ARITMETICKÉ POSTUPY V ALGEBRAICKÝCH ÚLOHÁCH POUŽÍVANÉ NADANÝMI ŽÁKY NA 1. STUPNI ZŠ

Irena Budínová

Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity v Brně

Abstrakt

Algebra patří k neoblíbeným částem školské matematiky. Žákům dělá problém přechod od aritmetického způsobu uvažování, který používají většinu školní docházky. Jednou z možností, jak u žáků nastartovat algebraické způsoby myšlení, je zadávání úloh rovnicového charakteru. Jedná se o slovní úlohy, které mohou řešit již žáci prvního stupně. Je přitom nutné sledovat strategie, které žáci při řešení používají – ty mohou napovědět, zda se žák nachází více na aritmetické nebo algebraické úrovni uvažování. Studie se pokusila nahlédnout do uvažování nadaných žáků 1. stupně ZŠ. O nadaných žácích se často soudí, že jim jde ve škole všechno snáz. Pozorujeme, zda to platí i v případě úloh rovnicového charakteru, nebo zda i nadaní žáci potřebují v této oblasti uvědomělé vedení.

Klíčová slova

nadaní žáci; algebraické myšlení; úlohy rovnicového charakteru; strategie řešení

Abstract

One of the unpopular parts of school mathematics is algebra. Students struggle to change the way of their arithmetical thinking, which they are used to using at school. One of the possibilities how to help students to start using algebraic thinking is to introduce word problems that lead to equations. These word problems can be introduced even at the primary level of education. It is very important to pay attention to the strategies that the students are using to solve the word problems as it may indicate whether they are using arithmetical or algebraic way of thinking. The following study aims to look into the way of thinking of talented students at the primary level of education. It is generally believed that talented students don´t have problems at school. We observe if this is the truth for word problems that lead to equations, or if talented students need conscious guidance.

Key words

gifted pupils; algebraic thinking; word tasks that lead to equations; strategies of solving

Úvod

Žáci základních škol se dlouhodobě potýkají s přechodem od aritmetiky k algebře, ke kterému u nás dochází většinou v 8. ročníku, kdy se žáci začínají zabývat algebraickými výrazy. V 6. a 7. ročníku předcházejí některá algebraická témata, jako je např. přímá a nepřímá úměrnost, jsou ale probírána čistě aritmeticky.

Jedním z algebraických témat základní školy jsou rovnice. Je známo, že žáci jsou schopni řešit rovnice na nejjednodušší úrovni, avšak jak se zvyšuje náročnost, klesá schopnost žáků efektivně rovnice řešit. Problematické je také použití rovnic ve slovních úlohách.

V článku sledujeme různé přístupy nadaných žáků 1. stupně ZŠ k úlohám, které se v budoucnu řeší pomocí rovnic. Pozorujeme, zda žáci používají aritmetické postupy, či jednodušší strategie řešení.

Rovnost, rovnice, úlohy rovnicového typu

Rovnost je *„binární relace a určujeme, zda daná dvojice do relace patří, nebo nepatří, tedy zjišťujeme pravdivost výroku $a = b$ pro daná čísla“* (Malinová, 1983: s. 96). Je to relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Jedná se tedy o relaci ekvivalence. Příklady rovností jsou např. $12 - 8 = 4$, $7 \cdot 5 + 5 = 4 \cdot 10$, $143 = 12^2 - 1$.

Rovnicí rozumíme *„úlohu najít všechna taková x z dané množiny D, pro která z dané výrokové formy $A(x)$ dostaneme pravdivý výrok. Řešit rovnici, která je dána výrokovou formou $A(x)$, znamená úlohu zapsat množinu všech hledaných $x \in D$ výčtem prvků nebo jinou jednodušší charakteristickou vlastností“* (Malinová, 1983: s. 96). Při řešení rovnice využíváme kroky, které nemění množinu řešení. V případě lineární rovnice $ax + b = cx + d$ se jedná o ekvivalentní úpravy, kterými jsou přičtení téhož čísla k oběma stranám rovnice a vynásobení či vydělení obou stran rovnice týmž nenulovým číslem (Malinová, 1983: s. 97). Např. rovnici $2x + 3 = 25$ řešíme ve dvou krocích. Nejdříve od obou stran rovnice odečteme 3, tj. dostaneme $2x = 22$, v druhém kroku obě strany rovnice vydělíme dvěma, tj. $x = 11$. Dosazením nalezené hodnoty do zadání získáme rovnost: $2 \cdot 11 + 3 = 25$.

Úlohami rovnicového typu (či charakteru) rozumíme různé úlohy, které je možno řešit pomocí rovnice. Hejný (1990: s. 192) rozlišuje úlohy rovnicového charakteru podle formy zadání na **slovní** a **schematické či obrázkové**.

Úlohu rovnicového charakteru je možno řešit přetransformováním do jazyka rovnic, ale také jinými metodami – grafickým znázorněním, aritmeticky či experimentálně. Proto je mohou řešit i žáci, kteří neznají aparát rovnic. U úloh typu $9 \cdot \square + 10 = 100$ mohou žáci postupovat dosazováním různých čísel místo čtverečku, mohou ale také uvažovat implikačně: jestliže na levou stranu umístím určité číslo, pak na pravé straně musím dostat 100. První způsob je experimentální a čistě aritmetický, druhý způsob již zahrnuje určité vztahy, avšak ještě nekoresponduje s řešením rovnic, na které je zapotřebí ekvivalentní pojetí.

Úlohy typu „myslím si číslo" může žák rozdělit do jednotlivých kroků, které zřetězuje. Žáci se ve výuce matematiky postupně setkávají s úlohami charakterizovanými vztahem „o n méně", „o n více", později „n-krát více", „n-krát méně", apod. (viz Blažková a kol., 2002: s. 18–33). Žák postupně získává tyto jednotlivé poznatky a jejich spojením může u komplexnějších úloh postupovat od konce.

Metoda zřetězení souvisí s implikačním pojetím – žák postupuje v řešení jedním směrem, snaží se dostat z jedné strany na druhou. Rovnice je však ekvivalence, při jejím řešení se nelze ubírat z jedné strany na druhou.

Žáci různého věku jsou schopni k řešení úloh rovnicového charakteru používat různé metody. Nejdříve žáci přistupují k řešení čistě aritmeticky, např. metodou pokusu a omylu. Později jsou schopni zahrnovat implikační úvahy. K tomuto posunu u mnoha žáků dochází již v průběhu 1. stupně. Pro skutečné řešení rovnic je nezbytné, aby se žák dostal na úroveň ekvivalentního pojetí.

Teoretický rámec

Na prvním stupni jsou předkládány úlohy typu doplnění či příkaz k výpočtu, např. $4+5=\square$ nebo $\square+5=9$. Tímto způsobem žák získává poznatek, že symbol „rovná se" znamená „spočítej" spíše než „je ekvivalentní" (Booker, 1987; Booth, 1988). Zatímco v aritmetice můžeme znak rovnosti skutečně považovat za propojení problému s jeho výsledkem, v algebře má rovnost a ekvivalence velmi specifický význam, což nemusí být zjevné, když se pro obojí používá stejný znak (Booker, 1987). Žáci prvního i druhého stupně ZŠ často věří, že znak „rovná se" pouze reprezentuje jednosměrný operátor, který vytváří výstup na pravé straně ze vstupů na levé straně (např. Vergnaud, 1985).

Zápis $2+3=5$ čte žák prvního stupně zleva doprava, a vnímá ho tak implikačně: Jestliže ke dvěma přičtu tři, **musím** dostat pět. Pokud by žák postupoval zprava doleva, uvažoval by jinak: Číslo 5 **mohu** napsat jako 2 + 3 (jsou další tři možnosti, jak číslo 5 zapsat jako součet přirozených čísel). Nahlížení na příklad zleva doprava a zprava doleva tedy není symetrické. Podobně je to u úloh dočítacích. Úlohu typu $\square+3=5$ žák 1. stupně zleva doprava čte např. takto: Kolik **musím** přičíst ke třem, abych dostal pět? Zprava doleva si žák představí všechny rozklady, které **může** mít číslo 5.

