

## Cvičení z matematické analýzy 3

### Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

6. 3. 2019

## Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.

# Trocha teorie pro připomenutí

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ , funkce  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $d(x)$  jsou spojité v nějakém intervalu  $I$ .

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ , funkce  $a(x), b(x), c(x), d(x)$  jsou spojité v nějakém intervalu  $I$ .
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru  $ay'' + by' + cy = f(x)$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ , funkce  $a(x), b(x), c(x), d(x)$  jsou spojité v nějakém intervalu  $I$ .
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru  $ay'' + by' + cy = f(x)$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .
- Je-li  $f(x) = 0$ , hovoříme o **homogenní** rovnici.

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ , funkce  $a(x), b(x), c(x), d(x)$  jsou spojité v nějakém intervalu  $I$ .
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru  $ay'' + by' + cy = f(x)$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .
- Je-li  $f(x) = 0$ , hovoříme o **homogenní** rovnici.
- Při řešení homogenní rovnice  $ay'' + by' + cy = 0$  (\*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , tzn. najdeme kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ , funkce  $a(x), b(x), c(x), d(x)$  jsou spojité v nějakém intervalu  $I$ .
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru  $ay'' + by' + cy = f(x)$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .
- Je-li  $f(x) = 0$ , hovoříme o **homogenní** rovnici.
- Při řešení homogenní rovnice  $ay'' + by' + cy = 0$  (\*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , tzn. najdeme kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$ 
  - jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2$  dva různé reálné kořeny, má obecné řešení homogenní rovnice (\*) tvar  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$



- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ , funkce  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $d(x)$  jsou spojité v nějakém intervalu  $I$ .
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru  $ay'' + by' + cy = f(x)$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .
- Je-li  $f(x) = 0$ , hovoříme o **homogenní** rovnici.
- Při řešení homogenní rovnice  $ay'' + by' + cy = 0$  (\*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , tzn. najdeme kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$ 
  - jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2$  dva různé reálné kořeny, má obecné řešení homogenní rovnice (\*) tvar  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
  - má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen  $\lambda_1 = \lambda_2$ , má obecné řešení homogenní rovnice (\*) tvar  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ , funkce  $a(x), b(x), c(x), d(x)$  jsou spojité v nějakém intervalu  $I$ .
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru  $ay'' + by' + cy = f(x)$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .
- Je-li  $f(x) = 0$ , hovoříme o **homogenní** rovnici.
- Při řešení homogenní rovnice  $ay'' + by' + cy = 0$  (\*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , tzn. najdeme kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$ 
  - jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2$  dva různé reálné kořeny, má obecné řešení homogenní rovnice (\*) tvar  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
  - má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen  $\lambda_1 = \lambda_2$ , má obecné řešení homogenní rovnice (\*) tvar  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$
  - je-li  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , má obecné řešení homogenní rovnice (\*) tvar  $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

**Určete obecné řešení diferenciální rovnice**

**Určete obecné řešení diferenciální rovnice**

**1**  $y'' - 7y' + 12y = 0$

**Určete obecné řešení diferenciální rovnice**

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 0$$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

**Určete obecné řešení diferenciální rovnice**

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

3  $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$



**Určete obecné řešení diferenciální rovnice**

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

3  $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

$$[y = C_1 + C_2 e^{-5x}]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

3  $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 + C_2 e^{-5x}]$$

4  $4 \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$

## Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

3  $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 + C_2 e^{-5x}]$$

4  $4 \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$

$$[x = C_1 e^{\frac{5}{2}t} + C_2 t e^{\frac{5}{2}t}]$$

## Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

3  $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 + C_2 e^{-5x}]$$

4  $4 \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$

$$[x = C_1 e^{\frac{5}{2}t} + C_2 t e^{\frac{5}{2}t}]$$

5  $4y'' - 8y' + 5y = 0$

## Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

3  $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 + C_2 e^{-5x}]$$

4  $4 \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$

$$[x = C_1 e^{\frac{5}{2}t} + C_2 t e^{\frac{5}{2}t}]$$

5  $4y'' - 8y' + 5y = 0$

$$[y = e^x (C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})]$$

## Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

3  $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 + C_2 e^{-5x}]$$

4  $4 \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$

$$[x = C_1 e^{\frac{5}{2}t} + C_2 t e^{\frac{5}{2}t}]$$

5  $4y'' - 8y' + 5y = 0$

$$[y = e^x (C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})]$$

6  $y'' - 4y' + 13y = 0$

## Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1  $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}]$$

