Cvičení z matematické analýzy 3

Alternující řady

24. 4. 2019

Náplň cvičení

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Nekonečné řady*. MU Brno, 1994.
- Došlá, Z., Novák, V.; *Nekonečné řady*. MU Brno, 2013.

Alternující řady

Základní pojmy

Základní pojmy

Alternující řada

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá **alternující**, jestliže pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

Základní pojmy

Alternující řada

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá **alternující**, jestliže pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

Kritérium konvergence (Leibnizovo)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta má tvar ekvivalence, znamená to tedy (mimo jiné), že

- je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje;
- vlastnost $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je nutná i dostatečná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Absolutní konvergence číselných řad

Absolutní konvergence číselných řad

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Absolutní konvergence číselných řad

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Absolutní/neabsolutní konvergence

- Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně**, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \ln n}{n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\ln n}{n}$ [konverguje neabsolutně]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \ln n}{n}$ [konverguje neabsolutně]
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n-\ln n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\ln n}{n}$ [konverguje neabsolutně]
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n-\ln n}$ [konverguje neabsolutně]

Domácí úkol – soubor cvičení 10

1. Určete součet řady
   a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+6)(n+2)}$
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$
2. Zjistěte, je-li splněna nutná podmínka konvergence řady
   $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$
3. Rozhodněte o konvergenci řady
   a) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4 \cdot 3^4}} + \dots$
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln (n+1)}$
4. Rozhodněte o (ne)absolutní konvergenci či divergenci řady
   $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$