Uvedené představy se u žáka fixují především v prvních dvou letech prvního stupně. Nejčastěji si žáci zafixují postup zleva doprava a tuto představu si přenášejí do dalších let, což jim komplikuje pochopení ekvivalentního charakteru rovnic. Dále může u některých žáků vzniknout přesvědčení, že prázdná pozice či písmeno zastupují vždy jednociferné číslo.

Jedním z nejpatrnějších rozdílů mezi aritmetikou a algebrou je používání písmen zastupujících určitou hodnotu. Žáci jsou často výskytem písmen zmateni, nechápou, co přesně znamenají, zda a jak s nimi mají počítat. Mnoho výzkumů nedávné minulosti indikovalo, že pro žáky je přijatelnější než zadávání rovnice obvyklým způsobem $x + 3 = 5$ spíše navození slovního problému, nebo alespoň nahrazení neznámé jinými způsoby, např. $\_\_ + 3 = 5$.

Kalchman a Koedinger (2005) popsali jednu úlohu zadanou třemi různými způsoby: příběhem, pomocí matematického modelu a rovnicí.

- **Úloha zadaná příběhem:** Když se Tod vrátil ze svého zaměstnání číšníka, vynásobil si svoji hodinovou mzdu počtem 6 hodin, které ten den odpracoval. Když k tomu přidal 66 dolarů, které si vydělal na spropitném, zjistil, že celkem to dělá 81,90 dolarů. Kolik Tod dostává za hodinu?
- **Slovně zadaný matematický model situace:** Myslím si číslo. Když ho vynásobím šesti a pak přičtu 66, dostanu 81,9. Jaké číslo jsem si myslel?
- **Rovnice:** Najdi x, jestliže $x \cdot 6 + 66 = 81{,}90$.

Z výzkumu vyplynulo, že žáci byli nejúspěšnější při úloze zadané příběhem. Žáci k řešení slovních úloh nevyužívali rovnic, ale zcela jiných strategií – **pokusu a omylu**, strategií **řešení „od konce“** (začali konečnou hodnotou 81,9, odečetli 66 a výsledek vydělili 6) apod. Žáci dosáhli v průměru 66 % úspěšnosti v úloze zadané příběhem, 62 % ve slovně zadané úloze a43 % u rovnice. Vnesení časové dimenze do problému v případě příběhu patrně mění nadčasovost rovnice na sled specifických dějů v konkrétní situaci, což navádí žáka na strategie opírající se o vyplývání (implikační vnímání), které jsou vzdáleny rovnicovému řešení. Nesmí se však jednat o příběh s různými časovými hladinami, jak uvidíme později.

Při řešení úloh se však setkáváme s dalším fenoménem – neschopností žáků číst matematický text s porozuměním. Přestože jednoduchá slovní úloha může mnoha žákům pomoci najít v matematických operacích smysl, neschopnost analyzovat matematický text jim brání v úspěšném řešení. Hejný a Stehlíková (1999) uvádějí: *„Schopnost číst s porozuměním matematický text je bytostně závislá na schopnosti žáka číst s porozuměním běžný text – třeba pohádku. Bez této schopnosti není snaha naučit žáka číst matematický text s porozuměním nadějná“* (Hejný, Stehlíková, 1999: s. 39). Dále Hejný a Stehlíková upozorňují, že pro některé žáky je čtení matematického textu s porozuměním úkol mnohem náročnější než pro jiné, avšak i tito žáci se mohou v dané záležitosti vytrénovat.

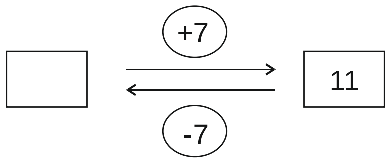
Učitel by měl od 1. ročníku dbát na to, aby žáci správně rozuměli matematickému zadání. Je potřeba s žáky rozebírat to, jak zadání interpretují a zda mu správně rozumí. Velmi problematické jsou pro žáky formulace typu „o n větší než“, „o n menší než“, „n-krát větší než“, „n-krát menší než“ (viz Blažková, 2009). Rozvoj verbálně symbolické komunikace je pro řešení slovních úloh stěžejní.

Hejný a Stehlíková (1999) se zabývají procesem **uchopování** slovní úlohy. Zjednodušeně lze říci, že řešitel si nejdříve vytváří představu toho, čeho se úloha týká, zapíše či zakreslí, co je dáno a co se má najít, hledá vztahy mezi objekty a volí strategii řešení (více viz Hejný, Stehlíková, 1999: s. 40).

Převedení slovní úlohy do úlohy matematické nazýváme **matematizace**. U slovních úloh na 1. stupni ZŠ nejčastěji číslo udává počet prvků, číslo je v pozici kardinálního čísla konečných množin. Matematizace pak spočívá v tom, uvědomit si, které počty jsou známy a které je nutno určit (viz Malinová, 1983: s. 102).

Číslo může již na 1. stupni vystupovat v úloze i v jiném kontextu než jako počet prvků. Hejný a Stehlíková (1999) udávají následující třídění číselných představ (Hejný, Stehlíková, 1999: s. 100): **identifikátor** (např. doběhl na 5. místě), **mnohost** (počet nebo veličina), **operátor** (aditivní nebo multiplikativní). Operátor lze dále rozdělit na **porovnání** (David je o dva roky starší než Jakub, Eva je dvakrát starší než Soňa) a **změnu** (přibral 2 kg, je dvakrát vyšší než před pěti lety). Hejný (2014) upozorňuje, že práce s operátorem je náročnější než práce s mnohostí. Operátor změny totiž poukazuje na dvě další čísla: na stav před změnou a stav po změně. Tyto údaje nejsou pro řešení nezbytně potřebné, žák je však může postrádat. Obdobně operátor porovnání v sobě obsahuje další dvě čísla, např. věk obou dětí, který ale nemusí být udán (Hejný, 2014: s. 159).

Vergnaud (2009) uvádí schematické znázornění aritmetické úlohy, které může žákům pomoci uchopovat nejdříve aritmetické úlohy, později úlohy s neznámou. Jedná se o následující úlohu: *„John vyhrál 7 kuliček při hře s Meredith, nyní má 11 kuliček. Kolik kuliček měl před hrou?“* (Vergnaud, 2009: s. 86). Úloha je pro žáky 1. stupně náročná ze dvou důvodů: obsahuje aditivní operátor změny (vyhrál 7 kuliček). Dále se jedná o úlohu s antisignálem, což je slovo „vyhrál“. Toto slovo mnoho žáků navede na přičítání, tj. výpočet 11 + 7. Schematické znázornění situace může žákům pomoci se uvedené chybě vyhnout.



Obrázek 1. Šipkový diagram

V diagramu lze sledovat počáteční stav P (neznámý), koncový stav K (11), přímou transformaci T (+7), nepřímou transformaci T^{-1} (-7). Symbolicky lze zapsat takto: *Jestliže* $T(P) = K$, *potom* $T^{-1}(K) = P$. Zde již vnímáme algebraickou reprezentaci.

Obě reprezentace (diagram a algebraická) ukazují, že existuje kontrast mezi způsoby symbolizace objektů a vztahů. Pro děti na 1. stupni není vhodná algebraická reprezentace, nicméně šipkový diagram jim může znázornit význam postupu tam a zpět. Žáci se dle Vergnauda (2009) mají setkávat s různými příklady, na nichž vidí inverzní charakter operací sčítání a odčítání.

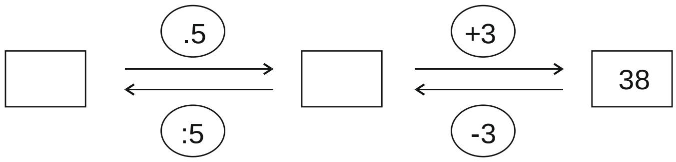
Aritmetika, nebo algebra?

