MAs04: Vybrané partie . . .

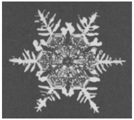
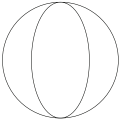
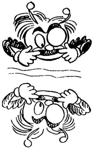
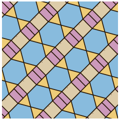
I. **Symetrie**
II. Stereometrie
III. Kuželosečky
IV. . . . a kvadriky

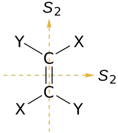
Doporučené čtení:

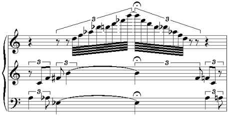
[A] M.A. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer, 1988.

26. dubna 2019, Vojtěch Žádník
http://is.muni.cz/el/1441/jaro2019/MAs04/

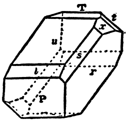
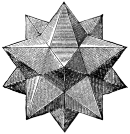
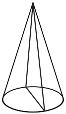
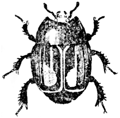
Symetrie ze široka[1]





VELIPSESPILEV

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

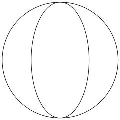
$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

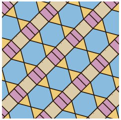
$$y' = -\frac{x}{y}$$

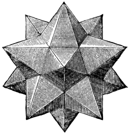
$$\vdots$$

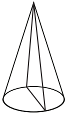
[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry

Symetrie úžeji[2] [3]









$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_(geometry)
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_in_mathematics

Symetrie přesněji

Symetrie objektu X vzhledem k nějaké struktuře =

= automorfizmy oné struktury zachovávající objekt X.

= bijekce zachovávající onu strukturu a objekt X.

Symetrie (bez přívlastku) čtverce = shodnost zobrazující čtverec na sebe.

Shodnost/afinita/projektivita = symetrie eukleidovské/afinní/projektivní roviny, resp. prostoru.

Symetrie obecné množiny = obecné bijektivní zobrazení (permutace).

Symetrie diferenciální rovnice = transformace zobrazující řešení na řešení.

Apod.

Symetrie tvoří grupu ... viz akce grupy na množině.[4]

[4] http://is.muni.cz/el/1441/podzim2018/MAs01/um/

Plán

Grupy symetrií

- konečné/nekonečné,
- diskrétní/spojité,
- periodické/neperiodické.

Vše převážně v eukleidovské rovině/prostoru.

Příklady, obecné úvahy, vybrané klasifikace.

Cvičení A

Nutné:

(1) Popište symetrie trojúhelníku, čtverce, pravidelného n-úhelníku.
(2) Popište symetrie přímky, kružnice, elipsy, . . .
(3) Popište symetrie svého oblíbeného pravidelného mnohostěnu.
(4) V předchozích cvičeních popište rozdíly mezi eukleidovskými/afinními/projektivními symetriemi.
(5) Popište symetrie celé eukleidovské/afinní/projektivní roviny.

. . . v dalším budeme navazovat. . .

Doporučené:

(5) Připomeňte si známé vztahy pro kořeny algebraické rovnice, které jsou symetrické vzhledem k jejich permutacím.
(6) V této souvislosti si připomeňte diskriminant (aspoň pro kvadratické rovnice).
(7) Popište symetrie diferenciální rovnice $y' = -\frac{x}{y}$.

. . . symetrie jsou nejen hezké, ale taky užitečné!

Vesměs opakování

Základní věci

Základní myšlenkový posun:[5]

- *od shodných útvarů v rovině ke shodným transformacím celé roviny.*

Základní vymezení:

- *shodné zobrazení zachovává vzdálenosti bodů.*

Základní důsledky:

- *shodné zobrazení zachovává kolineárnost bodů, poměry trojic (čtveřic, . . .) bodů, rovnoběžnost, odchylky, obsahy, . . .*

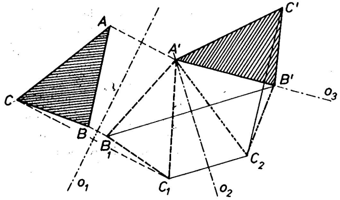
Základní shodnost:

- *osová souměrnost. . .*

[5] http://is.muni.cz/el/1441/jaro2019/MAs05/um/planimetrie/

Základní poznatek:

- *Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností:*



Základní klasifikace:

(a) *identita* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 = o_2$,

(b) *posunutí* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \| o_2$,

(c) *otáčení* = složení dvou os. soum. takových, že o_1 a o_2 jsou různoběžné,

(d) *středová souměrnost* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \perp o_2$,

(e) *osová souměrnost* = jedna os. soum.,

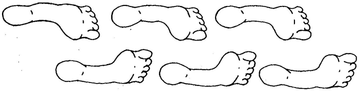
(f) *posunutá souměrnost* = složení tří obecných os. soum.

