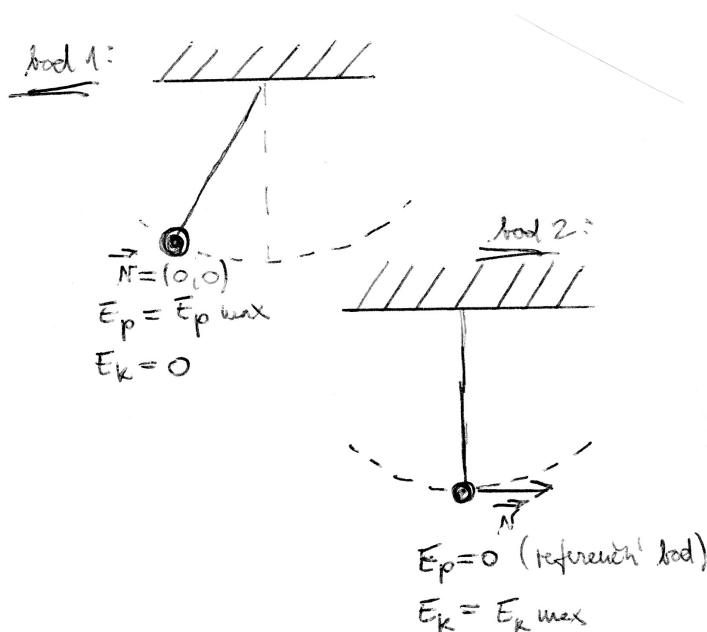
$$\begin{aligned} E_{k,1} + E_{p,1} &= E_{k,2} + E_{p,2} \\ 0 + 20J &= E_{k,2} + 0 \Rightarrow E_{k,2} = 20J. \end{aligned}$$

Tato informace byla získána bez výpočtu práce sil působících na objekty soustavy!!!

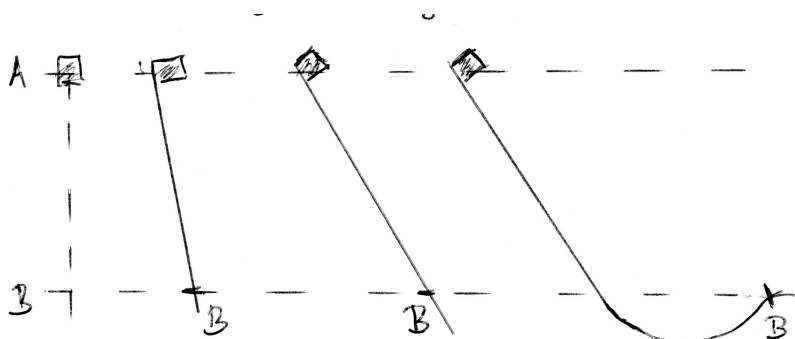
Kontrola 3. Obrázek 8.64 ukazuje čtyři situace. Ve všech byla kostka z počátku v klidu – dále volně padá (situace 1) či klesá po dokonale hladké skluzavce (situace 2,3,4). Uspořádejte tyto situace sestupně podle

- a) hodnoty E_k kostky v bodě B;
- b) velikosti rychlosti kostky v bodě B.

Příklad 8.9 *Dítě se spouští z vrcholu vodní skluzavky (obrázek 8.65). Je zpočátku v klidu a nejvyšší bod skluzavky je ve výšce $h = 8,5$ m nad jejím ústím do bazénu (předpokládejme, že skluzavka je dokonale hladká díky proudu vody, který po ní stéká). Určete, s jakou rychlostí dítě vklouzne do bazénu.*



Obr. 8.63: Rozbor pohybu kyvadla.

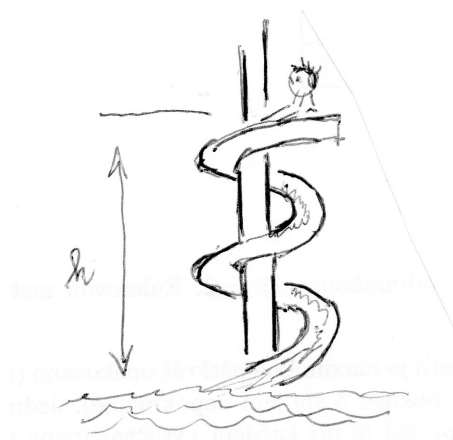


Obr. 8.64: Kostka na skluzavce – ke kontrole 3.

Řešení: Pokud bychom využívali pouze poznatků z kapitol 2 až 6, pracně bychom museli bychom museli vyjadřovat tvar skluzavky. Ale na základě kapitol 7,8 víme, že výsledek nezávisí na tvaru skluzavky, ale pouze na výšce h .

Uvědomme si, že

- zanedbáváme třecí sílu;
- jedinou silou, kterou na dítě působí skluzavka, je normálová tlaková síla kolmá k povrchu skluzavky (tj. kolmá k vektoru posunutí), takže tato síla nekoná práci;
- práci koná pouze tíhová síla, která je konzervativní (platí zákon zachování mechanické energie pro soustavu dítě + Země): energie v nejvyšším bodě skluzavky (nahore) =



Obr. 8.65: Dítě na skluzavce – k příkladu 8.9.

energie v nejnižším bodě skluzavky (dole):

$$\begin{aligned}
 E_{k,n} + E_{p,n} &= E_{k,d} + E_{p,d} \\
 \frac{1}{2}m \underbrace{v_n^2}_{=0} + mg \cdot y_n &= \frac{1}{2}mv_d^2 + mg \cdot y_d \\
 mg \underbrace{(y_n - y_d)}_{=8,5m} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_d^2 \quad / \cdot \frac{2}{m} \\
 2 \cdot 9,80665 \cdot 8,5 &= v_d^2 \\
 12,91m \cdot s^{-1} &\doteq v_d
 \end{aligned}$$

Dítě by stejné rychlosti dosáhlo, kdyby z výšky 8,5 m spadlo. Protože ovšem skluzavka není stoprocentně kluzká a dítě so občas chytne skluzavky a svůj pohyb zbrzdí, rychlost dosažená na skluzavce bude reálně trochu nižší než rychlost dosažená při volném pádu.

Příklad 8.10 Pružina nabitě vzduchovky je oproti výchozímu nenapjatému stavu stlačena o délku $d = 3,2 \text{ cm}$. Náboj má hmotnost $m = 12 \text{ g}$. S jakou rychlostí opustí náboj po výstřelu hlaveň? Tuhost pružiny je $k = 7,5 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$. Předpokládejme, že hlaveň je při výstřelu vodorovná, tření při pohybu náboje je zanedbatelné a po výstřelu zůstane pružina v nenapjatém stavu.

Řešení: Označme

E_i ... mechanická energie soustavy náboj + puška před výstřelem;

E_f ... mechanická energie soustavy náboj + puška po výstřelu.

Ze zákona zachování mechanické energie $E_i = E_f$ máme

$$E_{k,i} + E_{p,i} = E_{k,f} + E_{p,f}$$

$$0 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = d \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,032 \cdot \sqrt{\frac{750N \cdot m^{-1}}{0,012kg}} \doteq 8m \cdot s^{-1}$$

Při výpočtu jsme si museli dát pozor na dosazení jednotek odpovídajícího rozměru.

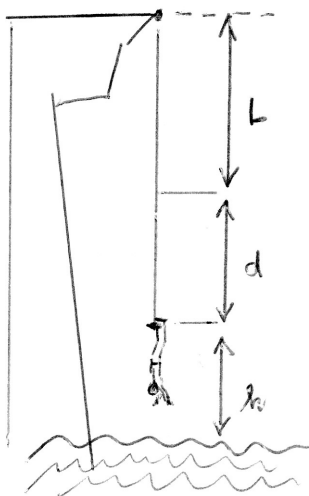
Je důležité si uvědomit, že soustava náboj + puška je izolovaná – pokud bychom chtěli uplatňovat zákon zachování mechanické energie jen pro náboj samotný, tento zákon pro něj neplatí, protože na náboj působí vnější pružná síla, která koná práci (jeho mechanická energie se nezachovává).

Příklad 8.11 Vyznavač bungee jumpingu se chystá ke skoku z mostu vysokého 45 m. Jeho hmotnost je 61 kg a pružné lano, které hodlá použít, má v nenapjatém stavu délku $L = 25$ m. Předpokládejme, že se lano řídí Hookeovým zákonem (ve skutečnosti se guma chová mnohem složitěji – nesvěřujte svůj život první aproximaci nějaké zákonitosti!!) a jeho tuhost je $160N \cdot m^{-1}$. Tělo skokana považujeme při pohybu za bodový objekt.

