Příprava na státní zkoušku z didaktiky matematiky

Irena Budínová

Jak se připravovat ke SZZ

- Nežli začnete seskupovat materiály nebo se učit, je potřebné sestavit **základní osnovu** každé otázky.
- Díky osnově si ujasníte, jaké jsou hlavní body, o kterých budete mluvit. Ke každému bodu si můžete napsat poznámku, ve které disciplíně jste se s tímto tématem setkali – udělá dobrá dojem, když budete mít přehled.

- Na zkoušejícího rovněž udělá dobrý dojem, když jej s osnovou seznámíte a objasníte, jakým způsobem jste se k otázce postavili.
- Na základě sestavené osnovy můžete vypracovat otázku, nebo stačí vycházet z materiálů, které jste nashromáždili během studia.
- Osnovami pro některé otázky se budeme zabývat na přednášce.

Požadavky k zápočtu

- Vypracované úlohy
  - Každý student si vylosuje číslo úlohy, kterou bude vypracovávat.
  - Úlohy, vyskytující se v tomto materiálu, jsou analogické těm, které si můžete vylosovat u státnic.
  - Pečlivě čtěte zadání, úlohu vypracujte vyčerpávajícím způsobem.
  - Uveďte seznam literatury, kterou jste k vypracování použili.

20. Historie matematiky

- Vývoj matematiky rozdělujeme na několik hlavních etap:
  - První etapa (paleolit – 5. st. př. n. l.) je období vzniku a formulace základních matematických pojmů. Trvá mnoho tisíciletí. Formuluje se aritmetika i geometrie, avšak vše je úzce spojeno s praxí. Tato etapa končí tehdy, když v Řecku vzniká tzv. „čistá matematika“ s logickou soustavou vět a jejich důkazů.

- Druhá etapa (5. st. př. n. l. – počátek 17. st.) je etapa tzv. elementární matematiky, matematiky **konstantních veličin**.
- Třetí etapa (17. st. – začátek 19. st.) je nazývána obdobím matematiky **proměnných veličin**. Matematika buduje aparát k popsání změny, pohybu – vzniká matematická analýza a analytická geometrie.
- Čtvrtá etapa (19. st. – dodnes), období matematiky současné – má vysoce abstraktní ráz, ale také má vysokou praktickou aplikovatelnost.

- Výsledky první etapy a začátky druhé tvoří v podstatě obsah učiva dnešních základních škol. Výsledky druhé etapy tvoří náplň středních škol, zejména ve vyšších ročnících. S třetí etapou se seznamují studenti na vysokých školách. S výsledky čtvrté etapy se seznamují specialisté – odborní matematikové, pracovníci z jiných vědních oborů apod.

Stručný popis jednotlivých etap

- **První etapa**
  - Pojem přirozeného čísla byl zpočátku vázán na konkrétní předměty (např. počet ulovených mamutů), vývojem pak byl stále více chápán jako charakteristika toho, co je společné všem ekvivalentním množinám.
  - Pravěký člověk začal počty seskupovat. Časem vznikaly různé numerační systémy.
  - K velkému posunu v matematickém vývoji došlo v raně otrokářských státech (asi 4000 př. n. l.), kde se rozvíjel obchod, byl zaveden daňový systém, sestavovaly se kalendáře aj.

- Vznikaly různé číselné soustavy.
- Po celá tisíciletí bylo sčítání a odčítání jedinými mat. operacemi. Postupně vznikalo i násobení, nejdříve jako zdvojnásobování. Dělení mělo dlouhý vývoj, nebylo chápáno jako inverzní operace k násobení.
- Egyptští a babylonští matematikové vykládali úlohy dogmaticky a bez důkazů, přestože je zřejmé, že se výsledků nemohli dosáhnout jen empirickou cestou bez teoretického myšlení.
- Řecká matematika (8. – 6. st. př. n. l.) – položeny základy matematiky jako teoretické vědy.

- **Druhá etapa**
  - Matematika se měnila v **nauku deduktivní**. Toto období je často charakterizováno jako období **statické matematiky**. Tato etapa trvala přibližně dvě tisíciletí a je možno ji rozčlenit na několik období, která se liší svým obsahem a zaměřením.
  - **Řecká matematika** se zabývala především geometrií. Nejvýznamnější matematici: Thales z Miletu, Pythagoras, Platón, Aristoteles, Eukleides, Archimedes, Apollonios z Pergy, Erastothenes, Diofantos z Alexandrie aj.

- Z této doby pocházejí první důkazy geometrických vět
  - Thales (věta o vrcholových úhlech, Thaletova věta, věta o rovnosti úhlů při základně rovnoramenného trojúhelníku, o určenosti trojúhelníku pomocí strany a dvou přilehlých úhlů, o velikosti součtu vnitřních úhlů v pravoúhlém trojúhelníku)
  - Pythagorejci dokázali nesouměřitelnost úhlopříčky čtverce, ale to zcela odporovalo jejich filozofii, tak důkaz zatajili
- Své poznatky shromažďovali Řekové ve spisech „Základy“.

- **Asijská matematika:** Ve 4. st. př. n. l. vtáhl Alexandr Veliký se svými vojsky z Alexandrie do Indie. Díky této invazi se indičtí matematici poprvé dozvěděli o babylónské číselné soustavě a převzali ji.
  - Indická matematika byla spíše aritmetická.
  - Indové zavedli deset znaků pro čísla a poziční hodnotu číslic.
  - Pracovali se zápornými čísly i nulou.
  - Význační matematici: Arybhata (6. st.), Brahmagupta (7. st.), Bhaskara (12. st.)

- V Indii začala vznikat algebra, poznatky převzali a rozšířili Arabové. Al-Chórezmí – otec algebry.
- **Křesťanský starověk a středověk** celkem nepřispěl k dalšímu vývoji matematiky. Národy Evropy se jen pozvolna seznamovaly s arabskými matematickými spisy. Latinské výtahy z řeckých spisů byly nedokonalé. K posunu došlo od 13. do 15. století, a to díky obchodu, který kladl zvýšené nároky na početní techniku.