Poznámky

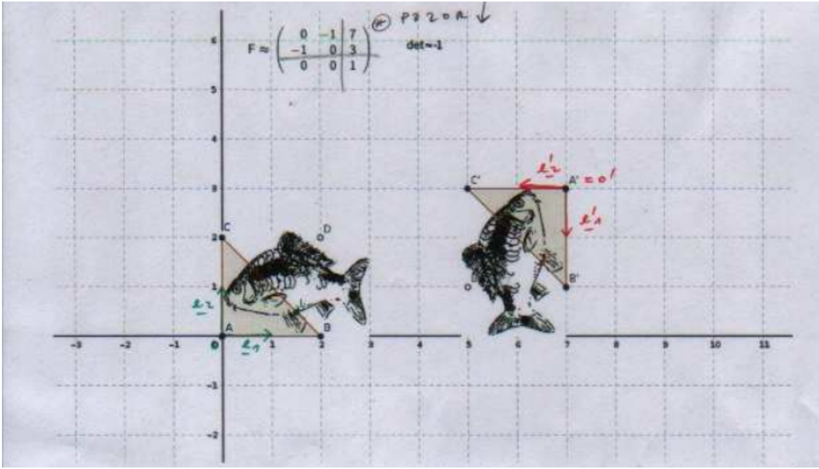
Shodnost s přímkou samodružných bodů je právě osová souměrnost (e).

Shodnosti (a)–(d) jsou *přímé* (zachovávají orientaci),
shodnosti (e)–(f) jsou *nepřímé* (mění orientaci).

Pojmenování (f) je odvozeno z možného rozkladu na osovou souměrnost a posunutí:



Vesměs opakování



(Afinní) transformace v rovině je dána obrazem tří bodů v obecné poloze; k vyjádření obrazu obecného bodu užíváme matic . . . [6]

[6] http://www.geogebra.org/m/WpijCH4E

Analytické vyjádření

* ROZŠÍŘENÁ MATICE je zde (v Geogebře) organizována podle

$$\text{obraz}\quad \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \hline 1 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & D & C \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \hline 1 \end{array}\right) \quad \text{vzor}$$

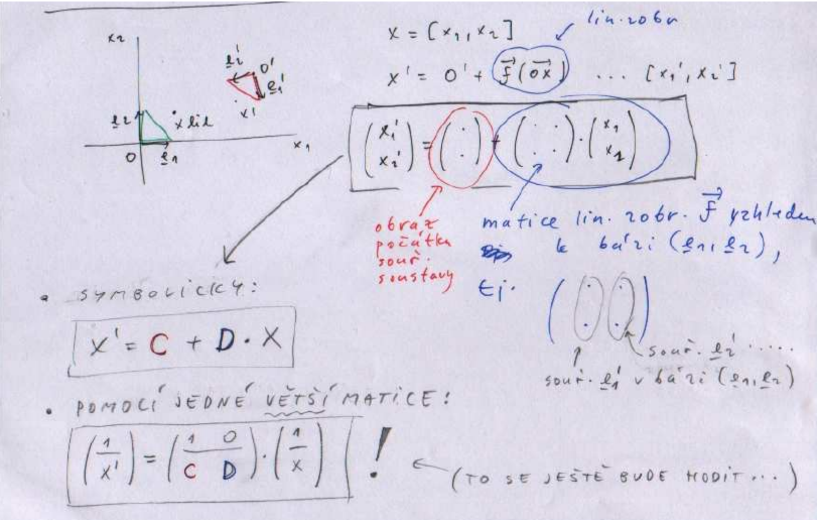
PŘÍMO (SNADNO) z předchozího:

$e_1' = -e_2$

$e_2' = -e_1$

$O' = A'$

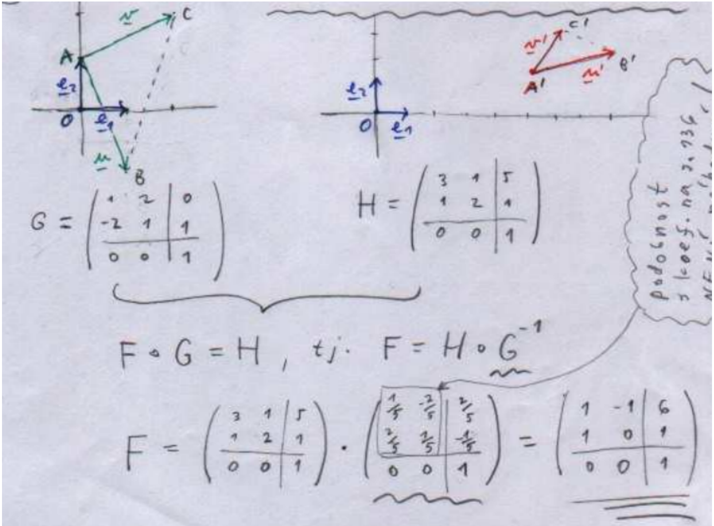
$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$



Pozor: rozšířený řádek máme jednou dole, jindy nahoře![7]

[7] Jednou možná sjednotím…

Skládání



Zde hledáme matici obecného zobrazení určeného obrazy bodů A, B, C pomocí <u>složení</u> dvou jednodušších transformací (a jedné inverze).

Skládání obecně

PROČ UŽÍVÁME ROZŠÍŘENÉ MATICE ?

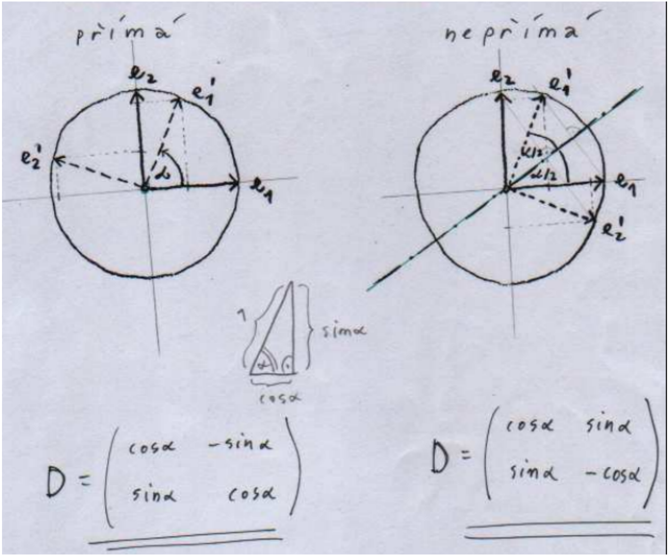
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{místo} \quad x' = DX + C$$

- kompaktní zápis
- snazší skládání:

$$G \circ F \ \dots \ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & D \end{pmatrix}}_{G} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{pmatrix}}_{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C+DA & DB \end{pmatrix}$$

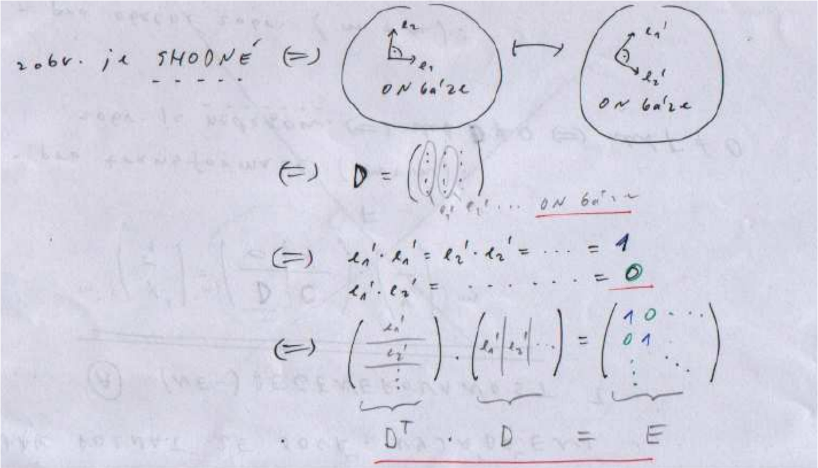
$$\text{místo} \quad (G \circ F)(x) = D(BX+A)+C = DBX + DA+C$$

Další dobrý důvod proč užíváme rozšířených matic je, že se do nich vlezou také všechna projektivní zobrazení. . .



