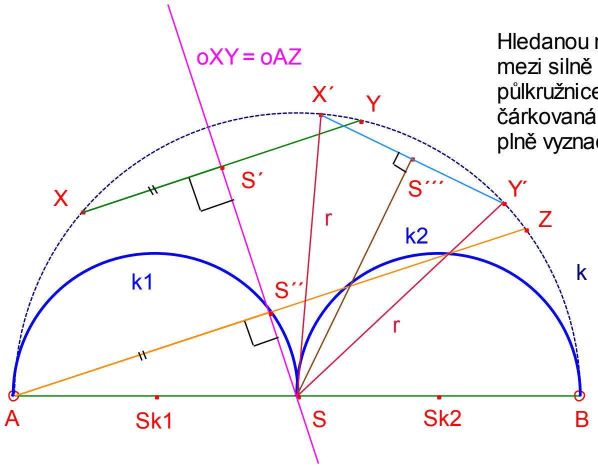
Množiny bodů daných vlastností

Při každé z níže uvedených důkazových úloh je třeba dokázat ekvivalenci, tj. platnost obou implikací! Jednak je třeba zdůvodnit, že má-li mít jistý objekt vlastnost V, pak leží v příslušné množině M. Dále je však nezbytné opačně ukázat, že skutečně každý prvek nalezené množiny M vlastnost V má.

1. Nechť je dána půlkružnice k s průměrem AB. Vyšetřete, co je množinou všech středů všech tětiv půlkružnice k.

=> Osa každé tětivy XY půlkružnice k prochází středem S této půlkružnice. Uvážíme-li tětivu AZ rovnoběžnou s XY, pak musí střed S´´ tětivy AZ ležet na Thaletově kružnici nad průměrem AS. Bod S´´ tedy leží na hranici hledané oblasti.



Hledanou množinou je oblast mezi silně vyznačenými půlkružnicemi, přičemž čárkovaná hranice do ní nepatří, plně vyznačená hranice ano.

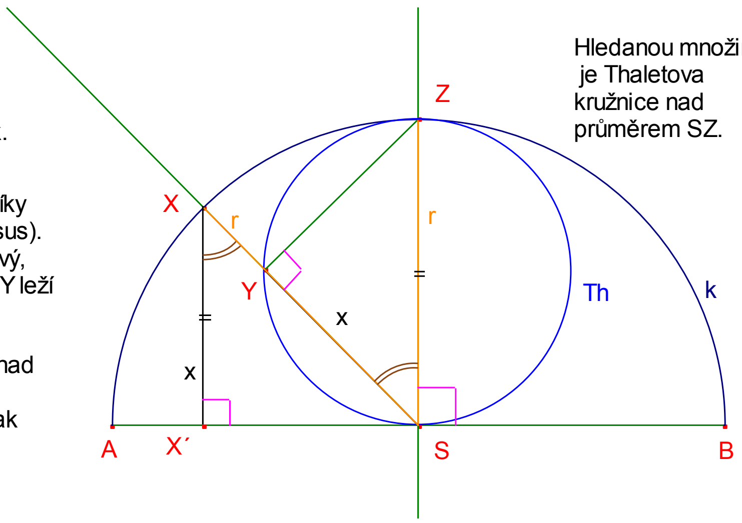
<= Uvažme libovolný bod S´´´ ve vymezené oblasti. Veďme jím kolmici k SS´´´ a označme X´ a Y´ její průsečíky s k. Díky shodnosti trojúhelníků X´S´´´S a Y´S´´´S (Ssu) je I X´S´´´ I = I Y´S´´´ I, takže existuje vyhovující tětiva se středem S´´´.

2. Nechť je dána půlkružnice k s průměrem AB a nechť X je libovolným bodem k. Označme Y ten bod polopřímky SX, který má od bodu S stejnou vzdálenost jako bod X od AB. Vyšetřete, co je množinou všech bodů Y (pro všechny možné polohy bodu X na půlkružnici k).

Označme X´ kolmý průmět bodu X na AB a Z průsečík kolmice k úsečce AB vedené jejím středem S s půlkružnicí k.

=> Nechť IXX´I = ISYI. Trojúhelníky XX´S a SYZ jsou pak shodné (sus). Odtud plyne, že úhel SYZ je pravý, takže podle Thaletovy věty bod Y leží na kružnici nad průměrem SZ.

<= Nechť bod Y leží na kružnici nad průměrem SZ. Trojúhelníky XX´S a SYZ jsou pak shodné (usu). Proto IXX´I = ISYI.

