MA 0008 – teorie psti

přednáška 02: klasická a geometrická pst

Z povahy množiny Ω všech elementárních výsledků experimentu lze provést rozdělení na různé pstní modely

Ot. 07: model psti 01 – klasická pst

a) Ω má konečně mnoho možných výsledků a

b) všechny tyto výsledky mají stejnou možnost nastat

Pak pro pst jevu $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

(podíl počtu prvků obou množin)

Př.1: Dvakrát hodíme kostkou – jaká je pst, že součet obou hodů je roven 5?

$\Omega=\{[1;1],[1;2],[1;3],\ldots,[6;5],[6;6]\}$ ... možných výsledků je ...

A ... součet obou čísel je roven 5

$A=\{[1;4],[4;1],[2;3],[3;2]\}$

Tj. $P(A)=?$

Př.1: Dvakrát hodíme kostkou – jaká je pst, že součet obou hodů je roven 5?

$\Omega = \{[1;1],[1;2],[1;3],\ldots,[6;5],[6;6]\}$ … možných výsledků je 36

A … součet obou čísel je roven 5

$A = \{[1;4],[4;1],[2;3],[3;2]\}$

Tj. $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}1111111111111$

Př.2: Z karet na mariáš (32) vybereme 4 … jaká je pst, že aspoň jedna je eso?

Ω= všechny možné čtveřice karet

A … aspoň jedna z dané čtveřice karet je eso

A= ty čtveřice, kde právě jedna karta je eso + čtveřice, kde právě dvě karty jsou eso + čtveřice, kde právě 3 karty jsou eso + jediná čtveřice se všemi čtyřmi esy

Tedy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \ldots$

Př.2: Z karet na mariáš (32) vybereme 4 … jaká je pst, že aspoň jedna je eso?

Ω= všechny možné čtveřice karet

A … aspoň jedna z dané čtveřice karet je eso

A= ty čtveřice, kde právě jedna karta je eso + čtveřice, kde právě dvě karty jsou eso + čtveřice, kde právě 3 karty jsou eso + jediná čtveřice se všemi čtyřmi esy

Tedy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{28}{2}+\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{1}+1}{\binom{32}{4}} = 0{,}4305895 \doteq 0{,}4306.$

Př.2: Nešel by spočítat nějak jednodušeji?

Ω= všechny možné čtveřice karet

A … aspoň jedna z dané čtveřice karet je eso

Tedy $P(A)$ =??

Př.2: Ano, pomocí opačného jevu:

Ω= všechny možné čtveřice karet

A ... aspoň jedna z dané čtveřice karet je eso

$\bar{A}$ ... žádná z dané čtveřice není eso

Tedy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}} \doteq 0{,}4306.$

Ot. 08: model psti 02 – geometrická pst

a) Ω má NEkonečně mnoho možných výsledků a

b) všechny tyto výsledky mají stejnou možnost nastat

Pak pro pst jevu $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

(kde μ je míra daných množin … podle dimenze množiny je to délka, obsah, objem množiny)

Př.3: Tramvaj jezdí v 7-min intervalech. Jaká je pst, že budeme čekat $\geq$ 4 min?

Předpoklad: přicházíme na zastávku náhodně, nedíváme se na hodinky. Tj. každá možná doba čekání na další tramvaj má stejnou šanci nastat

Ω=?

A … na tramvaj čekáme více než 4 minuty

P(A)=?

(nelze počítat podle klasického modelu, protože množiny jsou nekonečné)

Př.3: Tramvaj jezdí v 7-min intervalech. Jaká je pst, že budeme čekat ≥ 4 min?

Předpoklad: přicházíme na zastávku náhodně, nedíváme se na hodinky. Tj. každá možná doba čekání na další tramvaj má stejnou šanci nastat

$\Omega = \langle 0;7\rangle$

- A ... na tramvaj čekáme aspoň 4 minuty, $A = \langle 4;7\rangle$

$P(A) = \frac{d(A)}{d(\Omega)} = \frac{3}{7} = 0{,}4285714 \doteq 0{,}4286.$

Př.4: Honza a Marek se domluvili na setkání mezi 8 a 9 hod ráno

Ovšem oba vstávají náhodně, tj. jejich příchod v jakémkoli okamžiku dané hodiny je stejně možný.

Navíc oba odmítají čekat na toho druhého více než 15 minut.

Jaká je pst, že se vůbec Honza a Marek na daném místě setkají?

Označme: 8+x … doba přích. Honzy
8+y … doba přích. Marka

Pak $\Omega = \langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle$ … jedná se o část roviny!!!! Čtverec o straně 1.