- a) Jaká je výška chodidel skokana nad hladinou řeky tekoucí pod mostem v okamžiku, kdy se jeho let zastaví v daném bodě obratu?
- b) Jaká je výsledná síla působící na skokana v nejnižším bodě? Je nulová?

Řešení:

ad a) Využijeme zákon zachování energie, ale v této situaci je novým prvkem to, že uvažujeme obě soustavy v téže situaci dohromady:



Obr. 8.66: Bungee jumping z příkladu 8.11.

- aa)** soustava skokan + Země ... potenciální energie $E_{p,q}$;
bb) soustava skokan + lano ... potenciální energie $E_{p,p}$... pružná potenciální energie.

Používáme tedy něco jako dva vztahy 8.13 dohromady:

$$\underbrace{\Delta E_k}_{=0} + \overbrace{\Delta E_{p,q}}^{=mg\Delta y=mg(-L-d)} + \underbrace{\Delta E_{p,p}}_{=\frac{1}{2}kd^2} = 0$$

($\Delta E_k = 0$... kinetická energie skokana na začátku skoku i v dolní poloze skoku je nulová; $\Delta E_{p,q}$... změna E_p v soustavě skokan – Země; $E_{p,p}$... nárůst pružné síly v dolní mezní poloze v soustavě skokan – lano). Celkem tedy máme rovnici

$$-mg(L + d) + \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

a stačí určit d , protože pak $h = 45 - L - d$. Právě uvedenou rovnost tedy chápeme jako kvadratickou rovnici vzhledem k proměnné d :

$$\frac{1}{2}kd^2 - mgd - mgL = 0,$$

po dosazení

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot d^2 - 61 \cdot 9,80665 \cdot d - 61 \cdot 9,80665 \cdot 25 &= 0; \\ 80d^2 - 598,20565d - 14955,14125 &= 0. \end{aligned}$$

Jedno za dvou řešení je záporné, to nemá smysl uvažovat. To jediné rozumné řešení je

$$d = \frac{598,20565 + \sqrt{598,20565^2 + 4 \cdot 80 \cdot 14955,14125}}{2 \cdot 80} \doteq 17,91m.$$

Tedy $h = 45 - 25 - 17,91 = 2,09$ m (tj. velmi vysoký skokan by se mohl i namočít).

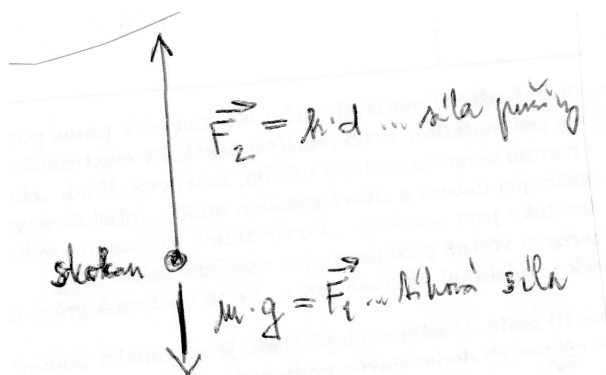
ad b) Viz rozbor sil na obrázku 8.67:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_1| &= mg = 61 \cdot 9,80665 \doteq 598,2N; \\ |\vec{F}_2| &= kd = 160 \cdot 17,91 \doteq 2856,6N. \end{aligned}$$

Tedy výsledná síla \vec{F}_v směřuje směruje vzhůru směrem k mostu a její velikost je

$$|\vec{F}_v| = 2856,6 - 598,2 = 2267,4.$$

Tato síla je v porovnání s vahou skokana téměř čtyřnásobná; to znamená, že v mezní poloze tato síla skokanem silně „trhne vzhůru“.



Obr. 8.67: Rozbor sil při bungee jumping.

8.8 Interpretace křivky potenciální energie

V tomto oddílku ještě dodáme jednu drobnost k izolovaným soustavám, kde působí pouze konzervativní síly.

Při působení síly $F(x)$ ve směru osy x máme podle 8.1, 8.12 pro $E_{p,i} = 0$ a $x_i = 0$ vzorec 8.12 ve tvaru

$$E_p(x) = - \int_{x_i}^x F(t) dt \quad (8.19)$$

(vztah pro potenciální energii při působení síly F ve směru osy x pro $x_i = 0$ a $E_{p,i} = 0$). Zderivováním vztahu 8.19 podle proměnné x dostaneme

$$\frac{dE_p(x)}{dx} = -F(x) \quad (8.20)$$

(vztah mezi $E_p(x)$ a $F(x)$ působící ve směru osy x ; jedná se o analogii vztahu 8.12, resp. 8.19 – pouze vyjádření funkce z opačné strany rovnice pomocí integrálního počtu).

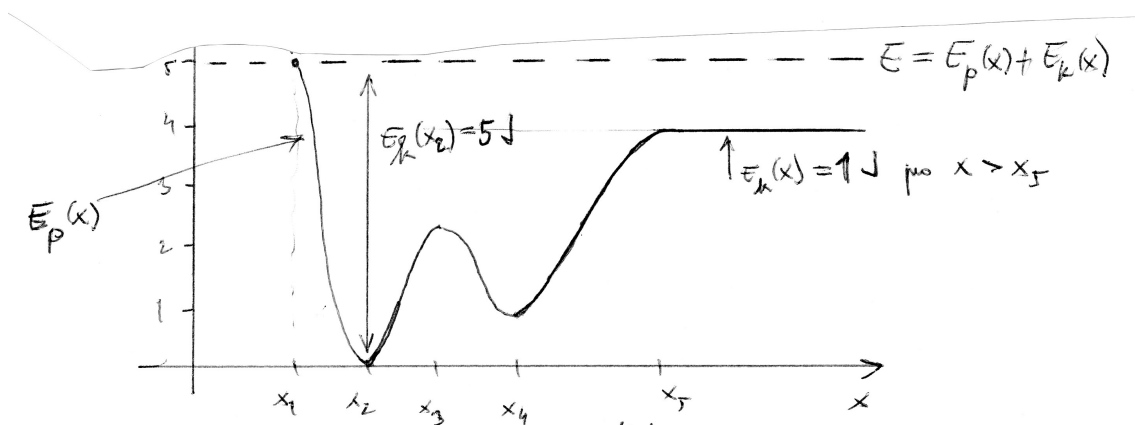
Pokud známe průběh funkce $E_p(x)$, lze z něj vyčíst následující věci – vysvětlíme na příkladě na obrázku 8.68:

- $E = E_p(x) + E_k(x) = 5J$... například, viz vodorovná čárkovaná přímka na obr. 8.68 ... zákon zachování energie v izolované soustavě (graf maximální možné hodnoty součtu kinetické a potenciální energie).
- Pro $x = x_1$ je $E_p(x_1) = 5J$ maximální, odtud $E_k(x_1) = 0$ J, protože platí

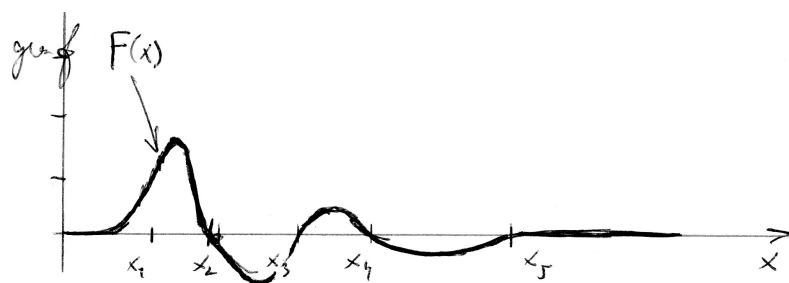
$$E_k(x) = E - E_p(x) \quad (8.21)$$

(vyjádření E_k ze zákona zachování mechanické energie).

- Pomocí 8.20 lze z grafu $E_p(x)$ sestavit graf funkce $F(x)$ – viz obr. 8.69: Sestavíme derivaci v bodě x a dáme před ni znaménko minus.



Obr. 8.68: Křivka potenciální energie E_p částice.



Obr. 8.69: Graf funkce $F(x)$ pro daný průběh potenciální energie částice.

- Z grafu E_p lze určit bod obrátu $[x_1, E_p(x_1)]$: Body nalevo od x_1 nemohou v reálném případě nastat, protože potenciální energie v nich by byla větší než součet $E_p + E_k$ (a E_k nemůže být záporná). V tomto bodě obrátu sice $E_k(x_1) = 0$, ale na částici působí síla $F(x_1)$ (viz graf $F(x_1)$ na obr. 8.69), jejíž hodnota je kladná, tj. částice se v bodě x_1 obrátí a začne se pohybovat opačným směrem.
- $E_k(x_2) = 5 \text{ J}$ podle vzorce 8.21.

Podívejme se na jiný příklad průběhu E_p – viz obrázek 8.70.