- Leonardo Pisánský (Fibonacci) – Liber Abaci.
- 16. st. – rozvíjí se algebra, zvláště nauka o rovnicích vyšších stupňů (del Ferro, Cardano, Ferrari). Viéte zavádí psaní písmen ve významu čísel.
- 17. st. – John Napier objevil logaritmus, 20 let poté Fermat a Descartes logaritmickou funkci, druhé období matematiky se blížilo konci.

- V 16. století vzniká kombinatorika v souvislosti s určením pravděpodobnosti výhry hazardních her a je spojena se jmény např. N. Tartaglii, B. Pascala, P. Fermata. K dalšímu vývoji kombinatoriky v 18. století přispěli zejména J. Bernoulli, G. W. Leibniz, L. Euler.
- V 19. století vzniká statistika, která se zezačátku zabývala číselným vyjádřením vlastností společnosti.

- **Třetí etapa**
  - Vzhledem k tomu, že většina matematiků té doby byla zároveň fyziky, vychází matematické poznatky ze studia fyzikálních zákonů. Popis pohybu těles vyžadoval dokonalejší aparát pro zvládnutí zákonů změn a studium závislostí mezi různými veličinami.
  - Fermat a Descartes zavedli pravoúhlou soustavu souřadnic.
  - Newton se zabýval rozkladem funkcí do mocninných řad a spolu s Leibnizem stojí na počátku infinitezimálního počtu. Vývoj pojmu funkce významně ovlivnil Euler.

- **Čtvrtá etapa**
  - Snaha o osvětlení základů matematiky, zpřesnění výsledků a zobecňování.
  - Matematika se stává stále více abstraktní, ale její poznatky nacházejí uplatnění v mnoha vědních oborech.
  - Významní matematici: Bolzano, Cauchy, Riemann, Abel, Weierstrass, Gauss, Wessel, Dedekind, Cantor, Zermelo, Lobačevskij
  - Vznik teorie množin, vývoj topologie, vznik neeuklidovských geometrií, rozvoj výpočetní techniky, specializace jednotlivých oborů.

Jsou znalosti z historie matematiky využitelné ve výuce?

- Jestliže učitel zná historický vývoj matematických pojmů a ví, s jakými těžkostmi byl spojen jejich vznik, může snáze pochopit obtíže žáků při seznamování se s těmito pojmy.
- Historické úlohy jsou využitelné jako zpestření výuky pro matematicky nadané žáky.

Literatura

- Balada, F.: *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN, 1959
- Bentley, P. J.: *Kniha o číslech.* Praha: Rebo, 2013
- Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M.: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy*. Brno: UJEP, 1987
- Crilly, T.: *50 myšlenek, které musíte znát. Matematika.* Praha: Slovart, 2010
- Devlin, K.: *Jazyk matematiky.* Praha: Dokořán, 2011
- Seife, Ch.: *Nula.* Praha: Dokořán, 2005

21. Historie vyučování matematice

I. Založení pražské univerzity Karlem IV. 7. dubna 1348
   - Univerzita měla čtyři fakulty – svobodných umění, právnickou, lékařskou a teologickou
   - Vyučovalo se gramatice, rétorice, dialektice a kvadriviu
   - Jan Křišťan z Prachatic, Jan Šindel, Tadeáš Hájek z Hájku, Tycho de Brahe, Johannes Kepler

- Vznikaly první učebnice počtů pro kupce a pro děti: Ondřej Klatovský z Klatov (1530), Jiří Brněnský (1567)
- Až do 16. století se početní vyučování omezovalo na čtyři základní početní výkony.
- Počítalo se „na linách“ a na vyšších školách „s ciframi“.
- Do konce 18. století ve školách přetrvalo mechanické počítání podle pravidel. Nebyl brán ohled na věk žáků.

II. Druhá polovina 16. a začátek 17. století: Rozvoj řemesel klade požadavky na matematické znalosti širších vrstev obyvatelstva. Vznikají **měšťanské školy**.

- Vyučuje se numerace, sčítání, odčítání, zdvojování, půlení, násobení, dělení, zlomky, trojčlenka, dělení v daném poměru, přepočítávání měr aj. Úroveň byla nízká, učení bylo zpravidla mechanické.
- Šimon Podolský z Podolí přispěl k zavedení jednotných měr v českých zemích.

- Jan Ámos Komenský (1592–1670)
  - Formulace obecných požadavků na vzdělávání a principů usnadňujících poznávání světa (cílevědomosti, postupnosti, systematičnosti, uvědomělosti, názornosti, aktivnosti, emocionálnosti, přiměřenosti, trvalosti)

III. V 17. a 18. století nastává ve světě bouřlivý rozvoj matematiky, zejména v oblasti funkcí a infinitezimálního počtu. V našich zemích je po bitvě na Bílé hoře, s čímž je spojena určitá stagnace. Elementární školy byly přenechány obcím a církvi. V roce 1707 byla založena pražská inženýrská škola, na této škole byla velká pozornost věnována matematice.

IV. Ve druhé polovině 18. století nastává renesance české matematiky
  - Reformy Marie Terezie, Josef Stepling.
  - V šedesátých letech 18. století začíná soustavné pěstování matematiky v českém jazyce.
  - 1869 – založení Jednoty českých matematiků a fyziků

V. Koncem 18. st. požadavky na vzdělanost přispěly k reformám, které zavedla Marie Terezie a které pokračují až dodnes.

- 1774 – reforma elementárního školství
- 1775 – reforma gymnaziálního studia
- 1869 – zákon o obecném školství
- 1877 – české školy obecné, české školy měšťanské

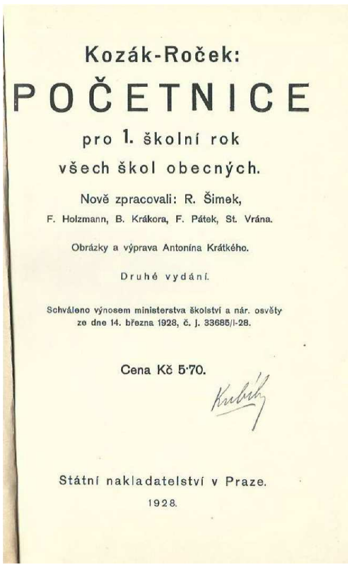
V. Od poloviny 19. století již můžeme v metodice počtů na našich školách sledovat určité základní tendence.

