

Osová souměrnost

Vlastnosti

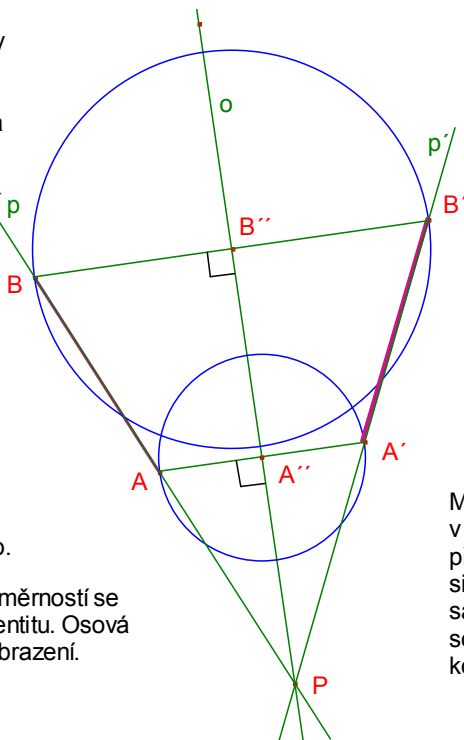
Označme P průsečík přímky AB s osou o , A'' kolmý průmět bodu A na osu o a B'' kolmý průmět bodu B na osu o .

Trojúhelníky APA'' a $A'PA''$ jsou shodné podle věty sus. Také trojúhelníky BPB'' a $B'PB''$ jsou shodné podle věty sus. Proto $IAI = IA'I$.

Osová souměrnost zachovává délky, jedná se o shodné zobrazení.

Přímka p , která není samodružná, se se svým obrazem p' protíná na ose o .

Složením dvou osových souměrností se stejnou osou dostaneme identitu. Osová souměrnost je involutorní zobrazení.



Osová souměrnost je jednoznačně určena svou osou o . Obrazem libovolného bodu A , který neleží na ose o , je takový bod A' , pro který platí, že úsečka AA' je kolmá k ose o a její střed na ose o leží. Bod, který leží na ose o se zobrazí sám na sebe.

Osová souměrnost je základním shodným zobrazením v tom smyslu, že každé jiné lze složit pomocí nejvýše tří vhodně zvolených osových souměrností.

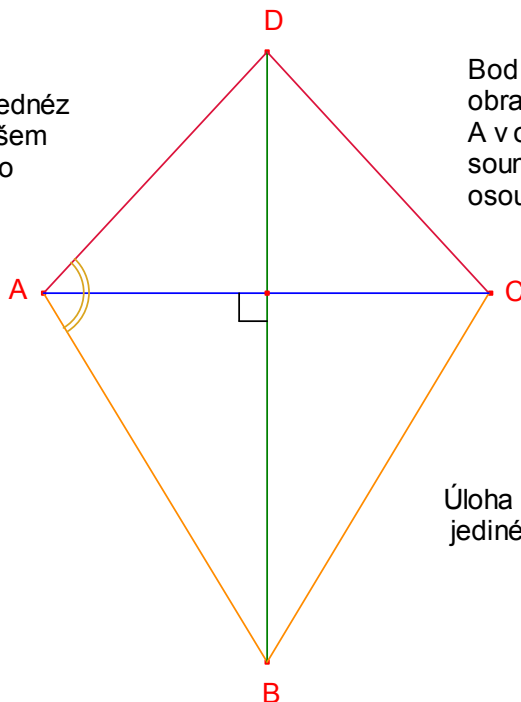
Množinou všech samodružných bodů v osové souměrnosti tvoří osa o . Tato přímka je v tomto zobrazení jedinou silně samodružnou přímkou. Slabě samodružná přímka v osové souměrnosti je každá přímka, která je kolmá na osu o .

Užití osové souměrnosti v úlohách

1. Sestrojte deltoid $ABCD$, jsou-li dány délky jeho stran a , d ($a \neq d$) a úhel, který svírají.

Deltoid je osově souměrný podle jedné z úhlopříček, při našem značení se jedná o úhlopříčku BD .

Trojúhelník ABD je dle zadání jednoznačně určen podle věty sus.



Bod C je pak obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou BD .