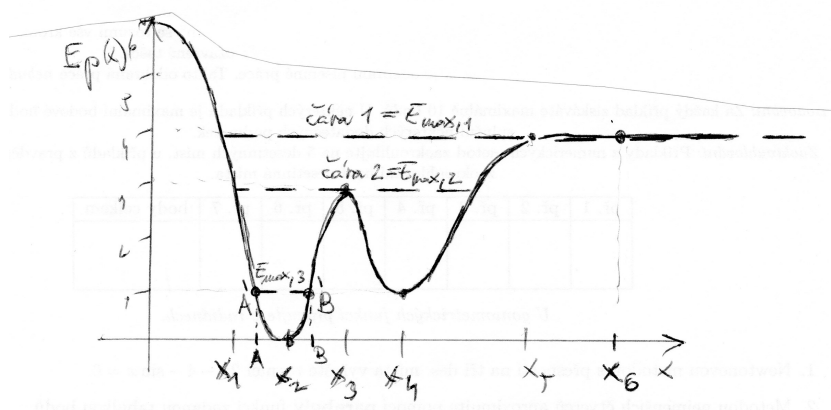
Tři čárkované čáry znázorňují tři různé hodnoty $E_{\max} = E = E_p(x) + E_k(x)$. Vzhledem k tomu, která hodnota E_{\max} platí, lze z grafu $E_p(x)$ detekovat body na ose x (= při pohybu po ose x) v různých typech poloh:

- a) $E_{\max,1} =$ čára 1 ... bod x_6 je příkladem tzv. **rovnovážné polohy volné** ... částice setrvává v klidu a nepůsobí na ni žádná síla (např. kulička na vodorovném stole):

$$E_{\max} = E_p(x_6) = 4 \text{ J}$$

$$E_k(x_6) = 0 \text{ J}$$

$$F(x_6) = 0 \quad (\text{podle 8.20})$$



Obr. 8.70: Jiný příklad potenciální energie částice.

b) $E_{\max,2} = \text{čára 2} \dots$ bod x_3 je příkladem tzv. **rovnovážné polohy vratké**:

$$E_{\max} = E_p(x_3) = 3J$$

$$E_k(x_3) = 0J$$

$$F(x_3) = 0$$

Hodnoty E_k a F jsou stejné jako v případě (a), ale při sebemenším vychýlení z polohy x_3 na částici začne působit síla F různá od nuly, která ji začne vzdalovat od bodu $x_3 \dots$ například malá kulička na vršku obrovského balónu.

c) $E_{\max,3} = \text{čára 3} \dots$ bod x_4 je příkladem tzv. **rovnovážné polohy stálé**

$$E_{\max} = E_p(x_4) = 1J$$

$$E_k(x_4) = 0J$$

$$F(x_4) = 0$$

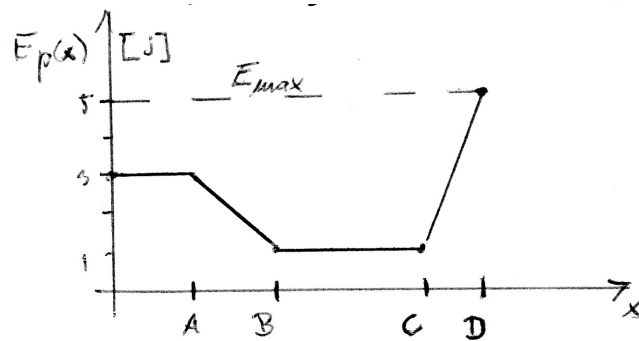
Částice v poloze x_4 setrvává sama od sebe a nemůže se vychýlit z této polohy jinak, než působením další vnější síly (a při vychýlení z x_4 na ni začne působit síla, která ji vrací zpět do $x_4 \dots$ např. kulička na dně mističky.

Čára 3, tj. úsečka AB je příkladem tzv. potenciálové jámy – částice kmitá mezi dvěma body obratu A' , B' a nemůže dělat nic jiného.

Kontrola 4. Na obrázku 8.71 je křivka $E_p(x)$ pro případ jednorozměrného pohybu částice (= pohybu po ose x).

a) Uspořádejte úseky AB , BC , CD sestupně podle velikosti síly působící na částici.

b) Jaký směr má síla působící na částici v úseku AB ?



Obr. 8.71: Graf potenciální energie ke kontrole 4.

8.9 Práce vnějších a nekonzervativních sil

A. Začněme nejprve úvahou o soustavě, ve které působí **vnitřní nekonzervativní síly**:

V soustavě (kuželková koule + člověk + Země) zvedá člověk kuželkovou kouli svisle vzhůru ... působí na kouli silou \vec{F}_{int} , která je vnitřní silou soustavy a není konzervativní.

Při působení člověka silou \vec{F}_{int} na kouli se změní tlaková síla, kterou nohy stojícího člověka působí na podložku, o vektor $-\vec{F}_{int}$, což je též vnitřní nekonzervativní síla. Kombinací vzorců 7.4 a 7.9 dostáváme vztah pro změnu kinetické energie koule:

$$\Delta E_k = W_{int} + W_g, \quad (8.22)$$

kde W_{int} je práce vykonaná vnitřními silami, W_g je práce vykonaná tíhovou silou. Připomeneme-li vztah 8.1 ($\Delta E_p = -W_g$), lze dosadit do 8.22 za W_g a dostaneme tvar

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_{p,q} = W_{int} \quad (8.23)$$

(při vnitřních nekonzervativních silách není mechanická energie izolované soustavy konstantní, ale změna této energie je rovna práci W_{int}).

B. Práce vnější síly

Uvažovaný model soustavy z bodu (A) jen lehce pozměníme v tom smyslu, že

- uvažujeme soustavu (koule + Země);
- tato soustava není izolovaná, ale na kouli působí nějaké vnější těleso, (ne nutně člověk) silou \vec{F}_{ext} , která změní vzdálenost koule od povrchu Země (= změni E_p soustavy koule + Země).

Pak podobně jako v 8.22 bude platit analogický vztah

$$\Delta E_k = W_{ext} + W_g,$$

jenž s využitím 8.1 lze psát ve tvaru analogickém vztahu 8.23

$$\Delta E_k + \Delta E_{p,q} = W_{ext},$$

neboli

$$\Delta E = W_{ext} \quad (8.24)$$

(změna mechanické energie neizolované soustavy je rovna práci vykonané vnějšími silami).

Spojením situací (A) i (B) lze celkově popsat změnu mechanické energie soustavy vztahem

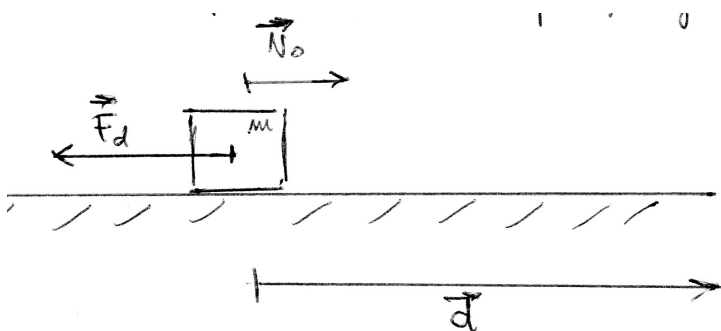
$$\Delta E = W_{int} + W_{ext} \quad (8.25)$$

(změna mechanické energie soustavy je rovna součtu práce nekonzervativních vnitřních sil a práce vnějších sil).

C. Práce třecí síly

Uvažujme kostku pohybující se počáteční rychlostí \vec{v}_0 po podložce s nezanedbatelným třením, které lze vyjádřit silou \vec{F}_d působící proti směru pohybu kostky.

1. Vlivem tohoto tření (tzv. dynamické třecí síly) se kostka zpomaluje a po posunutí \vec{d} se zcela zastaví (viz obrázek 8.72).



Obr. 8.72: Práce třecí síly – orientované proti směru pohybu.

2. Třecí síla F_d je nekonzervativní: kinetická energie kostky se působením tření přeměňuje na vnitřní (= tepelnou) energii kostky i podložky.

Při výpočtu toho, jakou změnu energie způsobí třecí síla, v podstatě použijeme vztah 7.8, kde $F = F_d$ a $\varphi = 180^\circ$ (síla \vec{F}_d působí proti směru pohybu):

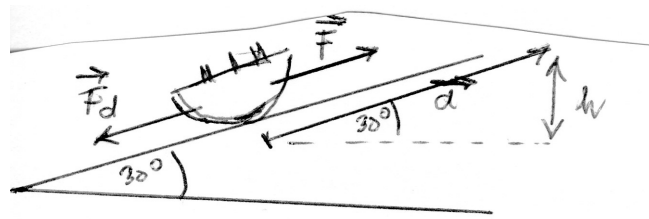
$$\Delta E_k = W \stackrel{7.8}{=} F_d \cdot d \cos 180^\circ = -F_d \cdot d.$$

Protože se nemění potenciální energie soustavy (výška kostky nad Zemí je konstantní), lze právě uvedený vztah psát ve tvaru

$$\Delta E = -F_d \cdot d \quad (8.26)$$

(vztah pro rozptýlení mechanické energie soustavy kostka+Země na jiné druhy energie působením třecí síly).