Během prvních let primárního vzdělávání získávají žáci aritmetické dovednosti. Učí se čísla sčítat, odčítat, násobit a dělit. Žáci by měli pochopit vztah mezi operací danou a k ní inverzní (sčítání–odčítání, násobení–dělení). Později pracují s více operacemi současně, pro pamětné násobení a dělení využívají zákonů, jako je distributivní či asociativní, musí pochopit, že zatímco sčítání a odčítání jsou operace komutativní, inverzní operace nejsou. Tím, že je např. násobení komutativní, a dělení nikoli, je pro žáka jednodušší pochopit vztah mezi danými operacemi ve směru od násobení k dělení nežli naopak. Dále se žáci učí dělit se zbytkem.

Také se učí ze slovního problému vytvořit matematickou úlohu a tu vyřešit – např.: *Na stole bylo deset zákusků, tři děti několik zákusků snědly, na stole zůstal jeden zákusek. Kolik snědlo každé dítě, pokud snědlo každé stejný počet zákusků?* Dítě má sestavit a vyřešit matematický problém $(10 - 1): 3 = 3$.

Důležitá je souběžná příprava na pozdější nástup algebry. Kilpatrick et al. (2001) uvádí, že žáci mohou využít řešení problémů k rozvoji dovedností, které budou později potřebovat v algebraických úvahách. *„Při řešení problému jako ‚Přičteme tři k součinu pěti s určitým číslem, součet je 38. Které je neznámé číslo?' žáci mohou vycházet ze svých aritmetických poznatků a postupovat tak, že od 38 odečtou 3 a rozdíl vydělí pěti. Postupují tedy v opačném pořadí, než je uvedeno v zadání a používají inverzní operace“* (Kilpatrick et al., 2001: s. 262).

Při zadávání uvedené úlohy je třeba mít na paměti, že žáci budou mít sklony k implikačnímu pojetí. Žák se snaží úlohu vyřešit ve stejném směru, jako ji čte. Tento směr je „prošlapaný“ a učitel může předpokládat, že opačný postup je žákovi zřejmý. Nemusí však tomu tak být. Implikační pojetí je do jisté míry složitější, není-li chybějící číslo na jedné straně samostatně. Když se nyní vrátíme k úloze s vyhranými kuličkami, můžeme si uvědomit, že „zpětná cesta“ by žákům opět mohla být přiblížena šipkovým diagramem. Tentokrát je ale třeba postupovat ve dvou krocích.



Jestliže je v algebře zadána rovnice $5x + 3 = 38$, žáci potřebují k vyřešení stejnou dovednost jako při řešení uvedeného problému – od 38 odečíst 3 a rozdíl vydělit pěti. Uvedený šipkový diagram je mezikrokem mezi implikačním pojetím a ekvivalentním pojetím, které je potřeba k řešení rovnic.

Žáci řešící úlohy v rámci aritmetiky se soustředí na počítání (hledání výsledku) spíše než na vztahový aspekt operace. Kieran (2004) uvádí, že při rozvoji algebraického způsobu myšlení je účelné: zaměřit se na vztahy, a ne na pouhé výpočty a hledání výsledku; zaměřit se na operace stejně tak jako na jejich inverze; zaměřit se na vytváření i řešení problémů, ne pouze na řešení zadaných problémů; zaměřit se na písmena i čísla, a ne jen na čísla; nahlížet jinak na znak rovnosti.

Nedávné výzkumy (např. Carraher et al., 2006) ukázaly, že dokonce děti v prvních dvou letech základní školy jsou schopny používat proměnné k tomu, aby vyřešily slovně zadaný matematický model situace nebo rovnici. Děti však musí být s pojmem neznámé seznamovány takovým způsobem, aby mu porozuměly (Carraher et al., 2006). Zdá se být logické, že komplexnější a abstraktnější algebra navazuje na poznatky aritmetiky, tak jako tomu bylo i v historii. Existují přesvědčivé důvody pro to, aby příprava na algebru byla součástí elementární matematiky (Carraher et al., 2006).

V historii se řešily slovní úlohy jinými metodami než rovnicemi. Např. v Rhindově papyru, pocházejícího ze starověkého Egypta přibližně z doby 1650 př. n. l., se můžeme setkat s následující úlohou (Bečvář et al., 2003): *Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15.* V papyru je úloha řešena metodou **chybného předpokladu**. Řešitel nejprve předpokládá, že hledané množství je rovno čtyřem, protože ze čtyř určí jednoduše čtvrtinu. Dostává $4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$, tedy třetinový výsledek. Hledané číslo musí být proto třikrát větší, tj. 12.

Stejnou metodu chybného předpokladu použil také indický matematik Bháskara, žijící ve 12. století, pro řešení následující úlohy: *Ze svazku čistých lotosů byly jedna třetina, pětina, resp. šestina postupně obětovány bohům Šivovi, Višnovi či Šúrjovi a čtvrtina byla obětována Bhavanimu. Zbývajících šest bylo darováno vysoce váženému hodnostáři. Rychle mi řekni, kolik bylo lotosů?* Bháskara za počet lotosů volí číslo 60, což je nejmenší společný násobek čísel 3, 4, 5, 6. Při dosazení tohoto čísla do zadání zbývají tři lotosy, a ne 6, proto je řešením úlohy číslo 120.

Uvedená metoda využívá aritmetického postupu. Historicky se algebra objevila až po aritmetice, a to jako její zobecnění. Historický pohled je často předlohou pro vytváření školního kurikula. V případě algebry je však vhodný jiný přístup, protože není jasné, kde končí aritmetika a začíná algebra (Carraher et al., 2006).

Strategie používané při řešení úloh vedoucích na rovnice

Linsell (2008) uvádí vzrůstající komplexnost rovnic:

- rovnice typu $x - 3 = 12$, k jejímuž vyřešení je potřeba jeden krok a obsahuje malá čísla;
- rovnice typu $x + 46 = 113$, k jejímuž vyřešení je potřeba jeden krok;
- rovnice typu $3x - 8 = 19$, k jejímuž vyřešení je potřeba dvou kroků;
- rovnice typu $5x - 2 = 3x + 6$, která obsahuje neznámou na obou stranách;
- komplexní rovnice, např. $2x - 3 = \frac{2x + 17}{5}$;
- čistě symbolická rovnice, např. vyjádřit a z rovnice $v = u + at$.

Linsell (2008) vytvořil klasifikaci řešení rovnic, ve které uvádí přístupy žáků k řešení rovnic, založenou na původní práci Carolyn Kieran (1992). Klasifikace není hierarchická a rovněž není vyčerpávající. Např. chybí strategie vycházející z pochopení vlastností čísel nebo vlastností operací.

0. Neschopen zodpovědět otázku

1a. Známá základní fakta

1b. Počítací techniky

1c. Inverzní operace (v případě rovnic s jedním krokem)

2. Metoda pokusu a omylu

3a. Řešení od konce (v případě rovnic s více kroky)

3b. Řešení od konce, poté známá fakta

3c. Řešení od konce, poté metoda pokusu a omylu

4. Formální operace

Většina těchto strategií vychází z chápání rovnice jako procesu místo objektu (ekvivalence). Žáci zpočátku chápou rovnici jako popis aritmetického procesu. Dokonce více sofistikovaná metoda řešení od konce může být výsledkem chápání rovnice jako procesu (Linsell, 2008).

Podle míry sofistikovanosti Linsell (2009) seřadil strategie následujícím způsobem: metoda pokusu a omylu, počítací strategie / známá základní fakta, inverzní operace, řešení od konce a poté metoda pokusu a omylu, řešení od konce a poté známá fakta, řešení od konce, formální operace.