- **Umělé metody** (Grube, Hentschel, Močnik)
- **Přirozené metody** (Lošťák, Balcárek, Líbíček)
- J. Loutocký se pokusil spojit umělé a přirozené metody
- **Kombinační metoda** (J. Zlámal)
- **Globální metoda** (Václav Příhoda, 20. léta 20. st.), vychází z Thorndikovy psychologie chování a tvarové psychologie.

VI. 20. století

- 1948 – první školský zákon
- 1953 – 54 – druhý školský zákon
- 1960 – základní devítileté školy
- 1968 – zákon o čtyřletých gymnáziích
- 1976 – postupné ověřování nového množinově logického pojetí výuky matematiky
- 1986 – zjednodušení osnov z roku 1983
- 1996 – povinná devítiletá docházka, nové vzdělávací programy

Početnice z roku 1922



Kozák-Roček:

POČETNICE

pro 1. školní rok

všech škol obecných.

Nově zpracovali: R. Šimek, F. Holzmann, B. Krákora, F. Pátek, St. Vrána.

Obrázky a výprava Antonína Krátkého.

Druhé vydání.

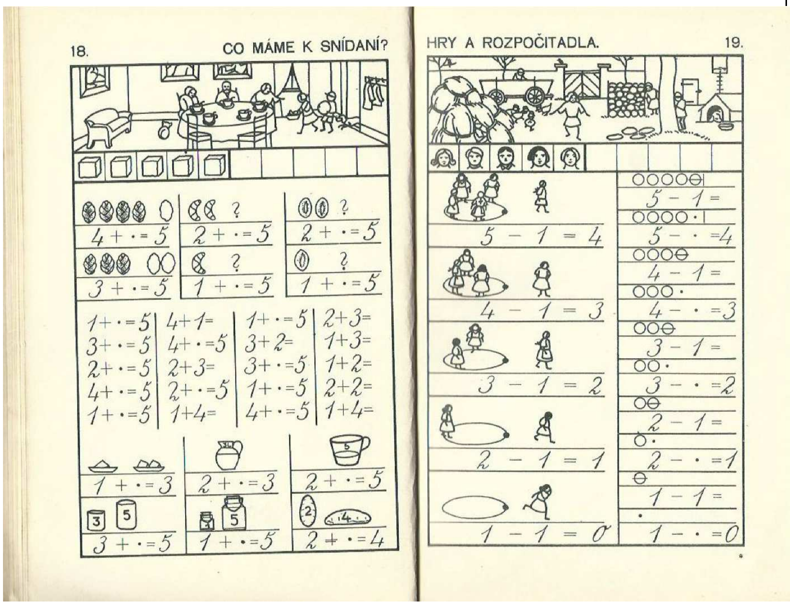
Schváleno výnosem ministerstva školství a nár. osvěty ze dne 14. března 1928, č. j. 33688/I-28.

Cena Kč 5·70.

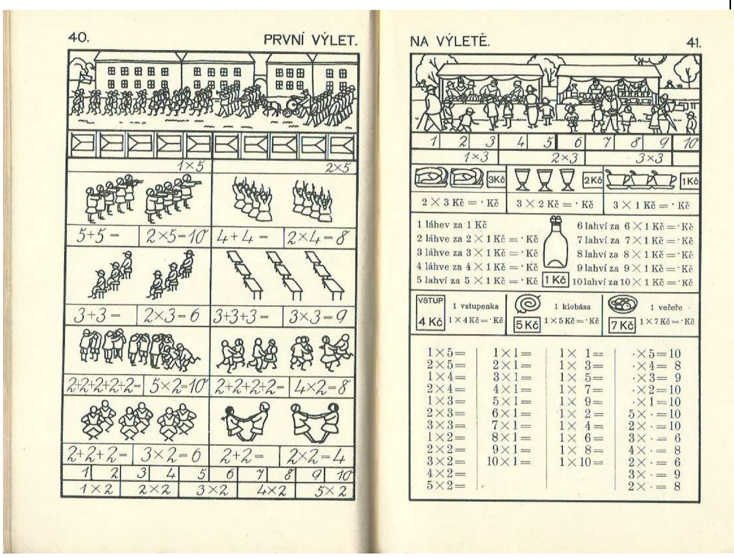
Státní nakladatelství v Praze.

1928.

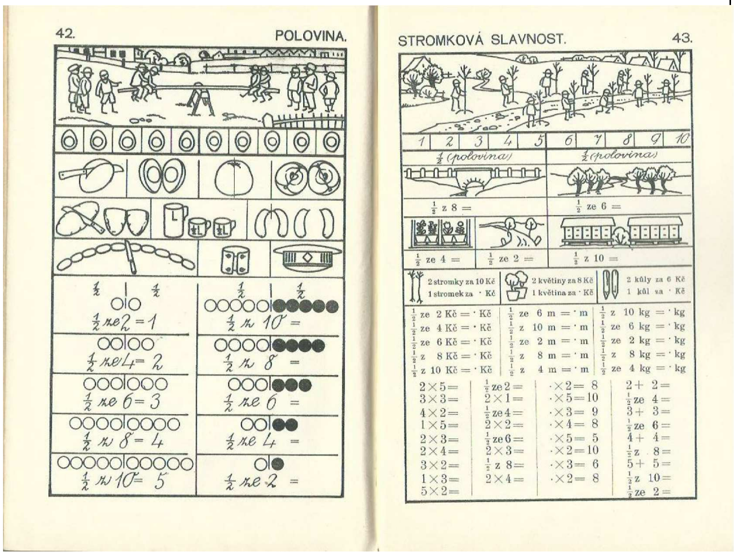
- Pojem čísla budován pomocí kardinálního pohledu
- Učebnice beze slov, s obrázky
- Mnoho procvičování, méně slovních úloh



Násobení jako opakované sčítání



Zlomky již od 1. třídy ve formě půlení



42. POLOVINA.

½ ze 2 = 1
½ ze 4 = 2
½ ze 6 = 3
½ z 8 = 4
½ z 10 = 5

½ z 10 =
½ z 8 =
½ ze 6 =
½ ze 4 =
½ ze 2 =

STROMKOVÁ SLAVNOST. 43.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

½ (polovina) ½ (polovina)