Příklad 8.12 Robot o hmotnosti $m = 40\text{kg}$ je vytahován na laně z průzkumu v sopečném kráteru (obrázek 8.73).



Obr. 8.73: K příkladu 8.12.

Stěna svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° , tažná síla lana \vec{F} má velikost $|\vec{F}| = 380\text{N}$, velikost dynamické třecí síly působící proti pohybu robota je 140N . Robot se posune o vzdálenost $d = 0,5\text{ m}$ podél stěny kráteru.

- Jaká je ztráta mechanické energie soustavy robot+Země způsobená vlivem třecí síly při posunutí robota o vektor \vec{d} ?
- Jakou práci vykonají při posunutí robota tíhové síly?
- Jakou práci vykonala síla \vec{F} ?

Řešení:

ad a) Ze vztahu 8.26 dostaneme

$$\Delta E = -140\text{N} \cdot 0,5\text{m} = -70\text{N} \cdot \text{m} = \underline{\underline{-70\text{J}}}.$$

ad b) Podle 8.1 a 8.14 máme (změna ve svislém směru $\Delta y = d \cdot \sin 30^\circ$):

$$W_g \stackrel{8.1}{=} -\Delta E_p \stackrel{8.14}{=} -m \cdot g \cdot \Delta y = -40\text{kg} \cdot 9,80665\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 0,5 \cdot \sin 30^\circ \doteq \underline{\underline{-98\text{J}}}.$$

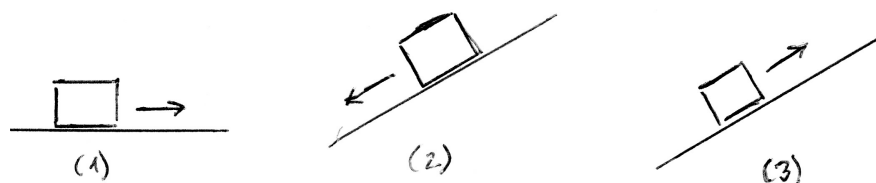
ad c) Podle 7.8 pro $\varphi = 0^\circ$ (síla působí ve směru posunutí) dostaneme

$$W_{int} = F \cdot d \cdot \cos \varphi = 380\text{N} \cdot 0,5\text{m} \cdot \cos 0^\circ = \underline{\underline{190\text{J}}}.$$

Působením sil \vec{F} (lana na robota) a $-\vec{F}$ (robota na lano) došlo k navýšení mechanické energie soustavy o 190 J .

Kontrola 5. Obrázek 8.74 ukazuje tři možnosti pohybu kostky po nakloněné rovině, která není dokonale hladká. Ve všech případech má vektor počáteční rychlosti stejnou velikost (viz obrázek)

Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti rozptýlené mechanické energie.



Obr. 8.74: Ke kontrole číslo 5.

8.10 Zákon zachování energie

Uvažujme soustavu (kostka + podložka + Země): protože jsme podložku zahrnuli do soustavy, lze třecí síly považovat za vnitřní síly soustavy a formulovat zákon zachování energie takto:

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int} = 0 \quad (8.27)$$

(zákon zachování energie pro izolovanou soustavu: součet změn kinetické, potenciální a vnitřní (tepelné) energie izolované soustavy je roven nule).

Objevíme-li ještě další formy energie, lze 8.27 modifikovat dokonce na

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int} + \Delta E_{ostatní} = 0. \quad (8.28)$$

Tento zákon není dokázán žádným vyčerpávajícím důkazem, pouze vědci ani konstruktéři neznají žádnou výjimku z tohoto zákona. Jedinou výjimkou je velký třesk: energie a hmota vznikla při vzniku času a prostoru⁸.

Čili existuje situace z historie vesmíru, kdy tento zákon neplatil. Tomuto závěru někteří vědci vzdorují: říkají, že zákon zachování energie je nadřazen velkému třesku, a že tedy při velkém třesku energie nevznikla, ale přitekla do nově vznikajícího prostoru a času z nějakého jiného vesmíru.

Interpretace křesťana: Energie při velkém třesku nepřitekla z jiného vesmíru, ale stvořil ji Bůh z ničeho. Zákon zachování energie začal platit až po stvoření vesmíru a stvoření života (všech organických druhů).

Jinými slovy, křesťanský výklad říká, že realita tohoto vesmíru není izolovanou soustavou, ale v určitých okamžicích (stvoření světa, stvoření organických forem života, vzkříšení Ježíše Krista do stavu, kdy už neumírá a smrt nad ním nemá moc) do reality tohoto vesmíru zasahuje zvnějšku Bůh.

Pokud soustava není izolovaná, lze 8.27, resp. 8.28 psát ve tvaru

$$W = \Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int} \quad (8.29)$$

⁸To plyne z důkazů velkého třesku – ze zbytkového záření a rudého posuvu. Viz také článek Existuje Bůh? na stránce rozhovor.cz.

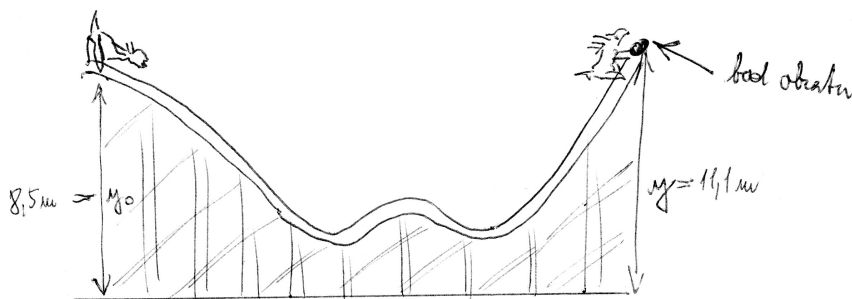
(změna energie je rovna celkové práci, kterou vykonají vnější síly na objekty soustavy).

Když přemýšlíme o různých typech energie, lze rozšířit i definici výkonu z kapitoly 7 (výkon = množství práce za jednotku času) na obecnější definici: zobecněný výkon = množství změněné energie za jednotku času.

$$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (\text{průměrný výkon}) \quad (8.30)$$

$$P(t) = \frac{dE(t)}{dt} \quad (\text{okamžitý výkon}) \quad (8.31)$$

Příklad 8.13 Cvičený pudl (viz obr. 8.75) o hmotnosti 6 kg vběhl na levý okraj skluzavky rychlostí o velikosti $v_0 = 7,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ve výšce $y_0 = 8,5 \text{ m}$ nad podlahou. Při skluzu se dostal do bodu obratu ve výšce $y = 11,1 \text{ m}$ nad podlahou. Jaký byl přitom přírůstek vnitřní energie soustavy (pudl+skluzavka+Země)?



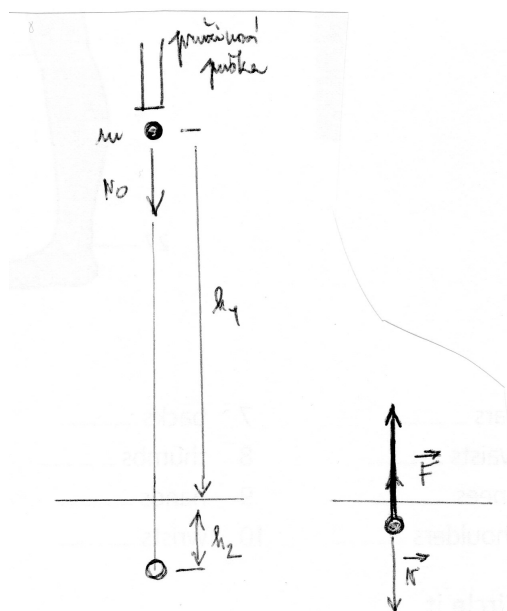
Obr. 8.75: Pudl na skluzavce – k příkladu 8.13.