Pro kontrolu: determinant matice vlevo je $1 > 0$, vpravo je $-1 < 0$.

(Sub)matice shodností obecně



Typ zobrazení je zakódován v (sub)matici *D*; vektor *C* představuje dodatečné (a neškodné) posunutí. . .

Klasifikace podle samodružných prvků[8]

Samodružné body \ Samodružné směry	Žádný	Právě dva na sebe kolmé	Každý
Žádný		N $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ Posunutá souměrnost	P $X' = X + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$, $e \neq 0$ Posunutí
Právě jeden	$X' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} X$ P $\alpha \neq k\pi$, k celé. Rotace o úhel α se středem v počátku.		P $X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ Středová souměrnost podle počátku
Vyplní přímku		N $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ Souměrnost podle osy x	
Každý			P $X' = X$ Identita

[8] viz též charakteristická čísla/vektory...

Cvičení B

(1) Vyjádřete shodnost na s. 11 jako složení osových souměrností, a to jak elementárně (konstrukčně), tak analyticky.

(2) Určete samodružné body a směry této shodnosti.

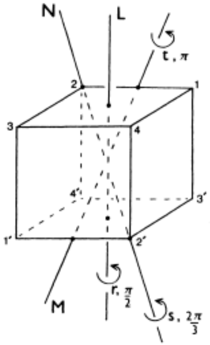
(3) Dokažte, že klasifikace na s. 8 je úplná:
křížením druhů z uvedeného seznamu dostaneme opět druh z onoho seznamu.

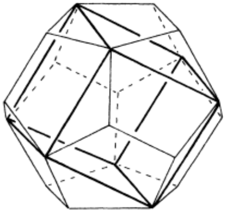
(4) Řešte analyticky cvičení (A.1–2) na s. 5.

(5) Uvědomte si, že před chvílí jsme analyticky vyřešili část cvičení (A.5) na s. 5.

Vesměs opakování

1. (1) Uvědomte si, která z předchozích pozorování jsou obecně platná a která se týkají dimenze 2.
2. (2) Pro pozorování druhého typu najděte analogie pro dimenzi 3 (příp. obecně).
3. (3) Zejména si uvědomte, co je základní shodnost v prostoru (dimenze n).
4. (4) Konfrontujte svoje závěry ze cvičení (A.3) na s. 5 s případnými analytickými vyjádřeními.[9]





[9] http://www.geogebra.org/m/wnysm9yy

Vesměs nové

Značení a moudro

Eukleidovská rovina ... $\mathbb{R}^2$

Grupa všech shodností v rovině ... $E_2 := \operatorname{sym} \mathbb{R}^2$

Podgrupa všech posunutí (translací) ... $T_2 \subset E_2$

Podgrupa všech shodností zachovávajících počátek,
tj. stabilizátor počátku ... $O_2 \subset E_2$

$E_2 \cong T_2 \ltimes O_2$ ... polo-přímý součin[10]

$R^2 \cong E_2/O_2$ ... eukleidovská rovina = faktorová množina[11] grupy shodností

„Celá *eukleidovská* geometrie je určena právě grupou *shodností*.“[12]

---

[10] viz s. 15

[11] nikoli však faktor-grupa (neboť $O_2 \subset E_2$ není normální)

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Erlangen_program

Značení a terminologie

Rovinný útvar . . . $X \subseteq \mathbb{R}^2$

Grupa symetrií útvaru X . . . $G := \operatorname{sym} X$,

tj. $G = \{g \in E_2 \mid g(X) = X\}$

Translační podgrupa útvaru X . . . $T := G \cap T_2$

Bodová grupa útvaru X . . . $O := \{f \in O_2 \mid$ ex. translace $t \in T_2$ tak, že $t \circ f \in G\}$

$O \subseteq O_2$ . . . podgrupa[13]

$O^+ \subseteq O_2^+$ . . . podgrupa přímých symetrií

$O^- \subseteq O_2^-$ . . . nepřímé symetrie (netvoří podgrupu!)

$G \cong T \ltimes O$ . . . polo-přímý součin

$G =$ netriviální, diskrétní . . . $X =$ *vzor*

$T = \{\mathrm{id}\}$ . . . *rozetový* vzor

$T \cong \mathbb{Z}$ . . . *frízový* vzor

$T \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . . . *tapetový* vzor

[13] Pozor: $O \neq G \cap O_2$!

