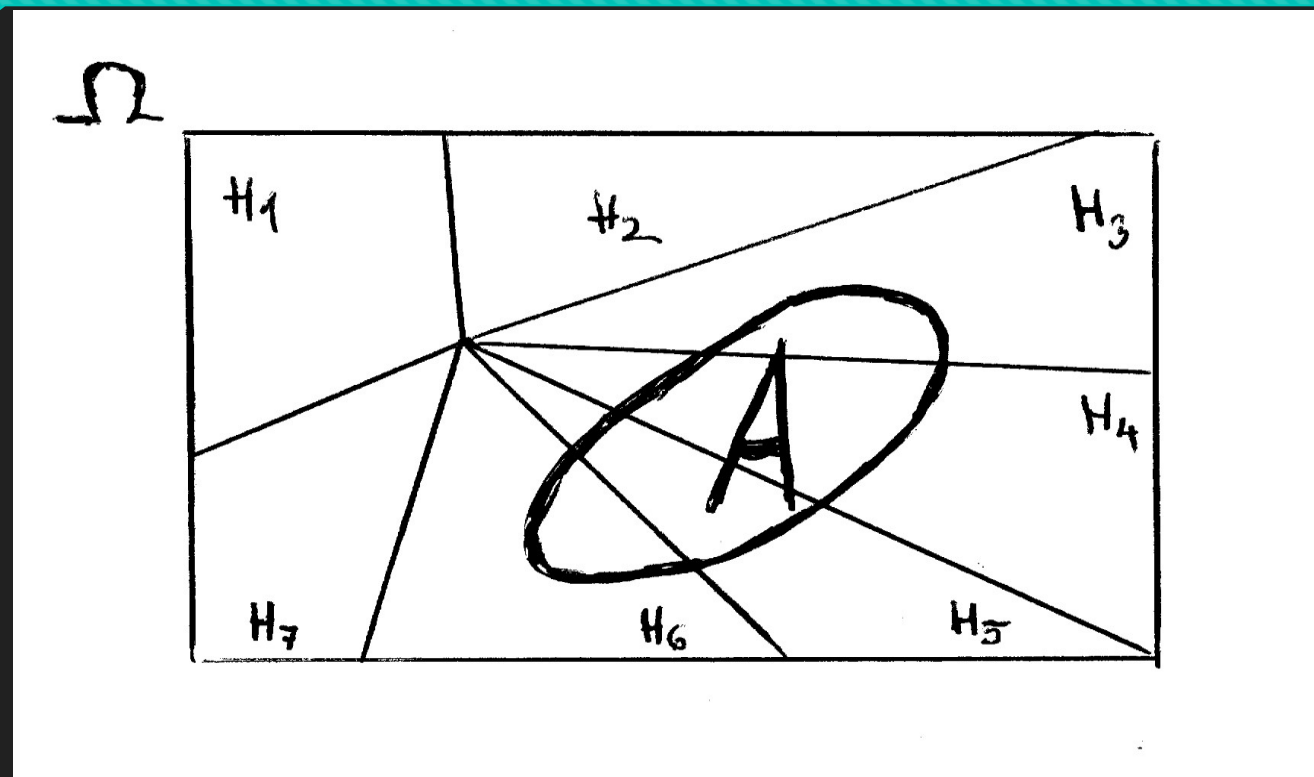


**přednáška 04:
věta o úplné psti
Bayesův vzorec**

Otázka č. 15: věta o úplné psti - obrazem



Ot. č 15: Věta o úplné psti - slovem

Pokud $\{H_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ je rozklad množiny Ω a $P(H_i) > 0$ pro všechna i , tak pst jevu $A \in \Omega$ lze určit ze vztahu

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A | H_n)$$

○ (větu užijeme tehdy, když $P(A)$ nelze spočítat přímo, ale $P(H_i) \cdot P(A | H_i)$ lze určit relativně snadno)

Důkaz: plyne z axiomu 3 a vyjádření A jako slednocení neslučitelných jevů $A = (H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \dots \cup (H_n \cap A)$

(a pro každý průnik 2 jevů užijeme větu o součinu pstí)

Příklad: v čokoládovně se kompletují bonboniéry na třech výrobních linkách

Linka 1 ... kompletuje 40 % produkce, pokazí 5 % bonb.