Řešení: Soustavu lze považovat za izolovanou, a proto můžeme použít 8.27:

$$\begin{aligned} \Delta E_k + \Delta E_{p,g} + \Delta E_{int} &= 0 \\ \left(0 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) + mg(y - y_0) + \Delta E_{int} &= 0 \\ \Delta E_{int} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(y - y_0) &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7,8^2 - 6 \cdot 9,80665 \cdot (11,1 - 8,5) \doteq \underline{\underline{29,5 \text{ J}}} \end{aligned}$$

Příklad 8.14 Ocelová kulka o hmotnosti 5,2 g je vystřelena svisle dolů z výšky $h_1 = 18 \text{ m}$ s počáteční rychlostí $v_0 = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Kulka se zaryje do písku a zastaví se v hloubce $h_2 = 21 \text{ cm}$.

- K jaké změně mechanické energie kulky přitom došlo?
- Jaká je změna vnitřní energie soustavy (kulka+pískoviště+Země)?



Obr. 8.76: Výstřel kulky do písku z př. 8.14.

c) Jaká je velikost průměrné odporové síly \vec{F} ?

Řešení:

a) Máme určit levou stranu vzorce 8.23:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_k + \Delta E_{p,g} = \\ &= \left(0 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) + mg(-h_2 - h_1) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 14^2 + 5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,80665 \cdot (-18,21) = \underline{\underline{-1,438J}}. \end{aligned}$$

Potenciální energie kulky (ve vztahu k Zemi a k jisté referenční hladině konfigurace) poklesla o 1,438 J.

b) Podle 8.27 platí $\Delta E_{int} = -\Delta E_{celk} = 1,438$ J (vnitřní energie soustavy vzrostla o hodnotu vypočtenou v bodě (a)).

c) Mechanická energie soustavy se mění pouze při zarývání kulky do písku. Pro odporovou sílu platí 8.26 ve tvaru $\Delta E = -F \cdot h_2$. Odtud

$$F = -\frac{\Delta E}{h_2} = \frac{-(-1,438)}{0,21} = \underline{\underline{6,85N}}.$$

Tuto poslední hodnotu lze experimentálně zjistit i na základě kapitoly 5 (tj. druhého Newtonova zákona) ... určí bychom průměrné zrychlení \vec{a} při brždění kulky v písku, a pak vztah (5.1) – to je možná experimentálně náročnější, protože jednodušší je změřit rychlost v_0 .

8.11 Hmotnost a energie

Jaký je vztah mezi zachováním hmotnosti soustavy a zachováním energie soustavy? Klasická chemie předpokládá, že hmotnost soustavy se zachovává odděleně od energie soustavy, ovšem v r. 1905 Albert Einstein upozornil na fakt

$$E = mc^2 \quad (8.32)$$

(kde E je energie ekvivalentní hmotnosti m), tj. ve skutečnosti se jedná o zachování vztahu mezi energií a hmotností, který lze dobře měřit až při jaderných reakcích: hmotnost soustavy se sníží, a přitom se uvolní energie.

V tabulce vidíme energiové ekvivalenty vybraných objektů:

Tabulka 8.1: Tabulka energiových ekvivalentů vybraných objektů.

objekt	hmotnost (kg)	energiový ekvivalent
elektron	$9,11 \cdot 10^{-31}$	$8,2 \cdot 10^{-14}$ J (= 511keV)
proton	$1,67 \cdot 10^{-27}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$ J (= 938meV)
atom uranu	$4 \cdot 10^{-25}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$ J (= 225GeV)
prachové částice	10^{-13}	10^4 J (= 2kcal)
mince	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{14}$ J (= 78GW · h)

Při popisu chemických reakcí a výpočtu uvolněné energie je vhodné vztah 8.32 přepsat do tvaru

$$Q = -\Delta m \cdot c^2, \quad (8.33)$$

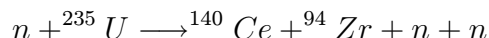
kde Q je energie uvolněná (kladná hodnota), Δm je úbytek hmotnosti (záporná hodnota), nebo zcela naopak, tj. Q je záporná energie pohlcená a Δm je kladná hmotnost narostlá. Při jaderném štěpení (větší jádra se rozpadnou v jádra s nižším atomových číslem) Δm tvoří asi 0,1% původní hmotnosti.

Při praktických výpočtech se většinou u energie nepoužívá J (joule), ale elektronvolt (eV) ze vztahu 7.3: $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J, a místo hmotnosti použ. tzv. atomovou hmotnost (znač. u)

$$1u = 1,66 \cdot 10^{-27} kg \quad (8.34)$$

s převodními vztahy

$$\begin{aligned} c^2 &= 9,315 \cdot 10^8 eV \cdot u^{-1} \\ &= 9,315 \cdot 10^5 keV \cdot u^{-1} \\ &= 931,5 MeV \cdot u^{-1} \end{aligned} \quad (8.35)$$

Příklad 8.15 Při jaderném štěpení

je neutron (n) zachycen jádrem uranu ${}^{235}\text{U}$. Vznikne nestabilní jádro, které se rozštěpí na dvě menší jádra (${}^{140}\text{Ce}$ a ${}^{94}\text{Zr}$) za současného uvolnění dvou neutronů. Hmotnosti daných elementů:

$${}^{235}\text{U} : m = 235,04u$$

$${}^{94}\text{Zr} : m = 93,91u$$

$${}^{140}\text{Ce} : m = 139,91u$$

$$n : m = 1,00867u$$

a) Jaká je relativní změna hmotnosti interagujících částic?

b) Jaká energie se při štěpné reakci uvolní?

Řešení:

ad a) Změnu Δm získáme jako hmotnost částice po reakci MINUS hmotnost částice před reakcí:

$$\Delta m = (139,91 + 93,91 + 2 \cdot 1,00867)u - (235,04 + 1,00867)u = -0,211u.$$

Hmotnost částic vstupujících do reakce je $(235,04 + 1,00867)u = 236,05u$, tedy relativní změna

$$\frac{\Delta m}{M} = \frac{0,211u}{236,05u} = 0,00089 \doteq 0,001,$$

tj. asi 0,1%.

ad b) Ze vztahu 8.33 máme

$$\Delta Q = -\Delta m \cdot c^2 = -(-0,211) \cdot 931,5 \text{MeV} \cdot u^{-1} = 197 \text{MeV}.$$

Tato energie je mnohonásobně vyšší než energie uvolněná při běžných reakcích, kde se uvolní zhruba jednotky elektronvoltů.

Příklad 8.16 Jádro atomu deuteria (tzv. těžký vodík) se rozpadne na neutron a proton. Jak velká energie se uvolní či absorbuje při tomto procesu?

$$m_d = 2,01355 \longrightarrow \underbrace{m_p(1,00728u) + m_n(1,00867u)}_{\text{celkem } 2,01595u}$$

Řešení: $\Delta m = 0,00240u$, a tedy

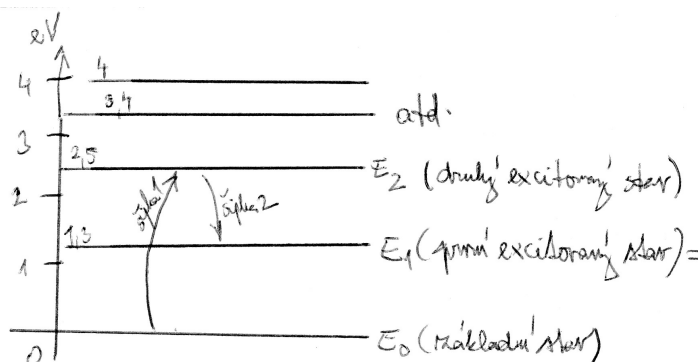
$$Q = -\Delta mc^2 = -0,0024u \cdot 931,5 \text{MeV} \cdot u^{-1} = -2,24 \text{MeV}$$

(minus ... při této reakci se energie absorbuje, aby jejím výsledkem byla částice s větší hmotností). Hodnota $2,24 \text{MeV}$ se nazývá vazebná energie deuteronu (vazebná energie = energie, kterou je potřeba jádru dodat, aby se rozštěpilo na volné protony a neutrony).

Kontrola 6. Pokud bychom šest protonů a šest neutronů přiměli, aby se spojily v jádro uhlíkového atomu ${}^{12}\text{C}$, byla by hmotnost jádra větší nebo menší než součet hmotností daných dvanácti volných částic?

8.12 Kvantování energie

Dosud jsme předpokládali, že množství energie může být jakékoli, ale to v mikrosvětě neplatí – **vnitřní energie mikrosvěta je kvantována** = může nabývat jen některých hodnot, tzv. **kvantových stavů** neboli energetických hladin a nenabývá nikdy hodnot mezi těmito stavy (= hladinami). Viz obrázek 8.77:



Obr. 8.77: Kvantové hladiny atomů.