Vesměs nové

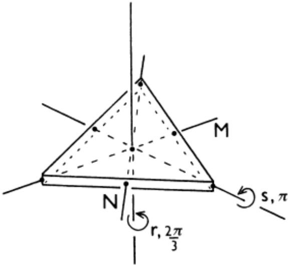
Vzpomínka na cvičení (A.1) na s. 5:

(1) Uvědomte si, že grupa přímých symetrií pravidelného n-úhelníku je izomorfní cyklické grupě řádu n ... ozn. C_n.

(2) Uvědomte si, že grupa všech symetrií pravidelného n-úhelníku je izomorfní tzv. dihedrální grupě řádu n ... ozn. $D_n \cong C_n \times \mathbb{Z}_2$.

(3) Cyklické a dihedrální grupy jsou definovány také pro $n = 1$ a 2. Konfrontujte s předchozími představami a ukažte, že

- $C_1 \cong \{\mathrm{id}\}$ a $D_1 \cong \mathbb{Z}_2$,
- $C_2 \cong \mathbb{Z}_2$ a $D_2 \cong \mathbb{Z}_8^*$,
- $C_3 \cong \mathbb{Z}_3$ a $D_3 \cong S_3$,
- apod.



Věta

G = konečná podgrupa $E_2 \implies G \cong C_n$ *nebo* $G \cong D_n$.

Důkaz.

Plyne z klasifikace na s. 8:

Aby grupa G byla konečná, nemůže obsahovat

- posunutí,
- posunutou souměrnost,
- dvě rotace s různými středy,[14]
- rotaci a osovou souměrnost s osou neprocházející středem rotace.[15]

Co nám vlastně zbylo?
Pouze rotace s jedním společným středem a osové souměrnosti s osou procházející tímto středem ... □

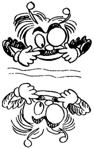
[14] Pokud by r_1, r_2 byla taková otáčení, potom by $r_1 \circ r_2 \circ r_1^{-1} \circ r_2^{-1}$ bylo posunutí.
[15] Pokud by r, resp. o byla taková rotace, resp. souměrnost, potom by $r \circ o$ byla posunutá souměrnost.

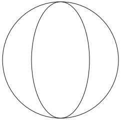
Závěr

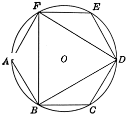
Věta

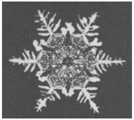
Vzory s konečnými grupami symetrií jsou právě rozetové vzory.

Několik navzájem neizomorfních typů může vypadat takto:









Vesměs nové

Cvičení E

(1) Co mají následující vzory společného a v čem se liší?

(2) Najdete další příklady s neizomorfními grupami symetrií?

Značení a první krok

Základní symetrie, kterou mají všechny frízové vzory, je

- posunutí (nejkratší možný vektor ozn. t),

tj. $T = \langle t \rangle = \{kt \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Další možné symetrie musí být kompatibilní s T (zejména musí zachovávat celou frízu):

- osová souměrnost podle vodorovné osy x (ozn. o_x),[16]
- osová souměrnost podle svislé osy y (ozn. o_y),
- středová souměrnost se středem c na ose x (ozn. s_c),
- posunutá souměrnost s vektorem τ kolineárním s t (ozn. g_τ).

Zejména, $O \subseteq \langle o_x, o_y, s_c \rangle$, kde $c =$ počátek a x, y prochází počátkem.

Jednotlivé frízové grupy $G = T \ltimes O$ budeme rozlišovat právě pomocí generátorů. . .

[16] Pomocné osy volíme tak, že t je „vodorovný“.

Druhý krok: skládání

S odkazem na předchozí značení a klasifikaci shodností (s. 8) zjišťujeme, že[17]

- $o_y \in G \implies o_{y'} \in G$, kde $y' = t^k(y)$,
- $s_c \in G \implies s_{c'} \in G$, kde $c' = c + kt$,
- $g_\tau \in G \implies \tau = kt$ nebo $\tau = \frac{k}{2}t$,
- $o_x \in G \iff g_t \in G$,
- $o_x, o_{y'} \in G \implies s_c \in G$, kde $c = x \cap y'$,
- $o_x, s_c \in G \implies o_{y'} \in G$, kde $y' \ni c$,
- $o_y, s_c \in G$, potom $o_x \in G \iff c \in y$.
- $o_y, s_c \in G$ a $c \notin y \implies g_{\frac{t}{2}} \in G$.