Schopní studenti obvykle používali více sofistikované strategie pro jednodušší úlohy a přešli k metodě pokusu a omylu u složitějších úloh. Méně schopní studenti používali metodu pokusu a omylu u jednodušších úloh, zatímco složitější úlohy nebyli schopni řešit žádnou strategií (Linsell, 2009). Jednodušší byly rovnice s jedním krokem.

Výzkumné šetření s nadanými žáky

Na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity (PdF MU) jsme ve spolupráci s Fakultou sociálních studií Masarykovy univerzity (FSS MU) vedli matematický kroužek na základních školách, který byl primárně určen pro nadané žáky 4. a 5. ročníku. Žáci navštěvovali kroužek ve své škole jedenkrát týdně po dobu 8 týdnů. Náplní bylo samostatné řešení úloh v pracovním listu. Úloh bylo vždy 8 a týkaly se všech částí školské matematiky. Po skončení hodiny žáci společně debatovali s učitelem a rozebírali svá řešení. Učitelé byli požádáni, aby zapisovali, jak žáci úlohy řešili, zda pokládali doplňující dotazy, zapisovali délku řešení. Někteří, ne všichni, učitelé tomuto požadavku vyhověli. Poté byla řešení podrobně analyzována na katedře matematiky PdF MU.

Kroužku se mohli účastnit žáci nadaní, a to jak všeobecně, tak matematicky, ale rovněž žáci nenadaní – z nich někteří byli bystří, někteří se projevovali jako nadaní, avšak nebyli diagnostikováni, někteří byli průměrní až podprůměrní, ale na kroužek se vždy těšili a rádi řešili úlohy. Nadaní žáci byli identifikováni v různých pedagogicko-psychologických poradnách na základě standardizovaných testů.

Nadání je obtížně definovatelný pojem. V průběhu historie se definice nadání měnila podle toho, jak docházelo k proměnám v chápání pojmu. Některé přístupy chápou nadání jako **projev** vynikajícího, nadprůměrného výkonu, jiné jako **potenciál** podávat nadprůměrný výkon v jakékoli hodnotné oblasti, případně jako potenciál rozvíjet svou **kreativitu** (Havigerová, 2011). Velmi častá je IQ definice, která jako nadaného označuje každého, kdo má **nadprůměrnou hodnotu inteligenčního kvocientu**, obvykle IQ ≥ 130 (Havigerová, 2011). Tento přístup je výhodný z pohledu měřitelnosti a také srovnání výkonů nadaných jedinců. Inteligence je důležitým předpokladem pro výkon v určitých oborech. Inteligence je vrozená kvalita každého jedince. Experti se dnes shodují na tom, že vedle genů je stejně důležité prostředí, ve kterém se jedinec nachází. Aby geny mohly být úspěšně využity, je potřeba podnětného prostředí, umožňujícího správný vývoj (Dweck, 2006: s. 5).

Pro učitele matematiky nemusí být IQ pojetí příliš vypovídající, neboť nerozlišuje obor, ve kterém jedinec vyniká. Také nezohledňuje motivaci jedince a zájem o matematiku.

Nadále budeme nadání chápat jako *„dispozici k projevení nadprůměrných výkonů v jakékoli hodnotné oblasti lidského snažení“* (Havigerová, Křováčová, a kol., 2011: s. 5). Cílem výuky matematiky přitom je tento potenciál objevit a rozvíjet jej tak, aby z něj dítě vytěžilo maximum.

Podle výše inteligenčního kvocientu lze odvozovat různé **stupně nadání**. Inteligenční kvocient vyjadřuje hodnotu výkonu určitého jedince na stupnici, v níž číslo 100 znamená právě průměrný výkon. Čísla menší než 100 značí různé stupně podprůměrných výkonů a čísla větší než 100 značí různé stupně nadprůměrných výkonů (Havigerová, 2011). Výkon lze rozdělit do určitých intervalů. Ve výzkumech (např. Nordby, cit. dle Havigerová, 2011; Fořtík, Fořtíková, 2007) jsou standardně užívány tyto intervaly a označení:

IQ	**Označení úrovně kognitivních schopností jedince**	**Výskyt v populaci**
115–129	Bystrý jedinec	14,0 %
130–144	Nadprůměrně nadaný	2,0 %
145–159	Vysoce nadaný	0,1 %

Tabulka 1. Jeden ze způsobů rozdělení výkonu do intervalů

Laznibatová (2001) uvádí, že rozdíly v pásmech intelektu nad 140 jsou velké a výrazné. *„Nad hranicí 130 – a to každých 15 bodů, jde o jiný typ inteligence. … Výkony dětí* *s IQ 145 oproti dětem s IQ 130 jsou asi takové, jako když porovnáme výkon dětí s IQ 130 a 115“* (Laznibatová, 2001: s. 32). Je-li IQ vyšší než 180, mluvíme obvykle o genialitě.

Při práci se skutečnými dětmi je třeba upozornit na fakt, že samotné IQ nemusí být pro projevy žáka příliš vypovídající. Hranice IQ 130 je jen velmi orientační, neboť na jednu stranu někteří žáci s certifikátem mohou mít výkony bystrého žáka, a na druhou stranu jsou žáci vysoce nadaní, kteří necítí potřebu získat certifikát, avšak přesto se ve výuce projevují velice specificky.

Pro výkony v matematice je dále určující typ inteligence. Všeobecná inteligence, která je často identifikována IQ testem, nemusí zcela korespondovat s matematickými schopnostmi žáka. Gardner (2006) rozděluje inteligenci na sedm druhů. Matematické schopnosti mohou být ovlivňovány **verbální inteligencí** (řečové schopnosti, díky nimž žáci mohou dobře analyzovat slovní úlohy), **logicko-matematickou inteligencí** (schopnost rozpoznat, v čem spočívá problém a vyřešit jej) a **prostorovou inteligencí** (uplatňující se nejvíce v geometrii).

Pro pochopení matematického nadání je důležité uvědomit si, čím se vlastně liší matematicky nadané děti od ostatních skupin dětí. Psychologové se v této souvislosti zabývali fenoménem zobecňování a pokoušeli se propojit schopnost zobecňovat s hladinou inteligence (Sternberg, 1979) a s komplexní schopností řešit problémy (Frensch, Sternberg, 1992). Greenes (1981) tvrdil, že matematicky nadané děti se lišily od ostatních skupin dětí schopností spontánně formulovat problémy, pružně organizovat data a schopností abstrakce a zobecňování (viz Sriraman, 2008).

O matematicky nadaných žácích se často soudí, že mají organizované zápisy. Je však třeba upozornit, že pro žáka s vysokou matematickou inteligencí může být vyřešení problému tak triviální, že vůbec neví, jak by sdělil či zapsal svůj postup. Proto mnohdy zápis matematicky nadaného žáka spočívá v zapsání výsledku. Jindy zase matematicky nadaný žák postup uvede, avšak symbolice a způsobu uvažování nerozumí nikdo jiný než on sám. S oběma projevy je ve výuce nutné bojovat a kultivovat žákovu dovednost vyjadřovat své myšlenky.

Hranice mezi nadaným a bystrým žákem je v reálné výuce těžko vymezitelná. Na nadání nelze usuzovat z výsledku testu, ale dlouhodobým pozorováním žáka. Pod pojmem matematicky nadaný žák proto budeme nadále rozumět žáka, který dlouhodobě vykazuje znaky logicko-matematické inteligence, která podle mého názoru úzce souvisí se schopností zobecňovat a řešit problémy s lehkostí a vhledem.

Žáci, kteří se účastnili našeho výzkumného šetření, vyplňovali v osmi vyučovacích hodinách pracovní listy, které jsme chystali na PdF MU (Blažková, Budínová, 2014). Žáci pracovali samostatně. Po odevzdání pracovních listů proběhla společná diskuse žáků a vyučujícího.

Kroužek probíhal ve dvou bězích, v každém běhu se účastnily jiné školy a jiní žáci. Prvního běhu se účastnilo celkem 55 žáků a druhého běhu 80 žáků. Počty žáků jsou uvedeny v tabulce 2. Počty žáků řešících dané úlohy se mohou lišit, neboť někteří žáci byli nemocní nebo se neúčastnili kroužku v daném týdnu z jiného důvodu.

