přednáška 05: diskrétní náhodná veličina

Zabývejme se nyní znovu pstními modely, ale tak nějak od začátku

Klasická pst se rozvíjela díky hazardním hrám a sázkám

Moderní teorie psti se věnuje spíše popisu náhodnosti při měření nějaké veličiny – používá proto další pojmy a terminologii

Klíčovým pojmem zde je náhodná kvantitativní veličina, která může být dvou typů: diskrétní a spojitá

Následující výklad viz Budíková, Králová, Maroš: Průvodce základními statistickými metodami, str. 69-76

výklad pro EX, DX doplněn z el.textu Matematika 3, kapitola 10.

Příklad 1: hodíme třikrát mincí a zajímáme se o počet líců v těchto třech hodech

$\Omega=\{RRR, LRR, RLR, RRL, LLR, LRL, RLL, LLL\}$ … možných výsledků je 8

- Ke každému výsledku nyní přiřadíme reálné číslo odpovídající počtu líců … to bude hodnota náhodné veličiny X

X = počet líců ve třech hodech mincí

Počet líců X= …	Možné elem. výsledky	Pstní funkce	Relativní kumulativní četnosti
X=0	RRR	p(0)=1/8=0,125	0,125
X=1	LRR,RLR,RRL	p(1)=3/8=0,375	0,500
X=2	LLR,LRL,RLL	p(2)=3/8=0,375	0,875
X=3	LLL	p(3)=1/8=0,125	1,000

Definice: Náhodná veličina X je tedy pravidlo, které zobrazuje základní prostor možných elementárních výsledků experimentu-pokusu do množiny reálných čísel

(také viz obrázek) … a teprve těmto reálným číslům přiřadíme psti

Klasické značení:

$X = x$ … náhodná veličina X nabývá hodnoty x

$X = 1$ … náhodná veličina X nabývá hodnoty 1

$X \leq x$ … náhodná veličina X nabývá hodnoty menší než nebo rovné x

$X \leq 2$ … náhodná veličina X nabývá hodnoty menší než nebo rovné 2

Definice: Distribuční funkce F(x) náhodné veličiny X je pst, že veličina X nabývá hodnoty menší než nebo rovné x ..... $F(x) := P(X \leq x)$

Pokračujme v příkladu 1: najdeme graf distribuční funkce F(x) počtu líců ve třech hodech mincí

Distribuční funkce u diskrétní veličiny je velmi blízká relativní kumulativní četnosti, ale pozor, je definovaná pro jakékoli reálné x, tj. i když veličina X nabývá pouze hodnot 0,1,2,3, tak distribuční funkce je definována i pro x=2,26; x=-0,5; x=4,8, apod.

Distribuční funkce $F(x) := P(X \leq x)$

Pokračujme v příkladu 1: najdeme graf distribuční funkce F(x) počtu líců ve třech hodech mincí

$x<0$ … $F(x)=P(X\leq x)= 0$ … nelze naměřit počet líců ≤ záporn číslu

$x=0$ … $F(0)=P(X \leq 0)=p(0)= 0{,}125$

$0< x < 1$ … $F(x)=P(X\leq x)=p(0)=0{,}125$

$x=1$ … $F(1)=P(X \leq 1)=p(0)+p(1)= 0{,}500$

$1< x < 2$ … $F(x)=P(X\leq x)=p(0)+p(1)=0{,}500$ atd viz obrázek

vlastnosti distribuční funkce $F(x) := P(X \leq x)$

1. F je neklesající.
2. F je zprava spojitá
3. F je normovaná, tj. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ … důležité pro výpočty psti
5. $P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x \to x_{0-}} F(x) =$ … výška schodu v x_0

   (=0 v bodě spojitosti)
6. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$ … důležité pro výpočty psti

vlastnosti distribuční funkce $F(x) := P(X \leq x)$

Je důležité si pamatovat, že vlastnosti této distribuční funkce platí pro všechny veličiny, diskrétní (tato přednáška) i spojité (příští přednáška)

Pojem distribuční funkce je nejdůležitějším pojmem teorie psti, protože spojuje popis diskrétních i spojitých veličin do jednoho rámce

Střední hodnota EX diskrétní veličiny X:

Definice střední hodnoty vychází z pojmů vážený aritmetický průměr měření:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i,$$

- Kde p_i jsou relativní četnosti měření dané hodnoty

Přesně stejnou strukturu má i vzorec pro střední hodnotu veličiny X, jen místo empirických (= naměřených) četností p_i ve vzorci vystupují teoretické psti p_i:

Střední hodnota EX diskrétní veličiny X:
EX= $\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i$, kde x_i jsou veškeré hodnoty, kterých veličina X může nabývat, a p_i jsou jejich psti.