Kromě t (který je všude), stačí uvažovat jenom následujících několik generátorů:

$$o_x, \quad o_y, \quad s_c, \quad g_{\frac{t}{2}}.$$

Máme tedy nejvýše $2^4 = 16$ možností do diskuze...

[17] Přeložte si uvedené zhuštěné zápisy do slušného jazyka.

Třetí krok: generování

Probíráme možnosti, doplňujeme generátory, určujeme důsledky, porovnáváme s předchozími grupami. Nové výsledky zvýrazníme a doplníme ilustraci:

- $G = \langle \underline{t} \rangle$ LLL, QQQ
- $G = \langle t, o_x \rangle = \langle \underline{t, o_x, g_t} \rangle$ CCC, EEE
- $G = \langle \underline{t, o_y} \rangle$ AAA, VVV
- $G = \langle \underline{t, s_c} \rangle$ NNN, SSS
- $G = \langle \underline{t, g_{\frac{t}{2}}} \rangle$ LΓL
- $G = \langle t, o_x, o_y \rangle = \langle \underline{t, o_x, o_y, s_c, g_t} \rangle$ HHH, OOO
- $G = \langle t, o_x, s_c \rangle = \langle t, o_x, s_c, o_{y'}, g_t \rangle$
- $G = \langle t, o_x, g_{\frac{t}{2}} \rangle = \langle \frac{t}{2}, o_x, g_{\frac{t}{2}} \rangle$
- $G = \langle t, o_y, s_c \rangle = \begin{cases} \langle t, o_y, s_c, o_x, g_t \rangle, & \text{pokud } c \in y \\ \langle \underline{t, o_y, s_c, g_{\frac{t}{2}}} \rangle, & \text{pokud } c \notin y \end{cases}$ VΛV
- $G = \langle t, o_y, g_{\frac{t}{2}} \rangle = \langle t, o_y, g_{\frac{t}{2}}, s_c \rangle$
- $G = \langle t, s_c, g_{\frac{t}{2}} \rangle = \langle t, s_c, g_{\frac{t}{2}}, o_y \rangle$
- Atd...[18]

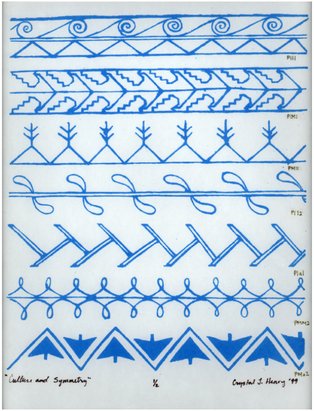
[18] Ujistěte se, že vás v ostatních případech už nic nepřekvapí.

Závěr[19]

Věta

Mezi všemi frýzovými vzory existuje právě sedm typů s navzájem neizomorfními grupami symetrií.

Všech sedm typů je na následujícím obrázku:

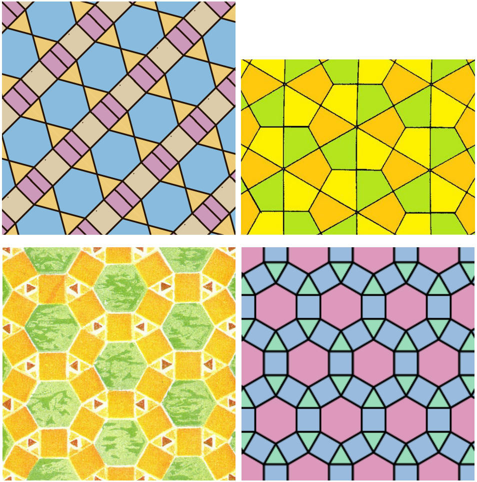


[19] http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group

Cvičení F

(1) Co mají následující vzory společného a v čem se liší?

(2) Najdete další příklady s neizomorfními grupami symetrií?



Značení a plán

Základní symetrie, které mají všechny tapetové vzory, jsou

- posunutí ve dvou směrech (nejkratší možné nezávislé vektory ozn. u a v),

tj. $T = \langle u, v \rangle = \{ku + lv \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$.