- Atomy mají tendenci zaujímat konfiguraci základního stavu, jemuž odpovídá nejnižší energie (podobně jako se koule kutálí ze svahu dolů).
- Atom může přejít do excitovaného stavu s vyšší energií jen tehdy, když mu je dodána (např. při srážce s jiným atomem nebo elektronem) energie odpovídající rozdílu mezi základním a excitovaným stavem (tj. i přírůstky energie jsou kvantovány).
- šipka 1: atom absorbuje foton s energií $2,5\text{eV}$ a přejde za základního do druhého excitovaného stavu (pokud světlo má energii větší či menší než $2,5\text{eV}$, k jeho absorpci nedojde).
- šipka 2: excitovaný atom na vyšší hladině většinou nesetrvává, ale ztrácí energii buď při srážkách s jinými částicemi, nebo vyzářením (emisí) světla – pokud vyzáří světlo a energii 1eV , přejde ze stavu E_2 do E_1 (vyzářené světlo skutečně vzniká, předtím neexistovalo).

Kontrola 7. Bylo zjištěno, že kvantový systém vyzářil světlo čtyř různých energií, aniž byl mezitím znovu excitován. Tři ze čtyř vyzářených hodnot byly změřeny: $1,1\text{eV}$; $1,4\text{eV}$; $2,8\text{eV}$. Pořadí emisí = vyzáření není známo. Energetické hladiny systému jsou: $E_8 = 7,7\text{eV}$, $E_7 = 6,6\text{eV}$, $E_6 = 5,5\text{eV}$, $E_5 = 4,8\text{eV}$, $E_4 = 4,2\text{eV}$, $E_3 = 3,9\text{eV}$, $E_2 = 2,7\text{eV}$, $E_1 = 1,3\text{eV}$, $E_0 = 0\text{eV}$.

- Jaký byl počáteční stav systému?
- Jakou energii mělo světlo při čtvrté emisi?

8.13 Otázky k opakování – Potenciální energie, zákon zachování energie

Otázka 8.1 Oddíl 8.1: potenciální energie. Co je to potenciální energie?

Otázka 8.2 Jak se mění kinetická a potenciální energie při hození jablka svisle vzhůru?

Otázka 8.3 Jak se mění kinetická a potenciální energie při stlačení kostky na pružině?

Otázka 8.4 Co to jsou interakční síly?

Otázka 8.5 Co jsou to konzervativní a nekonzervativní síly?

Otázka 8.6 Jaký je vztah mezi změnou ΔE_p potenciální energie a prací vykonanou tíhovými interakčními silami? (8.1)

Otázka 8.7 Oddíl 8.2: křivkový integrál 1. a 2. druhu. Jaká je práce vykonaná při přenosu objektu po křivce v prostoru? (8.2 ... je to křivkový integrál 2. druhu= orientovaný integrál z vektorové funkce)

Otázka 8.8 Co je to křivka a parametrizace křivky? Uveďte příklad.

Otázka 8.9 Jaká je parametrizace přímky \overleftrightarrow{AB} ?

Místo závěru

Mezi fyzikou a matematikou existuje velmi pevný vztah a vzájemnou provázanost objektů studia v těchto dvou předmětech lze pozorovat na mnoha místech. Matematika je jazykem fyziky, i když matematika je více než jen jazyk – matematika je také vodítkem pro logické myšlení a logický přístup k životu. Naopak fyzika je více než jen disciplína, která využívá matematická odvozování – fyzika se svou odvahou experimentovat a objevovat souvislosti ve viditelném i neviditelném (míněno např. pro lidské oko) světě je přístupem a snahou popsat zákonitosti tohoto světa, a na základě těchto zákonitostí pak vede k jejich praktickému využití pro život člověka.

Pokusme se shromáždit některá pro a proti v otázce, zda by bylo přínosem či pomocí pro oba jmenované předměty, kdyby byly vyučovány jako jeden celek, přednostně na gymnáziu s rozšířenou výukou matematiky (pod slovem „rozšířená výuka matematiky“ mějme na mysli matematiku vyučovanou podle série všech jedenácti učebnic Matematika pro gymnázia z nakladatelství Prometheus – to v době vzniku učebnic byla série představující nikoli rozšířenou výuku matematiky, ale výuku normální). Odpověď na tuto otázku je v jistém smyslu snadná: Díky klesající kvalitě studentů a díky faktu, že některé partie matematiky, abstraktní to vědy, nesouvisí s konkrétním fyzikálním využitím, by nezazněla některá matematická témata při výuce celku obou předmětů. Autor tohoto elektronického textu přesto rozeslal na gymnázia v České Republice dotazník s následujícími otázkami:

1. Myslíte si, že na gymnáziu by bylo prospěšné vyučovat matematiku a fyziku v rámci jednoho předmětu, aby byla patrná vzájemná provázanost obou předmětů (mám na mysli pouze čtyřleté gymnázium, nebo poslední čtyři ročníky osmiletého či šestiletého gymnázia)? Doplňte prosím svá „pro“ a „proti“: co by společná výuka obou předmětů získávala a co ztrácela?
2. Pokud jste učitelem fyziky v posledních čtyřech ročnících gymnázia, jaká témata z matematiky zařazujete do svých hodin? Prosím o jejich vypsání – v rámci přípravy učebnice, která systematicky představuje matematiku a fyziku v jejich vzájemném vztahu, by mi to bylo pomocí:
3. Pokud jste učitelem matematiky v posledních čtyřech ročnících gymnázia, jaká témata z fyziky zařazujete do svých hodin? Prosím o jejich vypsání – v rámci přípravy učebnice, která systematicky představuje matematiku a fyziku v jejich vzájemném vztahu, by mi to bylo pomocí:
4. Organizuje gymnázium, na kterém vyučujete, výuku matematiky rozšířenou o diferenciální/integrovní počet a analytickou geometrii v prostoru pro všechny žáky v aspoň jedné třídě v rámci povinného kursu?

Pro ty, kdo se chtěli zamyslet více, byla určena delší verze dotazníku – nikoli delší počtem otázek, ale další o dva texty, které jsou v otázkách uvedeny svými odkazy; respondenti pak doplňovali argumenty uvedené v odkazovaných textech:

1. Myslíte si, že na gymnáziu (minimálně na gymnáziu s rozšířenou výukou matematiky) by bylo prospěšné vyučovat matematiku a fyziku v rámci jednoho předmětu,

aby byla patrná vzájemná provázanost obou předmětů? V článku Fyzikální motivace pro výuku matematiky (Fajmon, 2018) najdete některé příklady propojení matematiky a fyziky, a také některé důvody pro a proti vzájemnému propojení jejich výuky a možné reakce na ně. Přidejte prosím své vlastní argumenty v této diskusi.

2. V úvodu tohoto elektronického textu (str. 1-12) je uveden začátek osnovy možné výuky matematiky a fyziky provázaných jako jednoho předmětu (prvních 180 hodin, tedy cca první čtvrtina obsahu výuky); nejedná se tedy o celý návrh osnovy, ale z dané části je patrné, jak jsou oba předměty provázány, cyklické opakování a prohloubení některých témat matematiky, apod.; je jisté, že všechny partie matematiky (zejména diskrétní matematiku) nelze „přidělit“ k výkladu fyziky, nicméně si myslím, že u většiny osnovy matematiky je to možné – zbylé partie matematiky by v takovém modelu výuky musely být probrány například ve čtvrtém ročníku už odděleně od fyziky a celý provázaný předmět by byl časově vymezen jen v ročnících prvním až třetím. Prosím o Vaše argumenty ve prospěch či neprospěch tohoto modelu výuky.

Závěrem mi dovoluete shrnout argumenty uvedené ve výše odkazovaném článku, ale také v reakcích na právě uvedený dotazník. Reakce na dotazník lze v neupravené formě (od 27 respondentů převážně z řad učitelů gymnázia) najít na internetu (Výsledky, 2018). Celý seznam následujících argumentů pro a proti jsem se snažil doplnit svými komentáři, a z nich i z řazení jednotlivých argumentů vyplývá, že mým zájmem nebylo argumenty ankety zpracovat nestranně, ale doplnit je svými argumenty z výše odkazovaného článku a použít někdy i jen pozitivní myšlenky z reakcí na anketu, které jako celek vyznívají neutrálně či negativně. Tj. mým cílem ani není poskytnout nějaké statistické zpracování dotazníku pro gymnázia i mé vysokoškolské kolegy, ale spíše hledat v daných argumentech cestu ke zdárnému spojení obou předmětů v jeden celek – zvážit všechny překážky, ale pak přece hledat cestu k jejich zdolání.