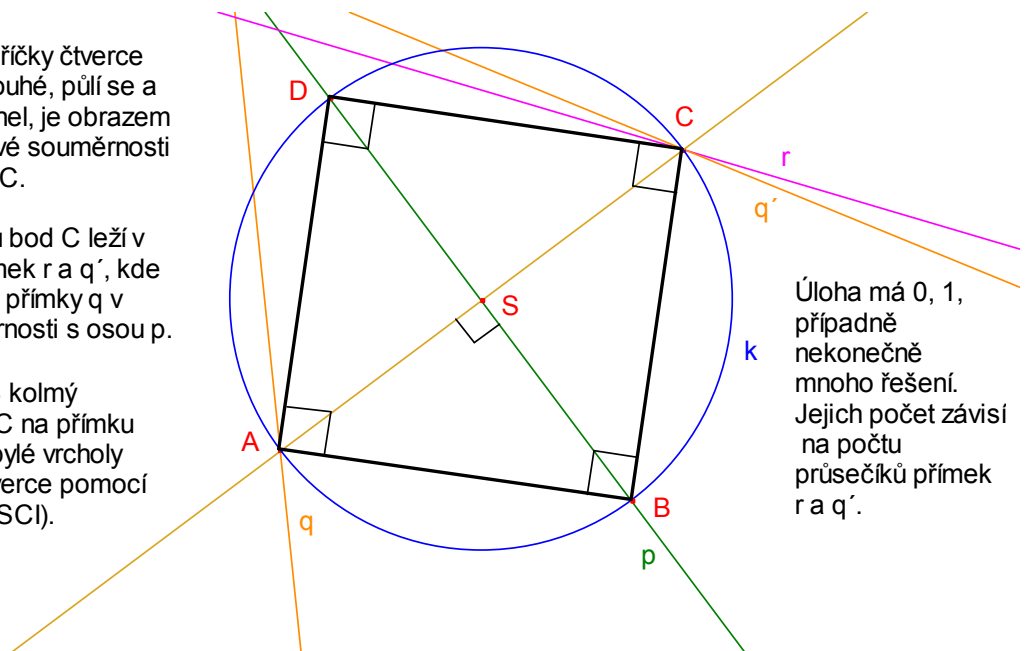
Úloha má vždy jediné řešení.

2. Necht' jsou dány přímky p , q a r . Sestrojte čtverec $ABCD$, pro který platí, že úsečka BD leží na přímce p , bod A na přímce q a bod C na přímce r .

Protože úhlopříčky čtverce jsou stejně dlouhé, půlí se a svírají pravý úhel, je obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou p bod C .

Z toho důvodu bod C leží v průsečíku přímek r a q' , kde q' je obrazem přímky q v osové souměrnosti s osou p .

Označíme-li S kolmý průmět bodu C na přímku p , najdeme zbylé vrcholy hledaného čtverce pomocí kružnice $k(S; |SC|)$.



3. Necht' je dána přímka p a ve stejné otevřené polorovině, jejíž hranici přímka p tvoří, dva různé body A a B . Na přímce p sestrojte bod X tak, aby lomená čára AXB měla nejkratší možnou délku.

Označme B'' kolmý průmět bodu B na přímku p , B' obraz bodu B v osové souměrnosti, jejíž osou je přímka p a X průsečík přímky p s úsečkou AB' .

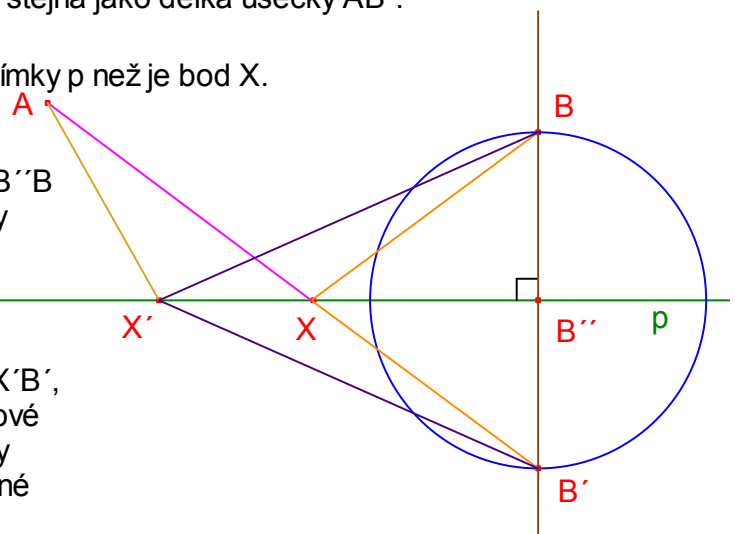
Trojúhelníky $XB''B$ a $XB''B'$ jsou shodné podle věty sus, proto $|XB| = |XB'|$.

Délka lomené čáry AXB je proto stejná jako délka úsečky AB' .

Označme X' libovolný jiný bod přímky p než je bod X .

Podobně platí, že trojúhelníky $X'B''B$ a $X'B''B'$ jsou shodné podle věty sus, proto $|X'B| = |X'B'|$.

Délka lomené čáry $AX'B$ je tedy stejná jako délka lomené čáry $AX'B'$, která je ovšem podle trojúhelníkové nerovnosti delší než délka úsečky AB' . To dokazuje, že délka lomené čáry AXB je nejkratší možná.



4. Je dána přímka m , na ní bod A a dále body K a L v opačných polovinách vyřatých přímku m . Na přímce m sestrojte bod M tak, aby úhel AMK byl poloviční než úhel AML .