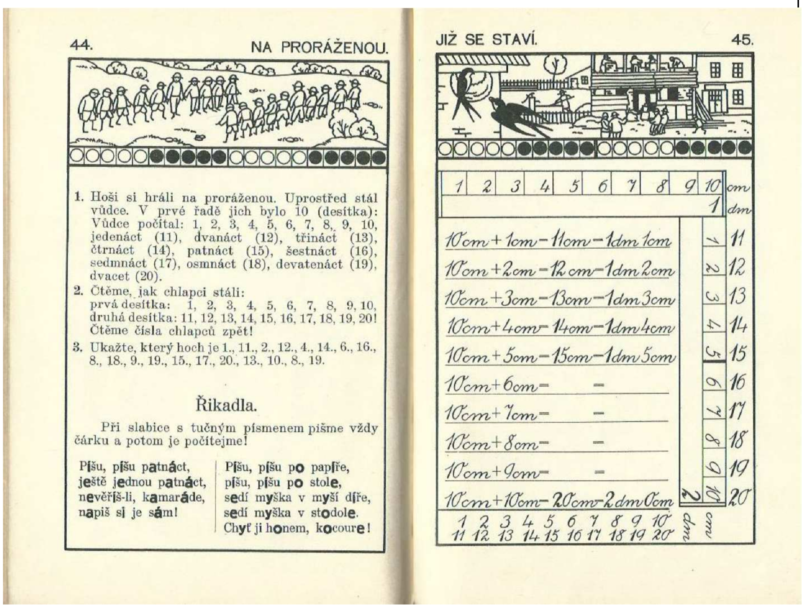
½ z 8 = ½ ze 6 =

½ ze 4 = ½ ze 2 = ½ z 10 =

2 stromky za 10 Kč, 1 stromek za · Kč
2 květiny za 8 Kč, 1 květina za · Kč
2 kůly za 6 Kč, 1 kůl za · Kč

½ ze 2 Kč = · Kč	½ ze 6 m = · m	½ z 10 kg = · kg
½ ze 4 Kč = · Kč	½ z 10 m = · m	½ ze 6 kg = · kg
½ ze 6 Kč = · Kč	½ ze 2 m = · m	½ ze 2 kg = · kg
½ z 8 Kč = · Kč	½ z 8 m = · m	½ z 8 kg = · kg
½ z 10 Kč = · Kč	½ z 4 m = · m	½ ze 4 kg = · kg

2×5=	½ ze 2 =	·×2= 8	2+ 2=
3×3=	2×1=	·×5=10	½ ze 4=
4×2=	½ ze 4 =	·×3= 9	3+ 3=
1×5=	2×2=	·×4= 8	½ ze 6=
2×3=	½ ze 6 =	·×5= 5	4+ 4=
2×4=	2×3=	·×2=10	½ z 8=
3×2=	½ z 8=	·×3= 6	5+ 5=
1×3=	2×4=	·×2= 8	½ z 10=
5×2=			½ ze 2=



44. NA PRORÁŽENOU.

1. Hoši si hráli na proráženou. Uprostřed stál vůdce. V prvé řadě jich bylo 10 (desítka): Vůdce počítal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, jedenáct (11), dvanáct (12), třináct (13), čtrnáct (14), patnáct (15), šestnáct (16), sedmnáct (17), osmnáct (18), devatenáct (19), dvacet (20).
2. Čtěme, jak chlapci stáli:
prvá desítka: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
druhá desítka: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20!
Čtěme čísla chlapců zpět!
3. Ukažte, který hoch je 1., 11., 2., 12., 4., 14., 6., 16., 8., 18., 9., 19., 15., 17., 20., 13., 10., 8., 19.

Říkadla.

Při slabice s tučným písmenem pišme vždy čárku a potom je počítejme!

Píšu, píšu patnáct,
ještě jednou patnáct,
nevěříš-li, kamaráde,
napiš si je sám!

Píšu, píšu po papíře,
píšu, píšu po stole,
sedí myška v myší díře,
sedí myška v stodole.
Chyť ji honem, kocoure!

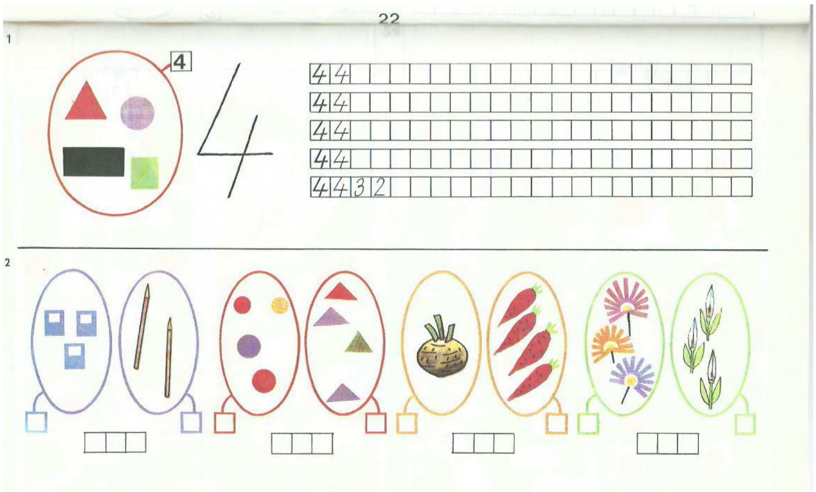
JIŽ SE STAVÍ. 45.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 cm
1 dm