Argumenty pro výuku matematiky a fyziky jako jednoho celku

Pro 01 Elegantní odvození vzorců pro popis přímočarého pohybu hmotného bodu užitím diferenciálního počtu (podrobněji viz Fajmon, 2018, str. 2-3). Integrací vztahu $a(t) = v'(t)$ na intervalu $\langle 0, t \rangle$ dostaneme pro rovnoměrně zrychlený pohyb

$$a(t - 0) = v(t) - v_0, \quad \text{a tedy} \quad v(t) = v_0 + at.$$

Další integrací tohoto vztahu na tomtéž intervalu dostaneme

$$x(t) - x_0 = v_0(t - 0) + a \frac{t^2}{2}, \quad \text{a odtud} \quad x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2.$$

Na této a dalších situacích je vidět využitelnost diferenciálního a integrálního počtu.

Pro 02 Při definici skalárního součinu i vektorového součinu je vhodné přímo uvést příklad jejich fyzikální interpretace. Například (podrobněji viz Fajmon, 2018, str. 3-6) práci při přesunu tělesa ve směru vektoru \vec{s} působením síly \vec{F} lze spočítat jako

skalární součin těchto vektorů, a s využitím odchylky φ mezi vektory vyjádřit ve tvaru

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos \varphi.$$

Na druhé straně, příkladem vektorové fyzikální veličiny, která vznikne jako vektorový součin, je moment \vec{M} síly \vec{F} vzhledem k ose otáčení, kde kolmý průvodič od osy otáčení směrem k místu působení síly \vec{F} je zadán vektorem \vec{r} . Moment síly je určen vztahem $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ a s využitím odchylky φ mezi vektory \vec{r} a \vec{F} lze velikost tohoto momentu vyjádřit jako

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin \varphi.$$

Srovnáním obou těchto příkladů lze vidět, že skalární součin využívá promítání vektoru \vec{F} **do směru rovnoběžného** s vektorem \vec{s} (pomocí funkce $\cos \varphi$), kdežto velikost vektorového součinu využívá promítání vektoru \vec{F} **do směru kolmého** k vektoru \vec{r} (pomocí funkce $\sin \varphi$). Doplněním fyzikálního využití, nikoli jen geometrického významu, získávají studenti ucelenější představu o významu skalárního součinu, vektorového součinu a rozdílch mezi nimi.

Pro 03 Studenti vidí příklady využití konkrétních matematických objektů, např. využití kvadratické funkce při popisu polohy rovnoměrného přímočarého pohybu hmotného bodu, při popisu trajektorie šikmého vrhu, apod.

Pro 04 Studenti vidí využití konkrétních matematických postupů tehdy, když jsou potřeba ve fyzice, tj. je ilustrována potřebnost obou oborů. Například při výpočtu doletu R dělové koule lze vzorec

$$R = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 \cdot 2 \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0}{g} \quad \text{upravit na tvar} \quad R = \frac{\|\vec{v}_0\|^2 \cdot \sin(2\theta_0)}{g},$$

odkud je hned vidět, že maximální dolet získáme pro $\theta_0 = 45^\circ$. Jedná se o netriviální důležité využití vzorce $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Pro 05 Svět je jen jeden a někdy je chybou, že se žáci stejné problémy izolovaně a nedokážou znalosti z matematiky ve fyzice použít (Výsledky ankety, 2018, str. 2).

Moje reakce: Souhlasím – s tím, že může být použito proti mně, že jsem sám absolvoval výuku matematiky odděleně od fyziky, a to mi možná pomohlo se ji naučit pořádně a později jsem se mohl učit vidět matematické souvislosti ve fyzice. Pak by celý projekt propojené výuky směřoval na jinou kolej, a sice jak dobře učit fyziku ... v tomto případě si myslím, že fyzika by měla být prezentována s větší propojeností k matematice už na střední škole. Stále ovšem zůstává v platnosti existence předmětu Fyzikální motivace pro výuku matematiky, protože zde se budoucí učitelé matematiky dozvědí o vynikající učebnici fyziky (Halliday, Resnick, Walker, 2000 nebo 2013), která lépe představuje fyziku než dříve dostupné české učebnice.

Pro 06 Jako výhodu spojení lze vidět to, že by se zřejmě celkově omezil počet hodin pro tento jeden předmět například na 5 hodin týdně (volně podle Výsledky ankety,

2018, str. 3). Tj. žákům by se ulevilo a další hodina by mohla být věnována na jiné předměty.

Moje reakce: Tento důvod by byl spíše argumentem pro lidi matematice a fyzice nepřející, ovšem je logický a určitě by byl při sloučení předmětů vysloven. Z tohoto důvodu se zřejmě nikdo nepokusí myšlenku společného celku propagovat nějak oficiálně, tj. celý nápad učit matematiku a fyziku provázaně by mohl být realizován jen ojediněle – vyučující, kteří uvidí důležitost tohoto propojení, si k realizaci najdou cestu i při stávajícím stavu středních škol v ČR. Celý nápad totiž nepředpokládá snížení hodinové dotace na některý z předmětů, protože chce právoplatně zahrnout i diferenciální a integrální počet, který je často ze škol vyloučen i při velké dotaci pro oba předměty.

Argumenty proti výuce matematiky a fyziky jako jednoho celku

Proti 01 Výuka některých fyzikálních témat by byla zdlouhavá, kdyby mezi ně byly vkládány matematické partie. Jeden z anonymních recenzentů tohoto oddílu doplňuje: Myšlenke provázat fyziku s matematikou a dalšími předměty (například v rámci semináře) fandím. Pouze bych nabádal k opatrnosti. Krása fyziky je v tom snažit se vysvětlit věci snadno, jak to uměl například R. Feynman. Odvození vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb pomocí integrace dle mého krásu fyziky naprosto ničí.

Moje reakce: Předchozí reakce je cenná a jsem za ni vděčný a kvůli ní jsem celou anketu dělal, protože sám nemám fyzikální vzdělání. Je mi jasné, že jednoduchost je ve věcech tehdy, když jsou kratší nebo když složitější aparát nepotřebujeme. Tento názor ale obchází záměr matematického předmětu se složitějším aparátem studenty seznámit – a musíme též po pravdě přiznat, že fyzika by bez složitějšího matematického aparátu nedošla ve svém poznání světa tak daleko. Asi bychom měli říci, že fyzika doplněná matematikou ztrácí svou eleganci. Nicméně mám za to, že by fyzika a matematika vyučované jako jeden celek podávaly pravdivější obraz o vědecké práci i o složitostech, na které při zkoumání světa narážíme.

Moje reakce: Výuka všech témat by byla pro mnohé studenty zdlouhavá, jako i celé studium, ale nepřesáhla by čtyři roky (pokud máme na mysli výuku na čtyřletém gymnáziu).

Proti 02 Některá témata matematiky by při společném procházení matematiky a fyziky jako jednoho celku nebyla probrána.

Moje reakce: Tento argument je vážný a znamená, že výuka matematiky a fyziky jako jednoho celku by nemohla pokrýt celé čtyři roky gymnaziální výuky, nýbrž by pokrývala pouze dva nebo tři roky, a poslední rok by musel být věnován probrání těch témat matematiky, které nebyly dosud pokryty. Souběžně by se fyzika mohla věnovat opakování a experimentům, které při výuce provázaného celku nebyly zdůrazněny či realizovány.

Proti 03 Učitelé na gymnáziu často nemají na matematiku a fyziku současně aprobaci, takže by nemohli vyučovat provázaný celek.

Moje reakce: Opět vážný argument, který bude možná nepřekonatelnou překážkou při realizaci výuky provázaného celku. Bylo by možné řešit v ojedinělých případech, kdy učitel má aprobaci na oba předměty, nebo velmi těsnou spoluprací učitele matematiky s učitelem fyziky. Mám spíše na mysli takovou formu spolupráce, která je užší než jen seskládání témat matematiky a témat fyziky do jiného pořadí – to by nefungovalo, protože jednotlivé celky jsou skutečně různé dlouhé. Užší spolupráce by zahrnovala, aby učitel fyziky odvozoval a přednášel veškerou teorii provázaného celku a učitel matematiky procvičoval veškeré příklady provázaného celku. Oba spolupracující vyučující by byli garanti výuky svého předmětu, ale podíl na výuce by víceméně sdíleli v každém tématu, ať už fyzikálním, nebo matematickým.

Proti 04 Asi nejvážnějším argumentem proti je systematická, kterou by ztratila matematika, pokud by oba předměty byly vyučovány v jednom celku (Fajmon, 2018, str.8). Například při studování vlastností funkce matematika zachází pouze s proměnnými x , y , zatímco fyzika už při popisu přímočarého pohybu zachází s hodnotami x_0 , $x(t)$, v_0 , $v(t)$, t , $a(t)$. Zkrátka postihnout fyziku je nesmírně náročné, protože téměř každý týden výuky se zabývá modelem jiné situace, s veličinami označenými jinými písmeny, zatímco matematika stále systematicky vynáší na vodorovnou osu soustavy souřadnic hodnotu proměnné x a na svislou osu hodnotu proměnné y . Matematika vytváří systém pomocí označení proměnných x a y , kdežto fyzika zkoumá reálný svět, provádí experimenty, objevuje hranice nemožného.