	1. běh		2. běh	
	4. ročník	5. ročník	4. ročník	5. ročník
Nadaní	17	15	22	16
Ostatní	14	9	21	21

Tabulka 2. Počty žáků účastnících se matematického kroužku

Nadání žáků bylo diagnostikováno pedagogicko-psychologickou poradnou. V případě všeobecného nadání mohly být matematické projevy žáků až průměrné. V případě matematického nadání byly velmi pokročilé některé schopnosti související s matematikou, např. kvantitativní usuzování.

Způsoby řešení úloh žáky

V následujícím textu se zaměřím na některé z úloh rovnicového typu, které byly obsaženy v pracovních listech. Úlohy, které řešili žáci, byly buď slovní úlohy, nebo matematický model. To znamená, že nesleduji jen řešení rovnice (pokud byla vůbec sestavena), ale také schopnost vyřešit komplexnější matematický problém. Tento přístup jsem zvolila proto, že právě matematické modely a jednoduché slovní úlohy jsou chápány jako most mezi aritmetikou a algebrou.

Žáci dostali pokyn, aby zapisovali postup řešení, nikoli jen výsledek. Dále byli žáci požádáni, aby ohodnotili, jak se jim úloha líbila jedním ze symbolů ☺ 😐 ☹.

Úloha 1: *Doplň do čtverečku číslo tak, aby platila naznačená rovnost[1]:*

$$9 \cdot \square + 10 = 100$$

Souhrnné výsledky jsou uvedeny v tabulce 3:

	Počet žáků			**Procentuální úspěšnost[2]**		
	Celkem	4. ročník	5. ročník	Celkem	4. ročník	5. ročník
Nadaní	32	17	15	97	100	93
Ostatní	20	13	7	100	100	100

Tabulka 3. Úspěšnost, Úloha 1

Uvedená úloha byla pro žáky velmi snadná, a to jak pro nadané, tak pro ostatní. Pouze jeden nadaný žák pátého ročníku napsal do prázdného okénka křížek, tj. že úlohu

[1] Žák prvního stupně se nesetká s pojmem rovnost. Avšak uvedený zápis je žákům velmi dobře známý, tudíž chápali, co se od nich očekává.

[2] Vzhledem k počtu žáků není procentuální vyjádření příliš vhodné. Je zde uvedeno jen pro rychlou kontrolu úspěšnosti v jednotlivých skupinách.

nelze řešit. Vysoká míra úspěšnosti řešení ukazuje, že úloha svojí náročností neodpovídala nadprůměrnosti žáků. Úloha byla zařazena úmyslně, aby byl zaznamenán případný rozdíl mezi úlohami, které vyřeší všichni žáci, úlohami, které vyřeší více nadaných žáků, a úlohami, které nevyřeší ani nadaní žáci.

Její obliba byla vysoká – drtivá většina žáků ji uvedla jako úlohu, která se jim líbila. Některé děti uvedly, že úlohu hodnotí jako velmi jednoduchou. Z tohoto důvodu se některým nadaným dětem nelíbila. Naopak slabší žáci, kteří měli problémy s náročnějšími úlohami, měli radost, že úlohu zvládli.

	☺	😐	☹
Nadaní 4. ročník	15	1	0
Nadaní 5. ročník	12	2	1
Ostatní 4. ročník	8	3	1
Ostatní 5. ročník	6	1	1

Tabulka 4. Obliba Úlohy 1

Při řešení úlohy stačí, aby žáci využívali svých aritmetických znalostí. Přestože zápis již může připomínat zápis rovnicový, je mu velice vzdálen, neboť nevyžaduje znalost algebry. Žáci počítali v podstatě dvojím způsobem:

1. Dosazovali do okénka z hlavy metodou pokus-omyl čísla, až jim vyšlo $9 \cdot 10 + 10 = 100$.
2. Od 100 pamětně odečetli 10 a pak hledali číslo, díky kterému po vynásobení devíti dostaneme 90.

V obou případech se jedná o uplatnění aritmetických dovedností. Kvalitativně se řešení nadaných žáků neodlišovalo od ostatních žáků.

Úloha 2: *Myslím si číslo. Když je vynásobím 5 a odečtu 25, dostanu 100. Které číslo si myslím?*

Pokud bychom zadání převedli do rovnice, dostaneme $5x - 25 = 100$. Jedná se o rovnici, která by byla řešena ve dvou krocích:

$$5x = 100 + 25 \qquad /:5$$
$$x = 25$$

Nejčastěji žáci řešili úlohu zpaměti (zapsali pouze výsledek), nebo úsudkem $\_\_ \cdot 5 - 25 = 100$, tedy $25 \cdot 5 - 25 = 100$. U tohoto řešení není zcela jasné, jak žák postupoval. Buď mohl volit metodu pokusu a omylu, nebo také řešení od konce, které však nezapsal. Občas se objevilo také řešení od konce, tj. úvaha $100 + 25 = 125, 125 : 5 = 25$.

Úspěšnost žáků v úloze 2 je uvedena v tabulce 5:

	Počet žáků			**Procentuální úspěšnost**		
	Celkem	4. ročník	5. ročník	Celkem	4. ročník	5. ročník
Nadaní	28	13	15	79	69	87
Ostatní	20	13	7	85	85	86

Tabulka 5. Úspěšnost, Úloha 2

Různé strategie řešení, které žáci používali, jsou uvedeny v tabulce 6:

	Nadaní		Ostatní	
	4. ročník	5. ročník	4. ročník	5. ročník
Úsudkem $\_\_ \cdot 5 - 25 = 100$	7	3	5	5
Správně, od konce	0	4	1	1
Správně, přes x	0	1	0	0
Správně, bez uvedení postupu	2	5	5	0
Neřešeno	2	1	2	1
Chybná úvaha	2	1	0	0

Tabulka 6. Různé strategie řešení, Úloha 2

Nejčastěji použité řešení úsudkem v sobě může skrývat další metody – pokus-omyl, ale také řešení od konce. V těchto případech není tedy zcela jasné, jak přesně žák postupoval.

Z tabulky vidíme, že jeden nadaný žák 5. ročníku řešil úlohu přes x, tedy jako rovnici $5x - 25 = 100$. To znamená, že se někde (např. při rozhovoru s rodiči nebo při čtení matematické knihy) setkal s algebraickým řešením a to použil. Rogers a Novotná (2003) uvádí čtyři stupně přechodu od aritmetického k algebraickému způsobu využívání písmen v písemném záznamu zadaných informací:

1) Řešitel používá jedno písmeno k označení více neznámých, písmeno je pro něj označení jakékoli obecné neznámé.
2) Řešitel používá jedno nebo více písmen ve fázi kódování textu, ale nepracuje s nimi ve fázi transformace, neznámá je použita pouze jako označení něčeho, co se má hledat. Řešení je aritmetické.
3) Řešitel vědomě používá písmena pro označování hledaných hodnot a pro popis zadaných vztahů, avšak stále jsou pro něj důležité aritmetické modely, proto je použito aritmetické řešení.
4) Řešitel používá písmena k označení hodnot, uplatňuje algebraické operace. V tomto případě jsou splněny podmínky pro správné používání algebraických metod.

Jestliže žák prvního stupně používá písmena k řešení problému, není zcela jisté, na kterém stupni se nachází. Pokud se jedná o umělé urychlení poznávacího procesu (např. žák zápisu nerozumí, ale líbí se mu, že ho používá mezi vrstevníky pouze on), vzniká riziko upevnění nesprávných představ o algebraických metodách.

Opět není patrný markantní rozdíl v přístupu k řešení mezi nadanými a ostatními žáky. Jako nejvíce sofistikovaná metoda je zde postup od konce. U tohoto postupu můžeme sledovat, že mírně převažují počty nadaných páťáků nad ostatními skupinami.