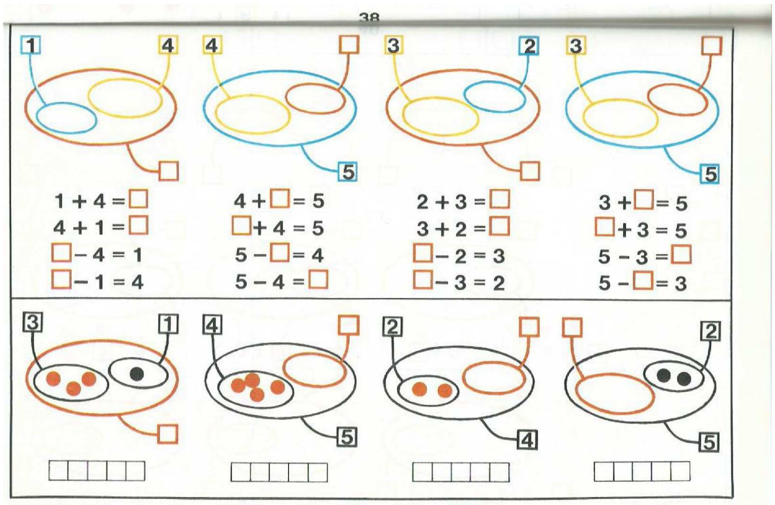
10 cm + 1 cm = 11 cm = 1 dm 1 cm — 1 — 11
10 cm + 2 cm = 12 cm = 1 dm 2 cm — 2 — 12
10 cm + 3 cm = 13 cm = 1 dm 3 cm — 3 — 13
10 cm + 4 cm = 14 cm = 1 dm 4 cm — 4 — 14
10 cm + 5 cm = 15 cm = 1 dm 5 cm — 5 — 15
10 cm + 6 cm = — — 6 — 16
10 cm + 7 cm = — — 7 — 17
10 cm + 8 cm = — — 8 — 18
10 cm + 9 cm = — — 9 — 19
10 cm + 10 cm = 20 cm = 2 dm 0 cm — 2 — 10 — 20

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 dm
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 cm

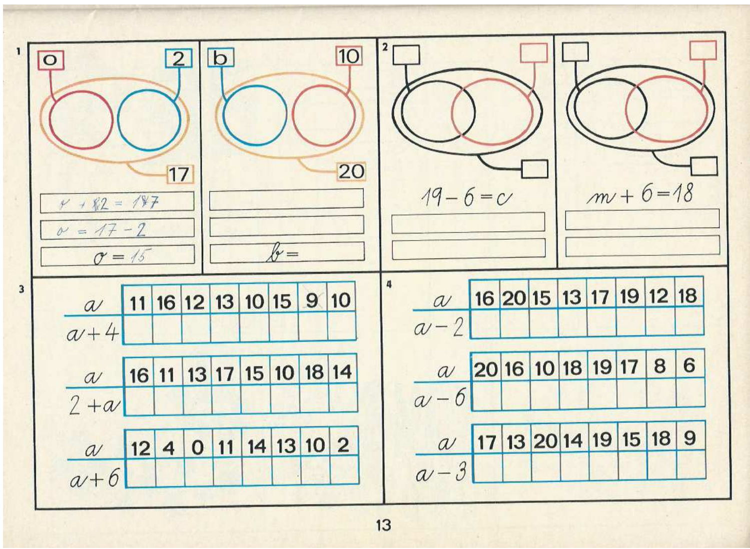
Početnice z roku 1984



Množinová matematika byla pro žáky velmi abstraktní



Došlo k posílení algebry a pojmů jako zobrazení, funkce, rovnice, nerovnice. Již žáci 1. třídy byli seznamováni s „proměnnou“



Kurikulární dokumenty pro výuku matematiky v 21. století

- Pod pojmem „kurikulum“ jsou v Pedagogickém slovníku uvedeny tři významy:
  1. *Vzdělávací program, projekt, plán.*
  2. *Průběh studia a jeho obsah.*
  3. *Obsah veškeré zkušenosti, kterou žáci získávají ve škole a v činnostech ke škole se vztahujících, její plánování a hodnocení.“* (Pedagogický slovník, 1998, s.118)
- Nás zajímá první význam.

- Kurikulární dokumenty jsou vytvářeny na dvou úrovních – státní a školní. Státní úroveň představují Národní program vzdělávání a rámcové vzdělávací programy. Školní úroveň přestavují školní vzdělávací programy.
- **Rámcové vzdělávací programy** vycházejí z nové strategie vzdělávání, která zdůrazňuje **klíčové kompetence** (souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena ve společnosti), jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě. Vycházejí z koncepce celoživotního učení, formulují očekávanou úroveň vzdělávání pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání. Dávají velký prostor autonomii škol, avšak také velké odpovědnosti učitelů za výsledky vzdělávání.

- Jednotlivé předměty jsou uvedeny v tzv. vzdělávacích oblastech. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je uvedena charakteristikou vzdělávací oblasti, cílovým zaměřením, vzdělávacím obsahem pro 1. stupeň ZŠ a pro 2. stupeň ZŠ.
- Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru **Matematika a její aplikace** je rozdělen do čtyř tematických okruhů:
  - Číslo a proměnná
  - Závislosti, vztahy, práce s daty
  - Geometrie v rovině a v prostoru
  - Nestandardní aplikační úlohy a problémy
- V každém tematickém okruhu jsou formulovány očekávané výstupy, které jsou závazné pro zpracování školních vzdělávacích programů a stručně je vymezeno učivo.

- Pro matematiku jsou dále zpracovány **Standardy**, ve kterých jsou podrobně zpracovány indikátory k jednotlivým bodům z RVP a jsou uvedeny ilustrační úlohy.

- V minulosti byly zpracovávány osnovy matematiky
- **Vzdělávací program Základní škola** (1996)
  - Učební plán: 6. – 9. ročník ZŠ: 4 hodiny matematiky
  - Osnovy matematiky: učivo rozčleněno po ročnících a do témat. V závěru každého tématu je uvedeno, co má žák umět a rozšiřující učivo.
  - Ukázka tématu 9. ročníku: **Základy finanční matematiky**

Pojmy: úrok, jistina, úroková doba, úrokovací období, úroková míra, jednoduché úrokování, složené úrokování

Učivo: výpočet úroku, určování počtu dní úrokové doby, jednoduché úrokování, složené úrokování, řešení slovních úloh z praxe

  - Co by měl žák umět: vypočítat úrok z dané jistiny za určité období při dané úrokové míře, určit hledanou jistinu, provádět jednoduché a složené úrokování, vypočítat úrok z úroku
  - **Příklady rozšiřujícího učiva**
    - řešení konkrétních problémů z praxe rodičů
    - valuty, devizy, převody měn
    - řešení úloh kombinovaného úrokování

- **Učební osnovy základní školy** (1979)
- Učební plán: 5. – 8. ročník ZŠ – 5 hodin matematiky v každém ročníku.
- Osnovy matematiky: učivo rozčleněno po ročnících a do témat, včetně hodinové dotace pro každé téma. V závěru každého ročníku je uvedeno opakování a shrnutí učiva.
- Ukázka jednoho tématu – 6. ročník

Procento (15 hodin)

- Opakování desetinných čísel. Procento. Jednoduché slovní úlohy na procenta.
- Žáci si zopakují operace s desetinnými čísly. S pojmem procento se seznamují jako jednou setinou z čísla. Objasní se jim význam procent při porovnávání kvantitativní stránky přírodních a společenských jevů, zejména jevů hospodářského života, rozvoje průmyslu a zemědělství. Při řešení základních slovních úloh s procenty se využije vzorce *č=z/100*p* (*č*- procentová část, *p*- počet procent, *z* – základ). Oborem proměnných je množina všech nezáporných desetinných čísel.