Střední hodnota EX náhodné veličiny X je tedy jakýsi teoretický průměr, který bychom vypočetli při velkém množství měření veličiny X, pokud by se veličina X chovala přesně podle daného teoretického popisu (popsaného pstní funkcí p)

Ad př. 1: EX= 0 ·0,125+1 ·0,375+2 ·0,375+3 ·0,125=1,5 … průměrně naměříme jeden a půl líců ve třech hodech mincí

Rozptyl DX a směrodatná odchylka $\sqrt{DX}$ diskrétní veličiny X:

Podobně jako u střední hodnoty: rozptyl náhodné veličiny X vychází z pojmu rozptyl hodnot měření:

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - \bar{x})^2,$$

- Kde p_i jsou relativní četnosti měření dané hodnoty;

Úpravou lze převést na tvar $s^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i^2\right) - \bar{x}^2$

(vážený průměr čtverců MINUS čtverec průměru)

Přesně stejnou strukturu má vzorec pro rozptyl DX náhodné veličiny X: … $DX = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot p_i\right) - (EX)^2$

Rozptyl DX náhodné veličiny X je tedy jakýsi teoretický rozptyl od střední hodnoty EX, který bychom vypočetli při velkém množství měření veličiny X, pokud by se veličina X chovala přesně podle daného teoretického popisu (popsaného pstní funkcí p)

Ad př.1: $DX = 0^2 \cdot 0{,}125 + 1^2 \cdot 0{,}375 + 2^2 \cdot 0{,}375 + 3^2 \cdot 0{,}125 - 1{,}5^2 = 0{,}75$

Protože ovšem DX je průměr čtverců veličiny, nemá rozměr stejný jako veličina X

Abychom viděli rozptýlení hodnot analogické rozměru veličiny X, často upravujeme rozptyl do tvaru směrodatné odchylky = $\sqrt{DX}$

- Ad př.1: DX= $0^2 \cdot 0{,}125 + 1^2 \cdot 0{,}375 + 2^2 \cdot 0{,}375 + 3^2 \cdot 0{,}125 - 1{,}5^2 = 0{,}75$

$\sqrt{DX} = 0{,}8660254$ … většina měření veličiny X leží v intervalu

$EX \pm \sqrt{DX} = 1{,}5 \pm 0{,}8660254 = (0{,}634; 2{,}366)$ … většina měření počtu líců ze tří hodů mincí bude ležet v tomto intervalu

Jedná se vlastně o Ot. 09: model psti 03 – diskrétní pst … pouze jsme dodali další pojmy (distrib fce, střední hodnota, rozptyl a směrodatná odchylka)

a) Ω má konečně mnoho elementárních výsledků, nebo je jich stejně jako přirozených čísel

b) tyto výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat

- Pak pro pst jevu $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$$

(kde p je tzv pstní funkce)

Z axiomů psti plyne pro pstní funkci:

1. $\sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = 1$ ... axiom normovanosti
2. $p(\omega_i) \geq 0$ pro každý elementární výsledek $\omega_i \in \Omega$
3. $\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$ (axiom součtu pstí neslučitelných jevů)

- *V přednášce 2 jsme počítali příklad:*

Př.: házeme kostkou tak dlouho, až poprvé padne šestka; pak skončíme; ω_i je jakákoli přípustná sekvence hodů za těchto podmínek. Určete pst, že na první šestku budeme potřebovat více než tři hody.

Mohli bychom si označit X= počet hodů před prvním výskytem šestky

Dopočtení F(x), ED, DX pro příklad z př. 2

Označme jej jako př. 2:

Př.: házeme kostkou tak dlouho, až poprvé padne šestka; pak skončíme; ω_i je jakákoli přípustná sekvence hodů za těchto podmínek.

Mohli bychom si označit X= počet hodů před prvním výskytem šestky

Určete F(x), EX, DX veličiny X

Rekapitulace otázek:

17: distribuční funkce, střední hodnota a rozptyl diskrétní náhodné veličiny