Bylo by zajímavé analyzovat, s jakými typy úloh se žáci setkávají ve škole. Pokud nadaný žák nedostává podnětné úlohy, nerozvíjí se jeho potenciál a v tom případě může předvádět podobné výkony jako žák bez nadání. Taková analýza bohužel neproběhla.

Úloha byla mezi žáky velmi oblíbená, jak vidíme v tabulce 7.

	☺	😐	☹
Nadaní 4. ročník	10	2	1
Nadaní 5. ročník	11	3	1
Ostatní 4. ročník	9	2	1
Ostatní 5. ročník	5	1	2

Tabulka 7. Obliba, Úloha 2

V tabulce 7 vidíme, že úloha měla poměrně vysokou oblibu, a to jak u žáků nadaných, tak u žáků ostatních. V druhém běhu jsem proto na úlohu zareagovala úlohou analogickou, která je jen o málo náročnější (úloha 3).

Úloha 3: *Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi, a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?*

Uvedená úloha by vedla na rovnici $[(x+7):3]\cdot 5 = 45$. Pomocí formálních operací by se rovnice řešila ve třech krocích:

$$[(x+7):3] = 45:5$$
$$(x+7) = 9\cdot 3$$
$$x = 27-7$$

Žáci však mohli k vyřešení využít také zcela jednoduchou úvahu. Hledám neznámé číslo, pro které platí $\left[\left(\_\_+7\right):3\right]\cdot 5 = 45$. Zaměřím se na číslo 45, které mohu napsat v součinovém tvaru jako $9\cdot 5 = 45$. V hranaté závorce je tedy číslo 9, které získám, když 27 vydělím třemi. Neznámé číslo tedy musí být 20. Tuto počítací metodu Linsell (2009) označil jako méně sofistikovanou strategii než řešení od konce. Zřejmě proto, že metoda řešení od konce nejvíce koresponduje s transformacemi potřebnými pro algebraický postup. Pro žáky však je dovednost vnímat čísla v součinovém či součtovém tvaru podstatná a při řešení rovnic může usnadňovat výpočty.

Souhrnné výsledky úspěšnosti jsou uvedeny v tabulce 8:

	Počet žáků			**Procentuální úspěšnost**		
	Celkem	4. ročník	5. ročník	Celkem	4. ročník	5. ročník
Nadaní	36	21	15	89	81	100
Ostatní	37	18	19	76	78	74

Tabulka 8. Úspěšnost, Úloha 3

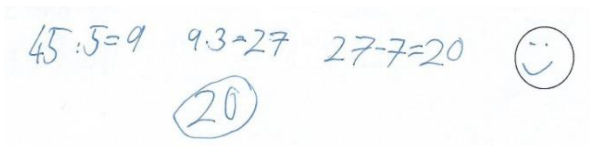
Jelikož se v případě této úlohy mírně liší výsledky nadaných a ostatních žáků, sledovala jsem ještě to, jak byli úspěšní matematicky nadaní žáci. Těch bylo 8 a všichni úlohu řešili správně. Nejčastěji postupovali od konce či úvahou, v jednom případě se objevilo také řešení pomocí neznámé x.

Používané strategie jsou uvedeny v tabulce 9:

	Nadaní		Ostatní	
	4. ročník	5. ročník	4. ročník	5. ročník
Úvahou $[(\_\_ + 7):3] \cdot 5 = 45$	4	1	5	3
Od konce $45:5, 9 \cdot 3, 27 - 7$	7	12	6	8
Správně, přes x	0	1	0	0
Správně, bez popisu	6	1	3	3
Chybně	4	0	4	5

Tabulka 9. Různé strategie řešení, Úloha 3

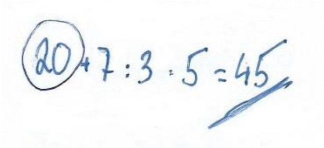
Nejčastějším postupem byl postup od konce, který lze zde vnímat jako nejvíce sofistikovaný. Nejvíce ho používali nadaní žáci 5. ročníku.



Obrázek 2. Žák postupuje od konce.

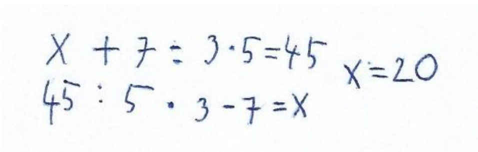
Často se také objevovalo uvedení výsledku bez postupu a řešení pomocí úvahy. V tomto případě však není průkazné, jak žák vlastně postupoval. Mohlo to být metodou pokusu a omylu, kdy za neznámé číslo postupně dosazoval, úvahou uvedenou výše, ale také postupem od konce, který však nebyl zapsán. Jednotlivé možnosti se podstatně liší svojí sofistikovaností.

Na obrázku 3 vidíme řešení úvahou a lze si všimnout, že zápis neobsahuje závorky, ale žákyně postupuje tak, jako by tam byly. Nezvládnutá gramatika zápisu je však zcela pochopitelná, neboť 1. stupeň ZŠ se nevěnuje přednosti násobení před sčítáním a zápisům se závorkami.



Obrázek 3. Žákyně využívá úvahu – doplňuje prázdnou pozici.

Jeden nadaný žák 5. ročníku řešil úlohu algebraicky, pomocí x. Na obrázku 4 vidíme, že žák provedl všechny operace v jednom kroku. Je otázkou, zda neměl pouze štěstí, když se dopracoval ke správnému výsledku. Například není ze zápisu průkazné, zda zvažoval přednost jednotlivých operací, protože zápis opět neobsahuje závorky. Nicméně schopnost žáka 5. ročníku označit písmenem neznámou hodnotu, vytvořit a vyřešit rovnici naznačuje na 4. bod charakteristiky Rogerse a Novotné (2003) – řešitel používá písmena k označení hodnot, uplatňuje algebraické operace.



Obrázek 4. Algebraické řešení úlohy 3 nadaným žákem

V úloze 3 byli výrazně úspěšní matematicky nadaní žáci. Avšak velmi dobře si v úloze vedli také nenadaní žáci, kteří chodí do třídy s rozšířenou výukou matematiky ve škole s daltonským plánem. Tito žáci jsou zvyklí na samostatné řešení slovních úloh, což podle mého názoru vede k úspěšnosti u typů úloh, které jsou žáci zvyklí řešit.

Úloha patřila k velmi oblíbeným, jak je patrné z následující tabulky:

	☺	😐	☹
Nadaní 4. ročník	15	3	0
Nadaní 5. ročník	12	2	1
Ostatní 4. ročník	14	2	2
Ostatní 5. ročník	14	2	1

Tabulka 10. Obliba, Úloha 3

Úloha 4: *Roman říká: „Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků.“ Kolik je mu roků?*

Úloha 4 je modifikací úlohy 1. Matematický model je zde formulován do příběhu. Hejný (2003: s. 3) nazývá *„slovní úlohu dynamickou nebo příběhem, právě když se odehrává ve dvou nebo více časových hladinách, popřípadě když pracuje s tekoucím časem. Úlohu, ve které čas nehraje důležitou úlohu, nazývá statickou nebo situací“.* Podle Hejného (2003) bývají dynamické úlohy náročnější než statické. Častou příčinou neúspěchu žáků při řešení dynamických úloh je zapomenutí na časové hladiny, čehož důsledkem je neuchopení vztahů.

Současní žáci mají dále problémy s porozuměním textu, a ačkoli je úloha formulována krátce a srozumitelně, snížilo pravděpodobně také slovní zadání úspěšnost úlohy.

Dalším ztěžujícím faktem pro tuto úlohu je použití kondicionálu (nereálné podmínky), která je pro žáky daného věku náročná. Kaslová et al. (2007) uvádí možnost vědomého používání podmínky od 5. ročníku ZŠ a rozlišuje podmínky reálné (když ano, když ne) a nereálné (kdyby ano, kdyby ne). V úloze je použita podmínka nereálná – sta let se dožije velmi málo lidí.