Literatura:

- Balada, F.: *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN, 1959
- Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M.: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy*. Brno: UJEP, 1987
- Mikulčák, J. a kol. *Metodika vyučování matematice na školách druhého cyklu*, část všeobecná, 1. díl. Praha: SPN, 1964

1. Individuální péče o žáky

- Individuální přístup k žákům je jeden z vyučovacích principů, formulovaný již J. A. Komenským. Každý žák má osobité vlastnosti, učí se různým tempem, má jistou úroveň vzdělání, rozličné zájmy, postoje k učení, charakterové vlastnosti, rozdílné vnímání, paměť, apod.
- Při posuzování žáka musí učitel respektovat:
  - úroveň vzdělání žáka
    - žáci retardovaní, pedagogicky i didakticky zpoždění,
    - žáci didakticky zrychlení, akcelerovaní,
    - žáci s neúplnými poznatky,

- morální individuální zvláštnosti
  - kázeňské zvláštnosti,
  - režimové zvláštnosti,
  - postoje, návyky,
  - volní a charakterové vlastnosti,
- esteticko-výchovná úroveň
  - citlivost, necitlivost,
  - tvořivost, konzumace,
  - potřeba povzbuzení,
- úroveň sociálního postavení dítěte
  - projevy a postavení v kolektivu,
  - role v sociálním prostředí,
- zdravotní a tělesné zvláštnosti,
- výrazné psychické zvláštnosti
  - bystrost,
  - úroveň myšlení.

- Co je to „modelový“ žák?
- Cílem pro učitele by nemělo být mít třídu „modelových“ žáků, ale znát a respektovat specifika každého žáka.
- Podstata individuální péče tkví v tom, že učitel poskytuje každému žákovi jen tolik pomoci, aby žák měl dostatečný prostor pro vlastní myšlenkovou činnost a dobral se nových poznatků vlastní činností. Učitel zajišťuje individuální péči
  - cílevědomým pozorováním každého žáka ve třídě,
  - odstraňováním nedostatků ve vlastnostech žáků,
  - plánem rozvoje schopností.

- **Děti se speciálními potřebami:**
  - nadaní žáci,
  - handicapovaní žáci,
  - děti s vývojovými poruchami učení,
  - děti s výukovými potížemi,
  - děti se sociálním znevýhodněním.

Nadaní žáci

- Identifikace toho, že žák je nadaný, je pro učitele velice obtížné. RVP ZV uvádí specifika mimořádně nadaných žáků:
  - Žák svými znalostmi přesahuje stanovené požadavky,
  - problematický přístup k pravidlům školní práce,
  - tendence k vytváření vlastních pravidel,
  - možná kontroverznost ve způsobu komunikace s učiteli způsobená sklonem k perfekcionalismu,
  - vlastní pracovní tempo,
  - vytváření vlastních postupů řešení úloh, které umožňují kreativitu,
  - malá ochota ke spolupráci v kolektivu,
  - rychlá orientace v učebních postupech,
  - vhled do vlastního učení,
  - potřeba projevení a uplatnění znalostí a dovedností ve školním prostředí, aj.

Identifikace nadaných žáků

- Byl nalezen vztah mezi matematickým nadáním, schopností řešit problémy a schopností zobecňovat (Sriraman, 2008). Při zadávání problémových úloh může učitel vytipovat talenty.
- Nadaní žáci se vždy neprojevují tak, jak by učitel čekal.
- Podprůměrní nadaní žáci.
- Dvojí výjimečnost.

Tvorba úloh s rostoucí náročností

- Úroveň 1: Úlohy vycházejí z poznatků a algoritmů, se kterými se žáci seznamují v hodinách.
- Úroveň 2: Vyšší náročnost, úloha obsahuje kromě algoritmu i problém.
- Úroveň 3: Problémová úloha, náročná na přemýšlení i na vyjádření vztahů a výpočty.
- Jestliže žák nedokáže vyřešit úlohu dané úrovně, učitel snižuje náročnost.

Matematické soutěže nejen pro nadané

- Matematická olympiáda (http://mo.webcentrum.muni.cz)
- Matematický klokan (http://www.matematickyklokan.net)
- Pythagoriáda
- Korespondenční semináře

Žáci s poruchami učení

- Klasifikace poruch matematických schopností (J. Novák):
  - Kalkulastenie
  - Hypokalkulie
  - Oligokalkulie
  - Dyskalkulie – specifická porucha počítání, zahrnuje specifické postižení dovednosti počítat, které nelze vysvětlit mentální retardací ani nevhodným způsobem vyučování. Porucha se týká ovládání základních početních výkonů, jako je sčítání, odčítání, násobení, dělení (spíše než abstraktnějších matematických dovedností v oblasti algebry, trigonometrie, apod.).