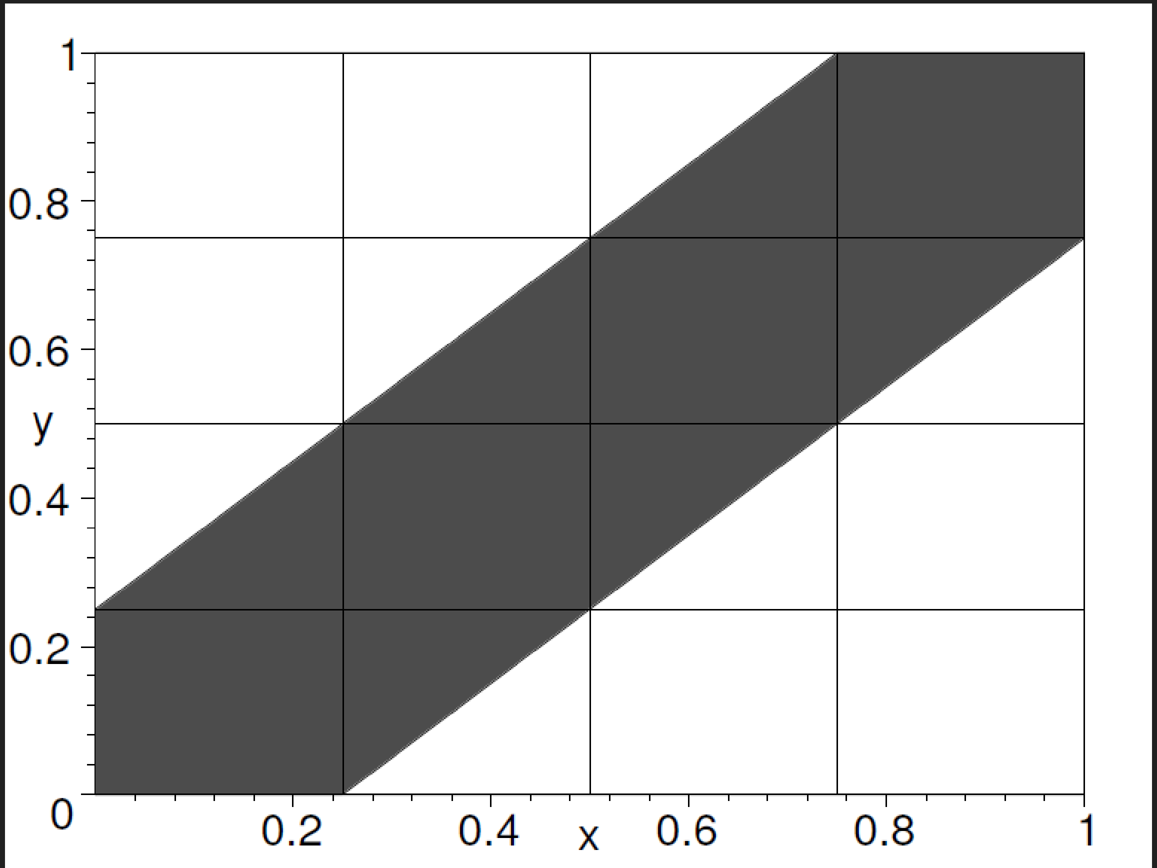
A … Honza a Marek se setkají;

- a) Které body v dané části roviny odpovídají jevu A?

b) Jedná se o dvoudimenzionální úlohu, P(A)=$\frac{S(A)}{S(\Omega)}$ = … ???,

kde S() je obsah plochy

x,y se nesmí lišit o více než 0,25 hod:



Obsah plochy A lze zjistit podle počtu vyšrafovaných čtverců o hraně 0,25:

- $P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{7}{16}=0,4375.$

Ot. 09: model psti 03 – diskrétní pst

a) Ω má konečně mnoho elementárních výsledků, nebo je jich stejně jako přirozených čísel

b) tyto výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat

- Pak pro pst jevu $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$$

(kde p je tzv pstní funkce)

Z axiomů psti plyne pro pstní funkci:

1. $\sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = 1$ … axiom normovanosti
2. $p(\omega_i) \geq 0$ pro každý elementární výsledek $\omega_i \in \Omega$
3. $\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$ (axiom součtu pstí neslučitelných jevů)

Př.: házeme kostkou tak dlouho, až poprvé padne šestka; pak skončíme; ω_i je jakákoli přípustná sekvence hodů za těchto podmínek. Určete pst, že na první šestku budeme potřebovat více než tři hody.

Ot. 10: model psti 04 – spojitá pst

a) Ω má nespočetně nekonečně mnoho elementárních výsledků, tedy se jedná o interval reálných čísel

b) tyto výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat

Pak pro pst jevu (a;b) ⊆ Ω platí

$$P((a;b)) = \int_a^b f(x)dx$$

(kde f je tzv hustota psti … je to funkce nezáporná a po částech spojitá)

Z axiomů psti plyne pro hustotu psti:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ … axiom normovanosti
2. $p(\omega_i)=\int_{\omega_i}^{\omega_i} f(x)dx = 0$ (pst měříme pomocí obsahů, nikoli pomocí funkčních hodnot);
   $P((a;b))= \int_a^b f(x)dx \geq 0$ (protože hustota f je nezáporná, tj. obsah podgrafu je nezáporný)
3. $P((a;b))= \int_a^b f(x)dx$ (součet má formu integrálu)

Př: mobily jisté firmy mají životnost v průměru 15 let; jaká je pst, že náhodně koupený mobil vydrží více než 10 let?

Rekapitulace otázek:

7. Klasická pst
8. Geometrická pst
9. Diskrétní pst
10. Spojitá pst