	Počet žáků			**Procentuální úspěšnost**		
	Celkem	4. ročník	5. ročník	Celkem	4. ročník	5. ročník
Nadaní	32	17	15	53	47	60
Ostatní	20	14	6	55	71	17

Tabulka 11. Úspěšnost, Úloha 4

Jako zajímavost může v případě této úlohy působit, že nejúspěšnější byli v řešení nenadaní žáci 4. ročníku. U slovních úloh se setkáváme s fenoménem, že mladší žáci (od 1. do 4. ročníku) mají velkou ochotu a schopnost řešit úlohy zadané příběhem, ale pokud tato schopnost není rozvíjena, postupně se snižuje.

Mezi nadanými žáky bylo 7 dětí matematicky nadaných, z nichž 5 dětí řešilo úlohu správně.

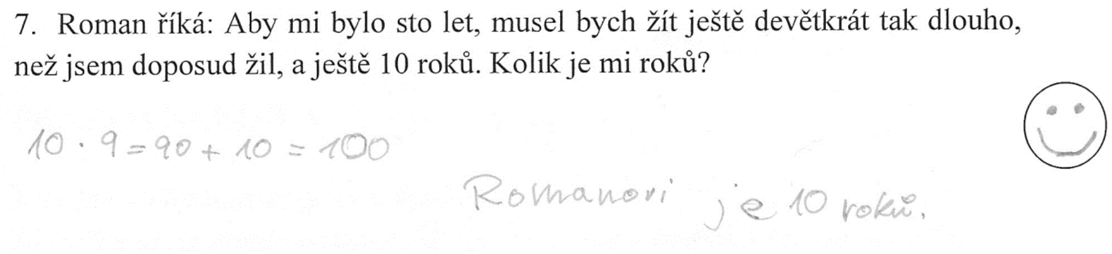
Nejčastěji jsme se setkávali s chybným řešením, vycházejícím z nesprávné úvahy. V případě řešení od konce vidíme, že je nepoužil žádný nenadaný žák.

	Nadaní		Ostatní	
	4. ročník	5. ročník	4. ročník	5. ročník
Úsudkem $9 \cdot 10 + 10 = 100$	3	3	6	0
Správně, od konce	2	3	0	0
Správně, bez postupu	3	3	4	1
Numerická chyba	0	0	0	1

Neřešeno	1	2	0	0
Chybně	8	4	4	4

Tabulka 12. Různé strategie řešení, Úloha 4

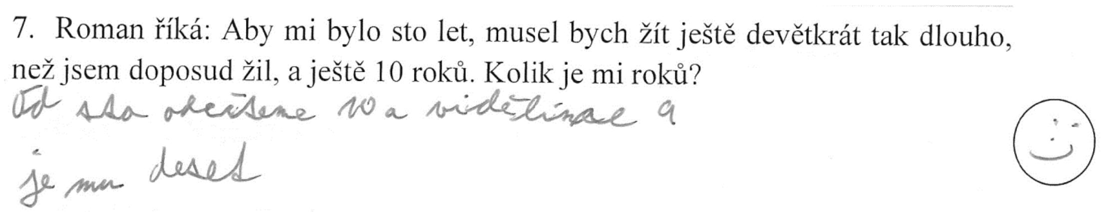
V případě správných řešení byla nejčastější, podobně jako u úlohy 1, úvaha $9 \cdot 10 = 90, 90 + 10 = 100$, ke které může vést metoda pokus-omyl, ale také vhled či počítací techniky, dále zapsání výsledku bez postupu řešení, a řešení od konce $(100 - 10 = 90, 90: 9 = 10)$.


7. Roman říká: Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků. Kolik je mi roků?

10 · 9 = 90 + 10 = 100

Romanovi je 10 roků.

Obrázek 5. Žák zapisuje postupný výpočet. Můžeme sledovat, že pro žáka je symbol „=“ jen pokynem k počítání, nechápe jej jako ekvivalenci (10 · 9 na levé straně není rovno 100 na pravé straně).

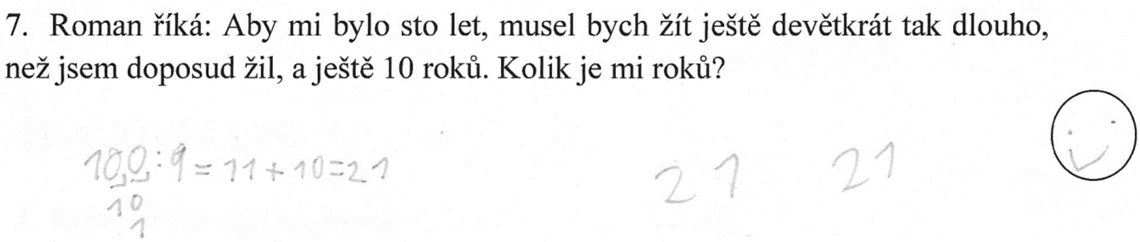

7. Roman říká: Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků. Kolik je mi roků?

Od sta odečteme 10 a vidělíme 9

je mu deset

Obrázek 6. Matematicky nadaný žák popisuje slovně strategii řešení od konce. Všimněme si hrubky ve slově „vydělíme“.

Na následujícím obrázku je ukázán postup vysoce nadaného žáka, který říkal, že z matematiky má nejraději příklady na „krát a děleno“. I v tomto případě vidíme, že uplatňuje nejdříve dělení a poté sčítání, avšak ne správně. Výsledek nezkontroloval zkouškou. V zápise opět můžeme sledovat chápání symbolu „=“ jakožto pokynu k počítání, nikoli ekvivalence (100: 9 není rovno 21). Ačkoli je aritmetické řešení nejlogičtější, pro některé žáky nemusí být snadné a snaží se jej nahrazovat jinými postupy.


7. Roman říká: Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků. Kolik je mi roků?

100 : 9 = 11 + 10 = 21
10
1

21 21

Obrázek 7. Vysoce nadaný žák bere čísla ze zadání a provádí s nimi aritmetické operace.

Úloha byla u žáků oblíbená, jak ukazuje následující tabulka. Podobně jako v předchozí úloze se jedná o „počítací“ úlohu, ve které lze uplatnit aritmetické operace, a tyto úlohy mají žáci rádi.

	☺	😐	☹
Nadaní 4. ročník	11	5	1
Nadaní 5. ročník	10	3	1
Ostatní 4. ročník	9	4	0
Ostatní 5. ročník	2	4	1

Tabulka 13. Obliba, Úloha 4

Úloha 5: *Mamince a tatínkovi je dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?*

Úloha vede na rovnici[3] $x + (x + 4) = 80$, kde neznámá x je věk maminky. V zadání je obsažen operátor porovnání, přičemž neznáme věk ani jednoho z rodičů. Tím je úloha pro žáky 1. stupně netypická a náročná.

Řešení úlohy aparátem rovnic by proběhlo ve dvou krocích. Úspěšnost úlohy je uvedena v tabulce 14.

	Počet žáků			**Procentuální úspěšnost**		
	Celkem	4. ročník	5. ročník	Celkem	4. ročník	5. ročník
Nadaní	37	21	16	89	81	100
Ostatní	42	21	21	43	43	43

Tabulka 14. Úspěšnost, Úloha 5

Mezi nadanými žáky 4. i 5. ročníku bylo 8 žáků matematicky nadaných. Zkontrolovala jsem i jejich výsledky a všichni úlohu řešili správně. U těchto žáků převažovalo více sofistikované řešení úsudkem.