Moje reakce: Toto je argument, který zřejmě znemožní vyučovat matematiku a fyziku jako jeden celek prvotně, tj. na střední škole. Na vysoké škole spojení těchto předmětů už bude možné, protože to bude znamenat už druhé setkání s probíranými tématy. Nicméně stále si říkám, zda na vysoké škole na představení souhry matematiky a fyziky bude někdy čas, jedná se totiž o obsah přibližně šesti či sedmi semestrů, tj. pro vysoké školy učivo objemem nerealizovatelné. Pokud mixování matematiky a fyziky neprospívá v jistém smyslu oběma předmětům, znamená to, že jejich vzájemný vztah tedy vyučován nebude nikdy, jen pro studenty fyziky? Studenti matematických směrů často o fyzikálním využití nemají informace. Stále v mysli vidím ideální střední školu jako tu, která vyučuje matematiku a fyziku provázaně, i když to pro učitele bude znamenat novou formu spolupráce.

Proti 05 Propojení matematiky s fyzikou by pro většinu studentů mělo odstrašující účinek. Matematika občas baví i slečny, kterým fyzika nahání husí kůži – o ty bychom přišli (Výsledky ankety, 2018, str. 4).

Moje reakce: V podstatě souhlasím, i když celý argument by bylo možné i obrátit: lepší porozumění fyzice vyučované v provázanosti s matematikou by mohlo některé studenty fyziky získat.

Proti 06 Spojovat předměty není možné, protože máme žáky, jejichž znalosti upadají. O tom, jak upadly (Výsledky ankety, 2018, str. 4), svědčí to, že nyní nemusí probírat komplexní čísla, takže nemusí umět ani správně odmocňovat. Dokonce lze říci, že mnozí absolventi ZŠ nedokáží bez kalkulačky sčítat, odčítat, násobit a dělit velká či malá čísla, vyjádřená pomocí mocnin deseti.

Moje reakce: Ano, to by mohl být problém. Na druhé straně, obsah učiva by měl být určen shora učiteli a těmi, kdo správně tuší, co budou studenti potřebovat. Z toho důvodu je smutné, že komplexní čísla se na řadě škol neučí vůbec. Minimálně při řešení kvadratické rovnice by měla být komplexní čísla řádně probrána, aby studenti byli schopni počítat druhou odmocninu správně v každém případě.

Proti 07 Fyzika je jedna z mnoha přírodních věd, které matematiku potřebují – jistě nejvíc ze všech. Matematice bych ale ponechal její výlučné postavení mimo vědy přírodní i společenské (Výsledky ankety, 2018, str. 8).

Moje reakce: To je též pádný argument – matematika má výlučné postavení v jistém smyslu, není pouze jazykem přírodních věd, ale např. logika je návodem k filozofii a ke správnému myšlení vůbec. Podobně v britském školství existuje matematika jako předmět odděleně, pak další přírodní vědy fyzika, biologie, chemie jsou vyučovány v rámci jednoho předmětu Science (= Věda).

Proti 08 Propojení předmětů by bylo didakticky chaotické, nevynikl by systém. Možná by bylo dobré spíše zaměřit se na fyzikální seminář s využitím vyšší matematiky – ovšem vyžadovalo by to, aby takový předmět učil učitel s aprobačí matematika-fyzika, aprobace jen fyzika nestačí kvůli didaktice matematiky (Výsledky ankety, 2018, str. 11).

Proti 09 Učit matematiku a fyziku v rámci jednoho celku od 1. ročníku SŠ by vyžadovalo, aby žáci současně vstřebali (či měli umět) učivo tří ročníků matematiky podle většiny současných osnov, a sice rovnice, funkce a diferenciální počet – a to je nereálné (Výsledky ankety, 2018, str. 8).

Moje reakce: Jako člověk, který prošel systematickou výukou matematiky, nemám zřejmě právo navrhnout, aby se krásná struktura matematiky představovala studentům jinak než ve své čisté formě, s aplikacemi maximálně v geometrii a jinak nikde. Ovšem pokud uvážíme, že jedním ze základních kamenů studia matematiky na střední škole jsou funkce a že témata rovnice i diferenciální počet jsou jen doplněním tématu funkce, tak osnova představená v úvodu tohoto elektronického textu se už nejeví tak nereálná.

Shrnutí: Věřím, že lepší provázanost matematiky a fyziky by pomohla zejména při studiu fyziky. Pokud je nepřijatelné sloučit na gymnáziu matematiku v rozsahu 4-4-4-4 a fyziku v rozsahu 2-2-2-2 v jeden celek, věřím, že pro ideální znalosti z fyziky by pomohlo přesunout jednu hodinu matematiky týdně do fyziky (tj. matematiku učit v rozsahu 3-3-3-3 a fyziku též v rozsahu 3-3-3-3) a věnovat tuto hodinu nikoli experimentům nebo praktické části, ale spíše teoretickým východiskům a matematickým souvislostem, integrálnímu a diferenciálnímu počtu, apod. Aby byla zajištěna správná návaznost v takto vytvořeném předmětu „lépe vysvětlená fyzika“, musela by didaktická část matematiky pokryta dobrou učebnicí, která zatím v češtině neexistuje. Pro ta gymnázia, která věnují matematice ve čtyřletém součtu 12 a méně dotačních hodin, by se nic nezměnilo – jen by přibyla jedna hodina fyziky tam, kde

by si důležitost provázanosti uvědomovali a chtěli na ni položit důraz. Pro gymnázia, která věnují matematice čtyři a fyzice dvě dotační hodiny týdně, by jedna hodina matematiky byla v tomto ideálním modelu studia „věnována“ fyzice. Pokud by byla sestavena dobrá učebnice, která didakticky rozumně propojuje fyziku s matematickými tématy, pro učitele fyziky by tento model mohl být přijatelný.

Další možností by bylo nechat stranou citlivou otázku hodinové dotace a přidat na některých školách pro zájemce seminář Fyzikální motivace pro matematiku ve 3. a 4. ročníku gymnázia (tj. vyučovaný v době, kdy studenti už prošli téma rovnice a téma reálné funkce, tj. jsou připraveni ke vstřebání tématu diferenciální počet a dalších fyzikálních aplikací matematiky), jak tomu na některých gymnáziích je – tato varianta ovšem není ideální, protože předpokládá procházení řadu věcí z učiva fyziky důkladněji než jen v rámci opakování.

Literatura

- [1] Bednařík, M., Šíroková, M.: Fyzika pro gymnázia – mechanika. Praha, PROMETHEUS 2000.
- [2] Fajmon, B.: Fyzikální motivace pro výuku matematiky. Příspěvek na konferenci Trendy ve vzdělávání 2018, zveřejněn v písemné formě na adrese <http://matematicky.rozhovor.cz/predmety/mafy/Fajmon-Bretislav-prispevek.docx>.
- [3] Fuchs, E., Hrubý, D.: Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu na čtyřletém gymnáziu. PROMETHEUS 2006.
- [4] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika. VUTIUM Brno a PROMETHEUS Praha, 2000 1.vydání, 2013 2.přepřacované vydání.
- [5] Hrubý, D., Kubát, J.: Matematika pro gymnázia – diferenciální a integrální počet. PROMETHEUS, Praha 81997.
- [6] Krynický, M.: Matematika realisticky. Online učebnice 2010, matematika vyučovaná na gymnáziu, www.realisticky.cz.
- [7] Musilová, J., Musilová, P.: Matematika pro porozumění i praxi I. VUTIUM Brno, 2009.
- [8] Musilová, J., Musilová, P.: Matematika pro porozumění i praxi II. VUTIUM Brno, 2012 (dva svazky, samostatně neprodejné).
- [9] Musilová, J., Musilová, P.: Matematika pro porozumění i praxi III. VUTIUM Brno, 2018 (tři svazky, samostatně neprodejné).
- [10] Odvárko, O.: Matematika pro gymnázia – funkce. PROMETHEUS 1993, Praha.
- [11] Odvárko, O.: Matematika pro gymnázia – goniometrie. PROMETHEUS 1994, Praha.
- [12] Události na VUT 9-2001, str. 7 (představení učebnice Fyzika autorů Halliday, Resnick, Walker; rozhovor s Jiřím Grygarem).
- [13] Výsledky ankety o možné propojenosti předmětů matematiky a fyziky při výuce do jednoho celku. Uvedeno v červenci 2018 v nezpracované formě na adrese <http://matematicky.rozhovor.cz/predmety/mafy/vysledky-ankety.pdf>.