Cvičení z matematické analýzy 3

Kritéria konvergence

24. 4. 2019

Náplň cvičení

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Nekonečné řady*. MU Brno, 1994.
- Došlá, Z., Novák, V.; *Nekonečné řady*. MU Brno, 2013.

Kritéria konvergence řad s kladnými členy

Základní pojmy

Kritéria konvergence

Základní pojmy

Kritéria konvergence

- **Nutná podmínka konvergence**: Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

  Věta má tvar implikace, znamená to tedy, že

  - je-li $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;
  - vlastnost $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ obecně není dostatečná pro to, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala.

Základní pojmy

Kritéria konvergence

- **Nutná podmínka konvergence**: Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

  Věta má tvar implikace, znamená to tedy, že
  - je-li $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;
  - vlastnost $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ obecně není dostatečná pro to, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala.
- **Srovnávací**: nechť $a_n \leq b_n$ platí pro $\forall n \in \mathbb{N}$, pak
  - je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní;
  - je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Základní pojmy

Kritéria konvergence

- **Nutná podmínka konvergence**: Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

  Věta má tvar implikace, znamená to tedy, že

  - je-li $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;
  - vlastnost $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ obecně není dostatečná pro to, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala.

- **Srovnávací**: nechť $a_n \leq b_n$ platí pro $\forall n \in \mathbb{N}$, pak
  - je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní;
  - je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

- **Podílové**: nechť od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ platí pro $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$
  - $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní;
  - $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Základní pojmy

Kritéria konvergence - pokračování

Základní pojmy

Kritéria konvergence - pokračování

- **Limitní podílové**: jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, pak
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní pro $0 \leq q < 1$;
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní pro $q > 1$;
  - je-li $q = 1$, nelze o konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.

Základní pojmy

Kritéria konvergence - pokračování

- **Limitní podílové**: jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, pak
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní pro $0 \leq q < 1$;
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní pro $q > 1$;
  - je-li $q = 1$, nelze o konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.
- **Odmocninové**: nechť od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ platí pro $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$
  - $\sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní;
  - $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Základní pojmy

Kritéria konvergence - pokračování

- **Limitní podílové**: jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, pak
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní pro $0 \leq q < 1$;
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní pro $q > 1$;
  - je-li $q = 1$, nelze o konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.
- **Odmocninové**: nechť od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ platí pro $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$
  - $\sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní;
  - $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.
- **Limitní odmocninové**: jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, pak
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní pro $0 \leq q < 1$;
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní pro $q > 1$;
  - je-li $q = 1$, nelze o konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.

Základní pojmy

Kritéria konvergence - dokončení

Základní pojmy

Kritéria konvergence - dokončení

- **Integrální kritérium**: Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy existuje spojitá funkce $f(x)$, pro kterou platí:
  - $f(x)$ je nerostoucí na intervalu $\langle K, \infty)$ pro nějaké $K \in \mathbb{R}$;
  - od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ platí pro $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$: $f(n) = a_n$

  Existuje-li vlastní limita $lim_{t\to\infty} \int_K^t f(x)dx$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

  Je-li $lim_{t\to\infty} \int_K^t f(x)dx = \infty$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\sum \frac{1}{3^n}$)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\sum \frac{1}{3^n}$)]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\sum \frac{1}{3^n}$)]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ [konverguje (podle podílového krit.)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\sum \frac{1}{3^n}$)]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ [konverguje (podle podílového krit.)]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\frac{1}{2^n}$)]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$ [konverguje (podle srov. krit. s řadou $\sum \frac{1}{3^n}$)]

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ [konverguje (podle podílového krit.)]

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ [diverguje (podle podílového krit.)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje (podle odm. krit.)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje (podle odm. krit.)]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ [konverguje (podle odm. krit.)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$ [konverguje (podle odm. krit.)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje (podle odm. krit.)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$ [konverguje (podle odm. krit.)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje (podle odm. krit.)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$ [konverguje (podle odm. krit.)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ [diverguje (podle srovn. resp. integr. krit.)]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje (podle odm. krit.)]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$ [konverguje (podle odm. krit.)]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ [diverguje (podle srovn. resp. integr. krit.)]

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4-9}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje (podle odm. krit.)]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$ [konverguje (podle odm. krit.)]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ [diverguje (podle srovn. resp. integr. krit.)]
4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4-9}$ [konverguje (podle srovn. krit.)]