2  $y'' - y' - 6y = 0$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$$

3  $y'' + 5y' = 0$

$$[y = C_1 + C_2 e^{-5x}]$$

4  $4 \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$

$$[x = C_1 e^{\frac{5}{2}t} + C_2 t e^{\frac{5}{2}t}]$$

5  $4y'' - 8y' + 5y = 0$

$$[y = e^x (C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})]$$

6  $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$[y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)]$$

**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**



**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**

1  $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**

1  $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left[ y = -\frac{1}{2}e^x - \frac{\pi}{2} \sin 2x \right]$

**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**

1  $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left[ y = -\frac{1}{2}e^x - \frac{\pi}{2} \sin 2x \right]$

2  $y'' + 2hy' + h^2y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = C(a, C \in \mathbb{R})$

**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**

1  $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad [y = -\frac{1}{2}e^x - \frac{\pi}{2} \sin 2x]$

2  $y'' + 2hy' + h^2y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = C(a, C \in \mathbb{R})$

$$[y = e^{-hx}(a + (C + ah)x)]$$

**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**

1  $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left[ y = -\frac{1}{2}e^x - \frac{\pi}{2} \sin 2x \right]$

2  $y'' + 2hy' + h^2y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = C(a, C \in \mathbb{R})$   
 $\left[ y = e^{-hx}(a + (C + ah)x) \right]$

3  $\frac{d^2s}{dt^2} + 2a\frac{ds}{dt} + a^2s = 0, \quad s(0) = a, \quad s'(0) = 0$

**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**

1  $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left[ y = -\frac{1}{2}e^x - \frac{\pi}{2} \sin 2x \right]$

2  $y'' + 2hy' + h^2y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = C(a, C \in \mathbb{R})$   
 $\left[ y = e^{-hx}(a + (C + ah)x) \right]$

3  $\frac{d^2s}{dt^2} + 2a\frac{ds}{dt} + a^2s = 0, \quad s(0) = a, \quad s'(0) = 0 \quad \left[ s = ae^{-at} + a^2te^{-at} \right]$

**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**

1  $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad [y = -\frac{1}{2}e^x - \frac{\pi}{2} \sin 2x]$

2  $y'' + 2hy' + h^2y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = C(a, C \in \mathbb{R})$

$$[y = e^{-hx}(a + (C + ah)x)]$$

3  $\frac{d^2s}{dt^2} + 2a\frac{ds}{dt} + a^2s = 0, \quad s(0) = a, \quad s'(0) = 0 \quad [s = ae^{-at} + a^2te^{-at}]$

4  $y'' - y = 0, \quad \text{integrální křivka se dotýká přímky } y = x \text{ v bodě } [0, 0]$

**Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:**

1  $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left[ y = -\frac{1}{2}e^x - \frac{\pi}{2} \sin 2x \right]$

2  $y'' + 2hy' + h^2y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = C(a, C \in \mathbb{R})$

$$\left[ y = e^{-hx}(a + (C + ah)x) \right]$$

3  $\frac{d^2s}{dt^2} + 2a\frac{ds}{dt} + a^2s = 0, \quad s(0) = a, \quad s'(0) = 0 \quad \left[ s = ae^{-at} + a^2te^{-at} \right]$

4  $y'' - y = 0, \quad \text{integrální křivka se dotýká přímky } y = x \text{ v bodě } [0, 0]$

$$\left[ y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]$$