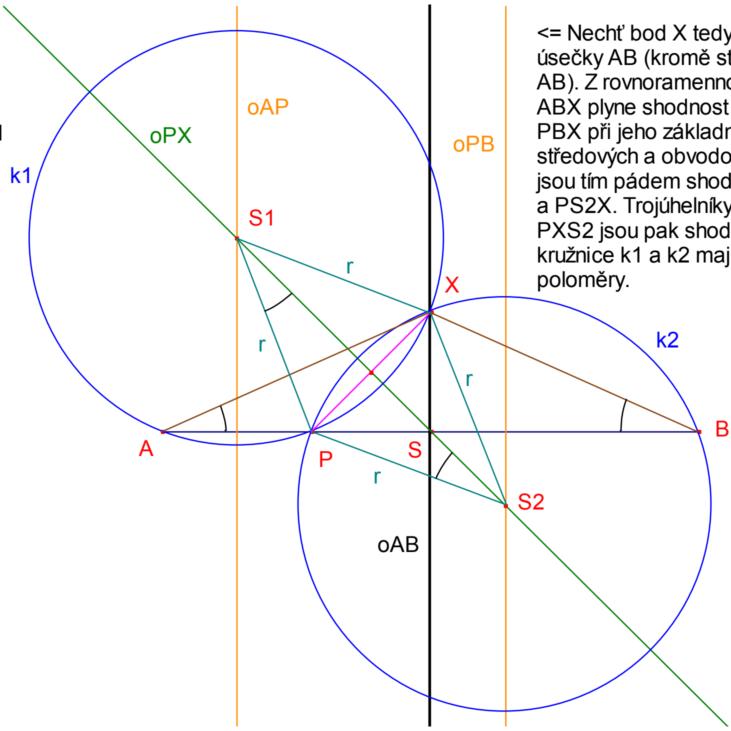


Hledanou množinou je Thaletova kružnice nad průměrem SZ.

Aleš Kobza

3. Nechť je dána úsečka AB a na ní bod P tak, že úsečka AP je kratší než úsečka BP. Vyšetřete, co je množinou všech bodů X v rovině, pro něž kružnice opsané trojúhelníkům APX a BPX mají shodné poloměry.

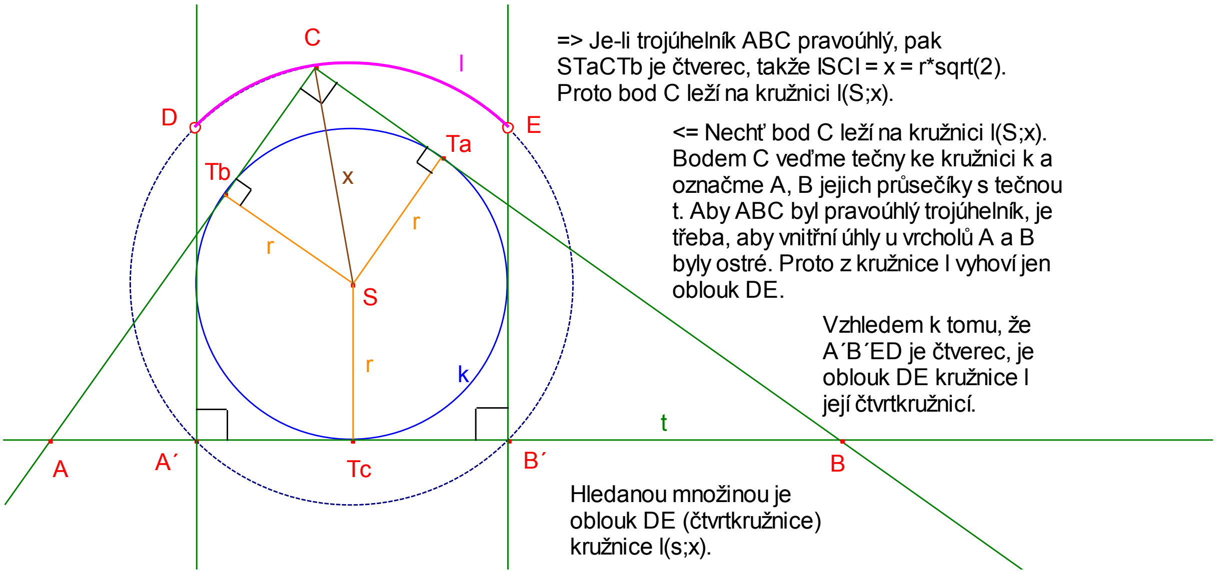
=> Nechť kružnice k1 a k2 mají shodné poloměry. Trojúhelníky PXS1 a PXS2 jsou pak shodné (sss), proto jsou shodné i úhly PS1X a PS2X. Užitím věty o středových a obvodových úhlech odtud dostáváme shodnost obvodových úhlů PAX a PBX. Trojúhelník ABX je tedy rovnoramenný se základnou AB. Bod X tedy leží na ose úsečky AB.



<= Nechť bod X tedy leží na ose úsečky AB (kromě středu S úsečky AB). Z rovnoramennosti trojúhelníku ABX plyne shodnost úhlů PAX a PBX při jeho základně. Podle věty o středových a obvodových úhlech jsou tím pádem shodné i úhly PS1X a PS2X. Trojúhelníky PXS1 a PXS2 jsou pak shodné (usu), takže kružnice k1 a k2 mají stejné poloměry.

Hledanou množinou je osa úsečky AB bez bodu S.

4. Nechť je dána kružnice k(S;r) a přímka t, která je její tečnou. Vyšetřete, co je množinou všech vrcholů všech pravoúhlých trojúhelníků ABC s pravým úhlem u vrcholu C, pro které platí, že strana AB leží na přímce t a kružnice k je kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC.



=> Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý, pak STaCTb je čtverec, takže ISCI = x = r*sqrt(2). Proto bod C leží na kružnici l(S;x).

<= Nechť bod C leží na kružnici l(S;x). Bodem C veďme tečny ke kružnici k a označme A, B jejich průsečíky s tečnou t. Aby ABC byl pravoúhlý trojúhelník, je třeba, aby vnitřní úhly u vrcholů A a B byly ostré. Proto z kružnice l vyhoví jen oblouk DE.

Vzhledem k tomu, že A´B´ED je čtverec, je oblouk DE kružnice l její čtvrtkružnicí.

Hledanou množinou je oblouk DE (čtvrtkružnice) kružnice l(s;x).

Aleš Kobza