Linka 2 ... kompletuje 45 % produkce, pokazí 4 % bonb.

Linka 3 ... kompletuje zbytek produkce, pokazí 2 % bonb.

Zkontrolujeme náhodně vybranou bonboniéru ... jaká je šance, že nebude v normě (= není správně zabalena)?

Řešení úlohy na úplnou psť je hračkou tehdy, pokud dobře určíme jevy H_1, H_2, H_3 , jejichž psť známe

H_1 ... ?

$P(H_1)=??$

H_2 ... ?

$P(H_2)=??$

H_3 ... ?

$P(H_3)=??$

A ... ???????

H_1 ... čokoláda byla balena na lince 1

$P(H_1)=??$

H_2 ... čokoláda byla balena na lince 2

$P(H_2)=??$

H_3 ... čokoláda byla balena na lince 3

$P(H_3)=??$

A ... náhodně vybraná bonboniéra je zmetkově zabalena

H_1 ... čokoláda byla balena na lince 1

$$P(H_1)=0,40$$

H_2 ... čokoláda byla balena na lince 2

$$P(H_2)=0,45$$

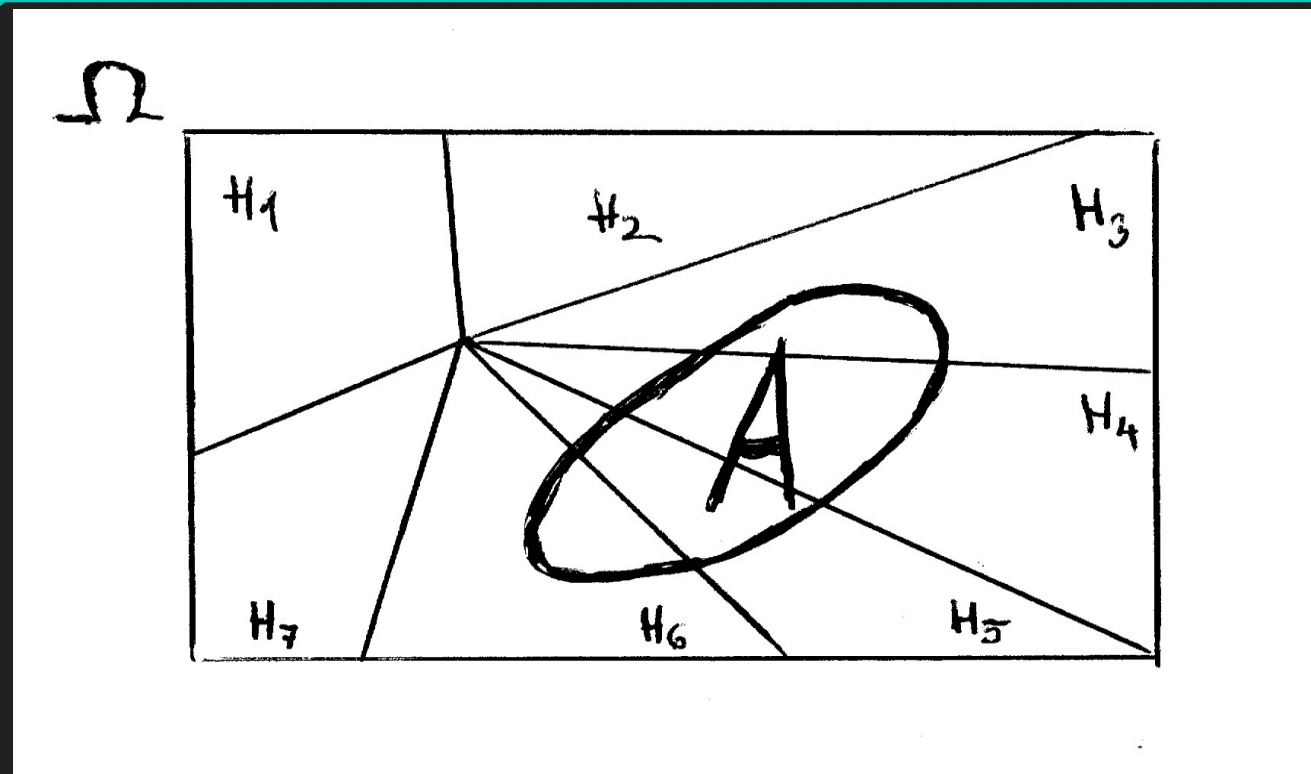
H_3 ... čokoláda byla balena na lince 3

$$P(H_3)=0,15$$

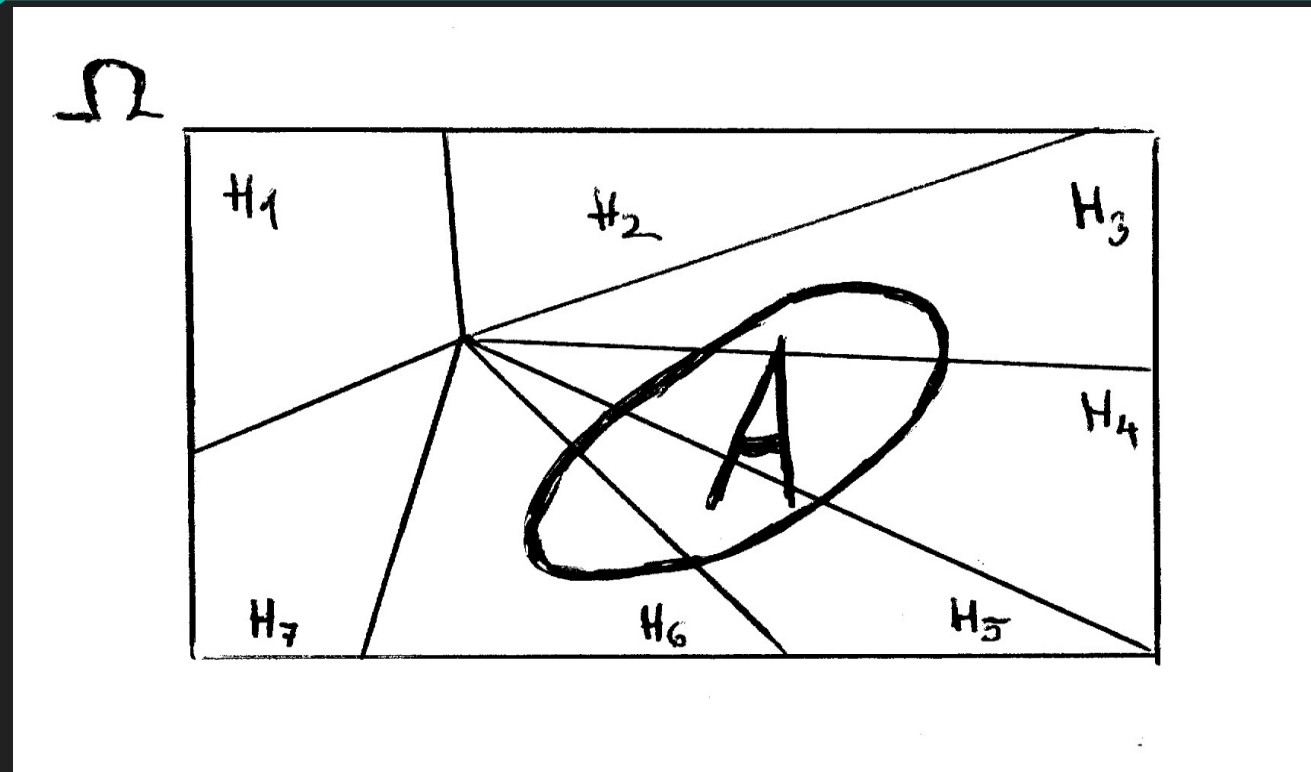
A ... náhodně vybraná bonboniéra je zmetkově zabalena

$$P(A)=0,40 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot 0,04 + 0,15 \cdot 0,02 = 0,041$$

Otázka č. 16: Bayesův vzorec – obrazem
(stejný obr, ale jiný vzorec!!!)