- Typy dyskalkulie (podle L. Košče):
  - Praktognostická dyskalkulie
  - Verbální dyskalkulie
  - Lexická dyskalkulie
  - Grafická dyskalkulie
  - Operační dyskalkulie
  - Ideognostická dyskalkulie

- Reedukace dyskalkulie:
  - Každé dítě je individualita a potřebuje svůj vlastní postup. To, co se osvědčí u jednoho dítěte, nemusí být přínosné u dítěte jiného. Přesto můžeme uvést obecné reedukační postupy:

1. Stanovení diagnózy
2. Respektování logické výstavby matematiky a její specifičnost
3. Pochopení základních pojmů a operací
4. Navození „AHA efektu“
5. Využití všech smyslů
6. Diskuse s dítětem
7. Pamětné zvládnutí učiva
8. Zvyšování nároků na samostatnost a aktivitu dítěte
9. Neustálá potřeba úspěchu
10. Práce podle individuálního plánu

- Klasifikace poruch podle matematického obsahu:
  - Vytváření pojmu čísla
  - Čtení a zápis čísel
  - Operace s čísly
  - Slovní úlohy
  - Geometrická a prostorová představivost
  - Početní geometrie
  - Jednotky měr

- **LITERATURA:**

  - Sriraman, B. (ed.): *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics.* IAP, Montana, 2008
  - Thomson, M.: *Supporting Gifted and Talented Pupils in the Secondary School.* SAGE, 2013
  - Blažková, R. a kol.: *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy.* Brno: Paido, 2000
  - Blažková, R.: *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení v matematice.* Brno: PdF MU, 2009
  - Blažková, R.: *Dyskalkulie II. Poruchy učení v matematice na 2. stupni ZŠ.* Brno: PdF MU, 2010

7. Vytváření představ a pojmů v matematice

Pojmotvorný proces

- Žák vstupuje do vyučovacího procesu s naivními poznatky, **prekoncepty**
- **Kognitivní vývoj** podle J. Piageta: stádium názorného myšlení, konkrétních operací, formálních operací, abstraktního myšlení

- **Poznávací proces** podle M. Hejného:
  - Motivace ⇨ izolované modely ⇨ generický model procesuální ⇨ generický model konceptuální ⇨ abstraktní poznatek ⇨ krystalizace.
  - V průběhu poznávacího procesu dochází ke dvěma **abstrakčním zdvihům**: mezi izolovaným modelem a generickým modelem dochází ke **zobecnění**, mezi generickým modelem a abstraktním poznatkem dochází k **abstrakci**.
  - Umělé urychlování poznávacího procesu

- Vhodnou **motivací** do výuky je pocit úspěchu, zadávání přiměřených úloh, individualizace výuky.
- **Izolovaný model** je konkrétní případ příští znalosti.
- V průběhu fáze izolovaných modelů dochází k tomu, že si žáci všímají souvislostí a ty potom odhalí.
- **Generický model** vzniká procesem zobecnění z komunity izolovaných modelů. **Procesuální generický model** je návod, jak proces pokračuje dále. **Konceptuální generický model** je obecná zákonitost.
- **Abstraktní poznatek** je ve školské matematice potřebný např. tehdy, když dochází ke změně obecného čísla na písmeno.
- **Poznatek, znalost, formální poznatek**

- Z hlediska pojmotvorného procesu rozlišujeme **instruktivní (transmisivní)** a **konstruktivistické přístupy** ve výuce matematice.
  - Při využívání **instruktivního přístupu** je v hodině hlavní učitel, předává žákům hotové poznatky. Je upřednostňováno pamětné učení bez porozumění, dochází často k formalizmu.
  - Při využívání **konstruktivistických přístupů** ve výuce je hlavní žák, učitel pokládáním vhodných otázek či zadáváním zajímavých úloh umožňuje žákům objevovat nové poznatky.

Zavádění pojmů ve školské matematice

- Obrázkem
- Pomocí procesu
- Pomocí izolovaných modelů
- Pomocí obecného pravidla
- Slovně (definicí)

Matematické věty ve školské matematice

- Matematické věty se ve školské matematice objevují ve formě neoblíbených „pouček“ nebo pravidel v rámečku. Většinou je vyslovena poučka a ta se pak procvičuje na příkladech.
- Věty na základní škole obvykle nejsou dokazovány. Výjimku tvoří některé geometrické důkazy, které vedeme pomocí obrázku – tzv. **důkaz beze slov**. Tvrzení by však měla být ověřována.

Zavádění pojmů v matematice

- **Pojem** chápeme jako jednu z forem vědeckého poznání, která odráží podstatné vlastnosti zkoumaných objektů a vztahů.
- Každý pojem má určitý **obsah** a **rozsah**. **Obsah pojmu** je souhrn všech znaků, které jsou pro daný pojem charakteristické. **Rozsah pojmu** je množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem.

- Rozlišujeme pojmy **konkrétní a abstraktní**.
- Pojmy vytváříme v určitém systému. Pro přehlednost provádíme **klasifikace (třídění) pojmů**. Klasifikace pojmů musí splňovat všechny atributy rozkladu množiny na třídy:
  - Třídění je nutno provádět vždy podle téhož znaku.
  - Třídění musí být vyčerpávající a úplné – musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
  - Jednotlivé třídy musí být navzájem disjunktní – každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy.

- **Základní pojmy** (např. Eukleidovy definice základních pojmů)
- **Axiomy** – tvrzení, která se předem považují za pravdivá a nedokazují se (např. Eukleidovy axiomy, axiomatická teorie aritmetiky)
- **Matematická definice** je ekvivalence, na jejíž jedné straně je nový pojem a na druhé straně jsou pojmy dříve známé (Slovník školské matematiky, 1981). Ve školské matematice se nejčastěji vyskytují definice **nominální** a **konstruktivní**.

- Chybné definice:
- **Definice nadbytečná** – obsahuje více znaků definovaného pojmu, než je nutné.
- **Definice široká** – obsahuje méně znaků, než je potřeba k definování pojmu.
- **Definice úzká** – obsahuje více znaků, než je potřeba k definování pojmu.
- **Definice kruhem** – první pojem se definuje pomocí pojmu druhého a vzápětí se druhý pojem definuje pomocí pojmu prvního.
- **Definice tautologií** – pojem se definuje pomocí sebe sama, i když v jiném vyjádření.

Matematická věta

- Matematickou větou rozumíme pravdivý výrok s konkrétním matematickým obsahem. Většina vět má tvar implikace, pokud platí implikace v obou směrech, je věta uvedena jako ekvivalence.
- Pro jednu proměnnou můžeme matematickou větu zapsat symbolicky jako

$$(\forall x \in D)[A(X) \Rightarrow B(X)]$$

kde D je definiční obor výrokových forem, $A(x)$ se nazývá **předpoklad** a $B(x)$ **tvrzení** a říkáme, že věta je v podmínkovém tvaru. Každá věta má mít jasně vyslovený předpoklad.