Stejně jako na s. 31, translační grupa T ovlivňuje silně bodovou grupu O a

$$G = T \rtimes O.$$

Na rozdíl od s. 31, rozbor možností bude o něco komplikovanější; pomůžou nám mřížky:

Mřížka tapetového vzoru = orbita počátku vzhledem k akci translační grupy, ozn.

$$L = T(0).$$

Rozlišíme několik málo typů mřížek a analýzou základní oblasti (která se pak periodicky opakuje) rozlišíme několik málo typů tapetových vzorů...

První krok: mřížky

Minimální generující vektory T lze vybrat několika způsoby; volme jednou pro vždy tak, aby

$$\|u\| \leq \|v\| \quad \text{a} \quad \measuredangle(u, v) \leq 90^\circ.$$

Potom platí:

$$\|u\| \leq \|v\| \leq \|u - v\| \leq \|u + v\|.$$

Podle rovností/nerovností mezi touto čtveřicí velikostí vektorů rozlišujeme následující typy mřížek:

(a) $< \; < \; <$ ... *kosoúhlá*

(b) $< \; < \; =$ ... *pravoúhlá*

(c) $< \; = \; =$ ... *centrovaná pravoúhlá*

(d) $= \; < \; =$ ... *čtvercová*

(e) $= \; = \; <$ ... *šestiúhelníková*

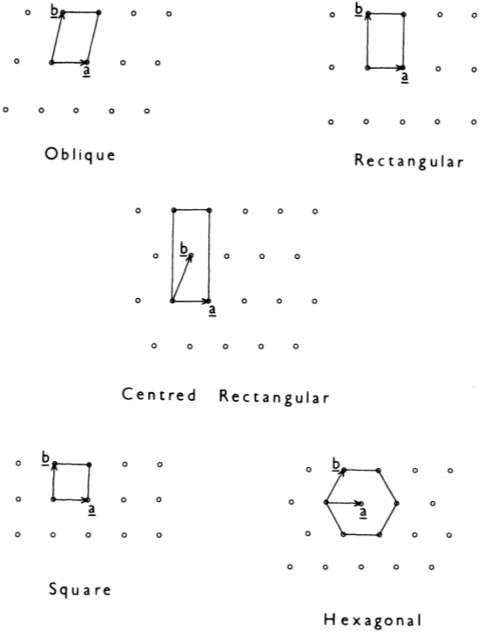
(f) $= \; < \; <$ ... nic nového[20]

(g) $< \; = \; =$ ... není možné

(h) $= \; = \; =$ ... není možné

[20] opět centrovaná pravoúhlá, pouze jinak reprezentovaná

První krok: mřížky



Druhý krok: omezení

Věta

Bodová grupa O působí na mřížce L.

Připomínáme, že $L = T(0) =$ orbita počátku vzhledem k akci podgrupy T.

Důkaz.

Pro $x \in L$ a $f \in O$ chceme ukázat, že $f(x) \in L$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(t(0)) && \text{pro nějaké } t \in T \\ &= f(t(f^{-1}(0))) && \text{neboť } O \text{ je stabilizátor } 0 \\ &= (f \circ t \circ f^{-1})(0) \in L && \text{neboť } T \text{ je normální podgrupa v } G \end{aligned}$$

□

Pozor: tvrzení obecně neplatí pro celou grupu G![21]

[21] viz posunuté souměrnosti...

Druhý krok: omezení

Máme jenom několik typů mřížek (s. 38)

a víme, že bodová grupa zachovává mřížku (s. 40).

Odtud dostáváme následující omezení:

Věta

Pokud O obsahuje rotaci, potom její řád je 2, 3, 4, nebo 6
(tedy úhel otáčení je 180°, 120°, 90°, *nebo* 60°, *a žádný jiný).*

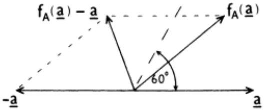
Poznámka

Nezávisle na charakterizaci typů mřížek, lze předchozí omezení zdůvodnit také takto:

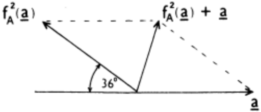
Předpokládejme, že $u \in T$ je nejkratší možný vektor.

Pro lib. $f \in O$ patří koncový bod vektoru $f(u)$ do mřížky, tedy $f(u) \in T$.

- Pokud by f byla rotace řádu > 6, potom by úhel otáčení byl $< 60^\circ$.
  Pak by ovšem vekor $f(u) - u \in T$ byl kratší než u, což je ve sporu s předpokladem minimálnosti u.