Otázka č. 16: Bayesův vzorec – obrazem
(co bychom tak ještě mohli chtít spočítat v této situaci?)



Ot. č 16: Bayesův vzorec – slovem
(co bychom tak mohli chtít ještě spočítat v té situaci??)

řekněte

Ot. č 16: Bayesův vzorec – slovem
(co bychom tak mohli chtít ještě spočítat v té situaci??)

$P(A | H_1)$ je relativně snadné většinou určit; ovšem

- $P(H_1 | A)$ není často jednoduché určit, i když máme k dispozici vzorec $P(H_1 | A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}$ jako základní vzorec pro podmíněnou pst

Veškerá věda Bayesova vzorce spočívá v tom, že

Do čitatele základního vzorce pro podmíněnou pst

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}$ dosadíme větu o součinu

o A do jmenovatele větu o úplné psti:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}$$

(všimněte si, že v čitateli Bayesova vzorce se vyskytuje jeden člen sumy ze jmenovatele ... pomůcka pro zapamatování)

Tímto způsobem nespočteme jen $P(H_1 | A)$, ale také $P(H_i | A)$ pro jakékoli i :

$$\circ P(H_i | A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A | H_n)}$$

(v čitateli je pevné i , ve jmenovateli se i mění)

Vraťme se k příkladu s čokoládovnou:
v čokoládovně se kompletují bonboniéry na třech výrobních linkách

Linka 1 ... kompletuje 40 % produkce, pokazí 5 % bonb.

Linka 2 ... kompletuje 45 % produkce, pokazí 4 % bonb.

Linka 3 ... kompletuje zbytek produkce, pokazí 2 % bonb.

Zkontrolovali jsme náhodně vybranou bonboniéru a zjistili, že není v normě (tato podmínka nastala) ... s jakou psťí byla zkompletována na lince 1 (nebo 2, nebo 3)?

Tohle všechno už jsme spočítali v otázce 15:

H_1 ... čokoláda byla balena na lince 1 $P(H_1)=0,40$

H_2 ... čokoláda byla balena na lince 2 $P(H_2)=0,45$

H_3 ... čokoláda byla balena na lince 3 $P(H_3)=0,15$

A ... náhodně vybraná bonboniéra je zmetkově zabalena

$$P(A)=0,40 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot 0,04 + 0,15 \cdot 0,02=0,041$$

$$P(H_1|A)=? \quad P(H_2|A)=?? \quad P(H_3|A)=???$$

Nyní přidáme $P(H_1|A)=?$ $P(H_2|A)=??$ $P(H_3|A)=???$

H_1 ... čokoláda byla balena na lince 1 $P(H_1)=0,40$

H_2 ... čokoláda byla balena na lince 2 $P(H_2)=0,45$

H_3 ... čokoláda byla balena na lince 3 $P(H_3)=0,15$

○ A ... náhodně vybraná bonboniéra je zmetkově zabalena

$$P(A)=0,40 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot 0,04 + 0,15 \cdot 0,02=0,041$$

$$P(H_1|A)=\frac{0,40 \cdot 0,05}{0,041}, P(H_2|A)=\frac{0,45 \cdot 0,04}{0,041}, P(H_3|A)=\frac{0,15 \cdot 0,02}{0,041},$$

$P(H_i)$... apriorní psti (a priori = předem, před měřením)
 $P(H_i | A)$... aposteriorní psti = psti po měření

Apriorní psti:

$$P(H_1) = 0,40$$

$$P(H_2) = 0,45$$

$$P(H_3) = 0,15$$

Aposteriorní psti:

$$P(H_1 | A) = 0,4878$$

$$P(H_2 | A) = 0,439$$

$$P(H_3 | A) = 0,0732$$

Po nalezení chybně balené čokolády narostla pst, že byla balena na lince 1, kdežto klesly psti, že byla balena na lince 2 nebo že byla balena na lince 3

Rekapitulace otázek:

15. Věta o úplné psti

16. Bayesův vzorec