- Důkazy matematických vět:
  - Důkaz přímý: Přímý důkaz věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ spočívá v tom, že vycházíme z toho, že předpoklad platí a vytvoříme řetězec implikací, které na sebe navazují.
  - Důkaz nepřímý: místo věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ dokážeme větu obměněnou $B'(x) \Rightarrow A'(x)$
  - Důkaz sporem: Důkaz sporem je založen na skutečnosti, že nemůže platit současně nějaká věta a zároveň její negace. Předpokládáme, že věta $A(x) \Rightarrow B(x)$ neplatí, že platí její negace $(A(x) \Rightarrow B(x))'$
  - Důkaz matematickou indukcí: Podkladem důkazu matematickou indukcí je jeden z Peanových axiomů aritmetiky přirozených čísel

4. Číselné obory. Intuitivní zavedení reálných čísel na ZŠ. Mocniny a odmocniny

- Děti se ve skutečné výuce na základní škole s reálnými čísly v podstatě nesetkají. Jediná reálná čísla, která žáci pro různé výpočty potřebují, jsou odmocniny a π. Číslo π však bývá hned od začátku zaokrouhlováno na 3,14 a např. $\sqrt{2}$ na 1,41.
- Kladením správných otázek můžeme u žáků docílit postupného utváření pojmu iracionálního čísla.

- Množina přirozených čísel má tyto vlastnosti: Je možné ji jednoduše uspořádat, každé číslo má svého bezprostředního následovníka, na konečném intervalu je konečně mnoho přirozených čísel apod. Žáci si velice často myslí, že stejným způsobem se chovají všechny další číselné obory.
- Množina racionálních čísel si zachovává některé příjemné vlastnosti, např. racionální čísla lze uspořádat, i když už ne tak snadným způsobem, jako to bylo u přirozených čísel. Avšak na konečném intervalu existuje nekonečně mnoho racionálních čísel.

- Vlastnosti reálných čísel jsou pro mnoho žáků zcela nepochopitelné: Žádné číslo nemá svého bezprostředního následovníka, množinu nelze uspořádat, mezi každými dvěma racionálními čísly leží nekonečně mnoho iracionálních čísel.
- Geometrické konstrukce některých reálných čísel: Obrazy některých reálných čísel lze znázorňovat na číselné ose.
- Množiny v učivu o funkcích: Žáci by se měli setkávat s množinami v podobě definičního oboru a oboru hodnot, se zápisy jako $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle 1;\ \infty),\ D(f) = \{1; 2; 3\}$, aj., ale měli by jim zároveň rozumět.

Mocniny

- Ve školské matematice zavádíme mocninu jako zkrácený zápis součinu dvou (nebo více) sobě rovných činitelů.
- $5 \cdot 5 = 5^2, 6 \cdot 6 = 6^2, 15 \cdot 15 = 15^2$, obecně $a \cdot a = a^2$.
- $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$; $1{,}3 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}3 = (1{,}3)^3$; $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4$, obecně zavedeme n-tou mocninu reálného čísla a^n.
- Číslo a se nazývá **základ** a číslo n se nazývá **mocnitel** (exponent).

- **Definice:** Druhá mocnina celého (racionálního, reálného) čísla je součin dvou sobě rovných činitelů.
- Žáci se postupně učí mnoho pravidel pro počítání s mocninami, ve většině z nich dělají chyby ještě na střední nebo na vysoké škole. Důvodem je, že si pravidla dostatečně nezvnitřní a pak výpočty všemožně zjednodušují.

- Geometrické znázornění algebraických výrazů
- Ve výuce by se měly využívat následující metody a činnosti:
  - počítání s kalkulačkou, učitel musí žáky seznámit s tím, jak kalkulačku správně používat,
  - manipulativní činnost se čtvercovou sítí (čtverečkovaným papírem),
  - využívání odhadů,
  - cvičení paměti – pamětné zvládnutí druhé mocniny čísel 0 až 20, třetí mocniny čísel 0 až 10,
  - určování druhých mocnin pomocí algoritmu

Druhá odmocnina

- Odmocňování je inverzní operací k umocňování. Můžeme však odmocňovat druhou odmocninou pouze pro nezáporná čísla a výsledkem je pouze nezáporné číslo.
- **Definice:** Druhá odmocnina z nezáporného čísla a je nezáporné číslo b, pro které platí $b^2 = a$. Zapisujeme $\sqrt{a} = b$.
- Pojmy: odmocnitel, základ odmocniny, odmocnina
- Zobecnění na n-tou odmocninu
- Pravidla pro počítání s odmocninami

Pythagorova věta

- Pythagorova věta, její algebraický a geometrický význam.
- Řešení úloh z praxe na užití Pythagorovy věty.
- Důkazy Pythagorovy věty.
- Obrácená věta k Pythagorově větě, zobecněná Pythagorova věta.
- Předpis pro pythagorejské trojice

Absolutní hodnota

- **Definice:** Absolutní hodnota reálného čísla a je
  - $|a| = a$ pro $a > 0$,
  - $|a| = 0$ pro $a = 0$,
  - $|a| = -a$ pro $a < 0$.
- Žáci by se s absolutní hodnotou měli setkat již v průběhu základní školy. Např. pro určení vzdálenosti obrazu čísla od počátku číselné osy je absolutní hodnota nezbytná. Obraz čísla -5 má od počátku vzdálenost $|-5 - 0| = 5$. V učebnicích někdy bývá definice absolutní hodnoty uváděna takto: *Absolutní hodnota racionálního čísla se rovná vzdálenosti obrazu tohoto čísla na číselné ose od obrazu čísla nula.* Nejedná se však o definici, pouze o jednu z interpretací absolutní hodnoty.

Literatura:

- BARROW, J. D.: *Kniha o nekonečnu.* Praha: Paseka, 2007
- DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky.* Praha: Dokořán a Argo, 2011
- SEIFE, CH.: *Nula.* Praha: Dokořán a Argo, 2005
- ŽENATÁ, E.: *Přehled učiva matematiky pro 6. – 9. ročník a odpovídající ročníky víceletých gymnázií s příklady a řešením.* Blug