- Pokud by f byla rotace řádu 5, potom by úhel otáčení byl 72°.
  Pak by ovšem vekor $f^2(u) + u \in T$ byl kratší než u, což je tentýž spor.



Třetí krok: generování

Na základě předchozích omezení, lze nyní popsat všechny možné tapetové grupy (ve stejném duchu jako na s. 33):

Podle typu mřížky doplňujeme přípustné symetrie, určujeme důsledky a rozlišujeme neizomorfní případy...

Úplná diskuze je pochopitelně značně rozsáhlá ....[22]

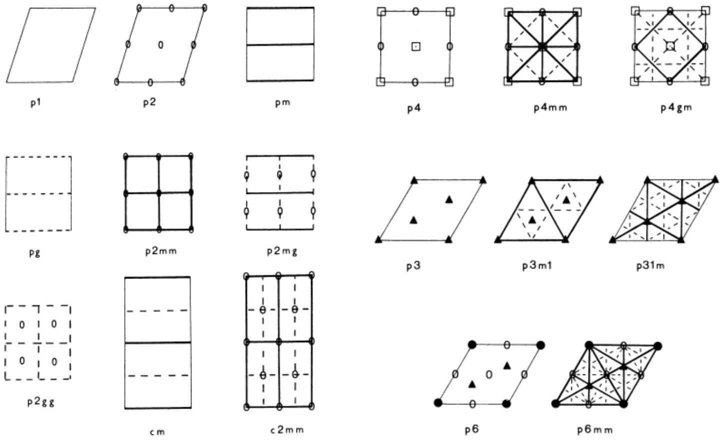
[22] viz např. [A, kapitolu 26] nebo [M, kapitolu 11]

Závěr[23]

Věta

Mezi všemi tapetovými vzory existuje právě <u>sedmnáct</u> typů s navzájem neizomorfními grupami symetrií.

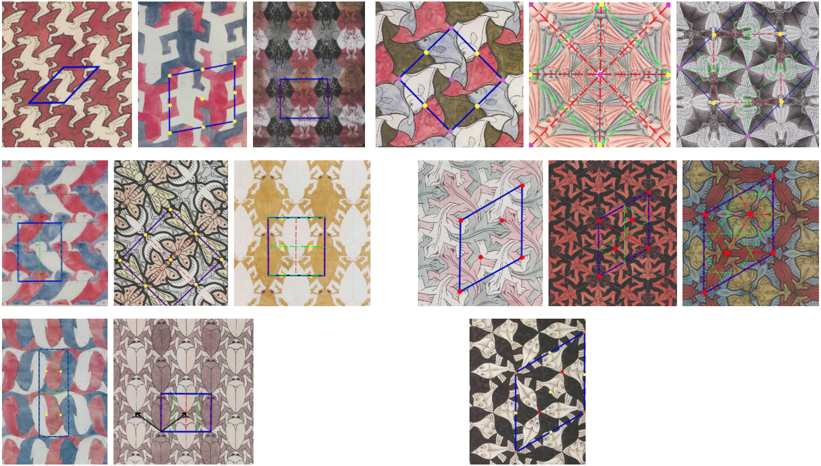
Základní oblasti se schematicky vyznačenými symetriemi vypadají takto:



[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

Závěr

Několik skutečných vzorů z dílny M. C. Eschera[24] (s vyznačenými základními oblastmi (se schematicky vyznačenými symetriemi) rukou A. Pokorného[25]) vypadá takto:



[24] http://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

[25] http://is.muni.cz/th/fbb51

Cvičení G

(1) Doplňte podrobnosti k něčemu, co zde není zpracováno úplně.[26]

(2) Uvědomte si, že mnohé poznatky formulované v kapitole o tapetových grupách jsou obecně platné, ...[27]

(3) ...proč jsme o nich nepotřebovali mluvit v kapitole o frízových grupách, ...

(4) ...a jaké je asi jejich uplatnění v trojrozměrných analogiích, tedy v klasifikaci tzv. *krystalografických grup*.[28]

[26] viz např. poznámky po čarou na s. 23, 24, 27, 32, 33, 38, 40, 43

[27] viz např. pojem mřížky nebo větu na s. 40

[28] http://en.wikipedia.org/wiki/Space_group

Literatura

[A] M.A. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer, 1988.

[K] F. Kuřina, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002

[M] G.E. Martin, *Transformation geometry*, Springer, 1982.

[S] M. Sekanina a kol., *Geometrie I a II*, SPN, 1988

Obrázky