V této úloze mnoho žáků neuvedlo postup řešení, a to zejména žáků 4. ročníku. Neuvedený postup může mít v podstatě tři vysvětlení:

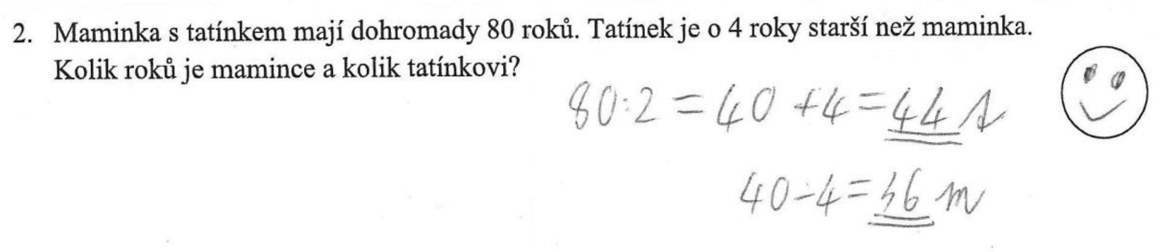
a) žák řešil aritmeticky metodou pokus-omyl,

[3] Lze také sestavit soustavu rovnic $x + y = 80, y = x + 4$, kde x značí věk maminky a y věk tatínka. Soustavy rovnic jsou probírány na 2. stupni ZŠ.

b) žák si výpočet zapisoval bokem a do pracovního listu napsal jen výsledek,
c) žák vyřešil úlohu zpaměti.

Mnoho nenadaných žáků (platí to zejména pro žáky 5. ročníku) uvedlo nesprávný postup, kdy 80 vydělili dvěma a pak od 40 jednou odečetli 4 a podruhé přičetli 4. Dostali pak výsledek 36 a 44, jak ukazuje následující obrázek. Uvedený postup může souviset s nezvládnutím aritmetického průměru, kdy žák nechápe, že pokud vytvoří aritmetický průměr obou věků ($80 : 2 = 40$), je potřeba také rozdíl věků vydělit dvěma.

Žáci neprovedli zkoušku slovní úlohy, nebo provedli jen zkoušku jedné z podmínek, $36 + 44 = 80$, nepoznali tedy, že výsledek není správný.


2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?

80:2=40+4=44 t

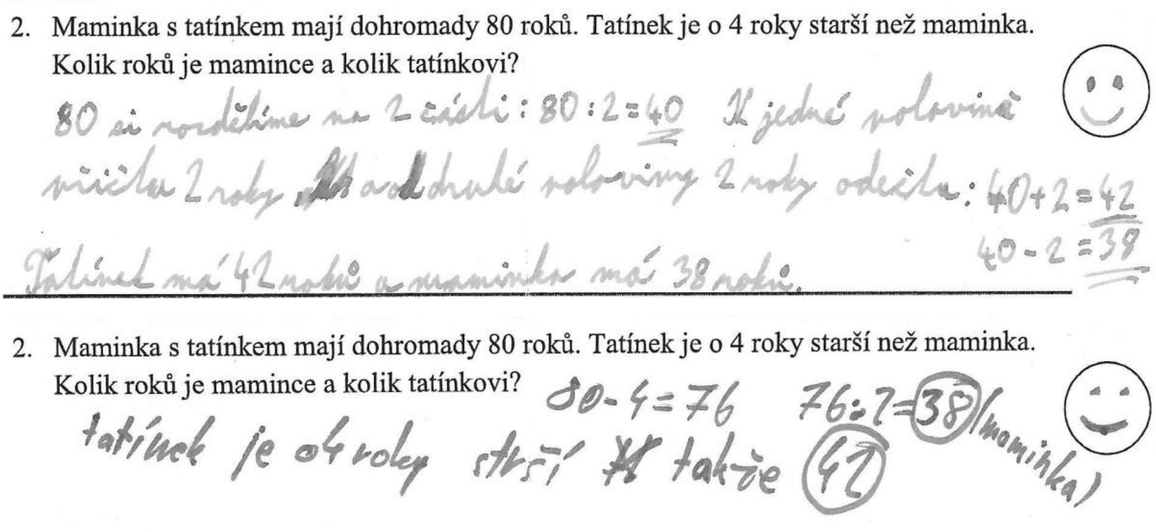
40-4=36 m

Obrázek 8. Žák 5. ročníku udělal chybu v úvaze.

V případě správného řešení se objevily dvě úvahy:

1) $80 : 2 = 40, 40 - 2 = 38, 40 + 2 = 42$,
2) $80 - 4 = 76, 76 : 2 = 38, 38 + 4 = 42$.

Řešení jsou ukázána na následujících obrázcích:


2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?

80 si rozdělíme na 2 části: 80:2=40 K jedné polovině přičtu 2 roky a od druhé poloviny 2 roky odečtu: 40+2=42 40-2=38

Tatínek má 42 roků a maminka má 38 roků.

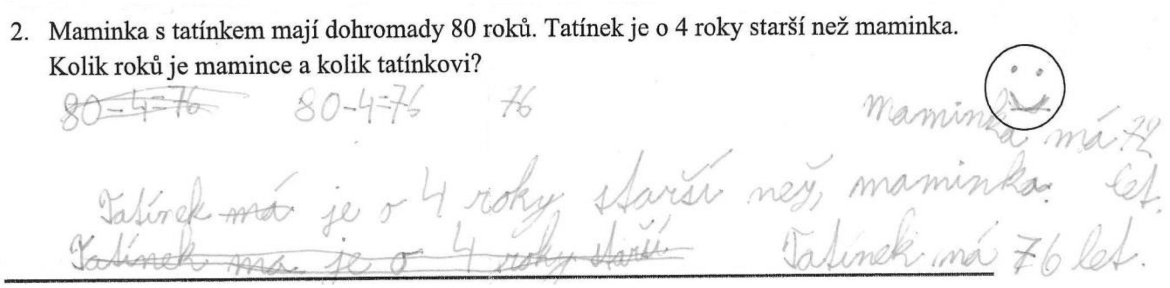
2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?

80-4=76 76:2=38 (maminka)

tatínek je o 4 roky starší takže 42

Obrázek 9. Dva způsoby správného řešení úlohy 5

Někdy žáci zvolili zcela nesprávnou úvahu. Jeden z případů je demonstrován na následujícím obrázku:


2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka.
Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?

~~80-4=76~~ 80-4=76 76 Maminka má 74 let.

Tatínek ~~má~~ je o 4 roky starší než maminka.

~~Tatínek má je o 4 roky starší~~ Tatínek má 76 let.

Obrázek 10. Nesprávně vyřešená úloha 5

Různé strategie řešení jsou uvedeny v následující tabulce:

	Nadaní		Ostatní	
	4. ročník	5. ročník	4. ročník	5. ročník
Úvahou $80:2=40$, $40-2, 40+2$	4	7	2	3
Úvahou $(80-4):2=38$	2	4	1	4
Správně, bez postupu	11	5	6	2
Chybně: 36 a 44	1	0	5	10
Chybně	1	0	7	2
Neřešeno	2	0	0	0

Tabulka 15. Různé strategie řešení, Úloha 5

Zdá se, že úloha poměrně dobře odlišuje nadané děti od ostatních. Zatímco někteří nadaní uvedli, že úloha pro ně byla velmi jednoduchá, mnoho nenadaných dětí se v zadání ztrácelo. V tabulce můžeme zejména vidět, že mnoho nenadaných dětí udělalo chybu v úvaze, kdy jim nedošlo, že když dělí dvěma součet let (80: 2), musí také vydělit dvěma rozdíl let (4: 2).

Je škoda, že mnoho žáků řešilo úlohu zpaměti. Lze však zřejmě usuzovat, že pokud je žák schopen úlohu řešit mentálně, řeší ji vhledem.

Úloha se žákům líbila, jak ukazuje následující tabulka:

	☺	😐	☹
Nadaní 4. ročník	16	1	4
Nadaní 5. ročník	11	4	0
Ostatní 4. ročník	20	1	0
Ostatní 5. ročník	19	2	0

Tabulka 16. Obliba, Úloha 5

Úloha 6: *Kapr váží 2 kilogramy a ještě půl kapra. Kolik kilogramů váží celý kapr?*

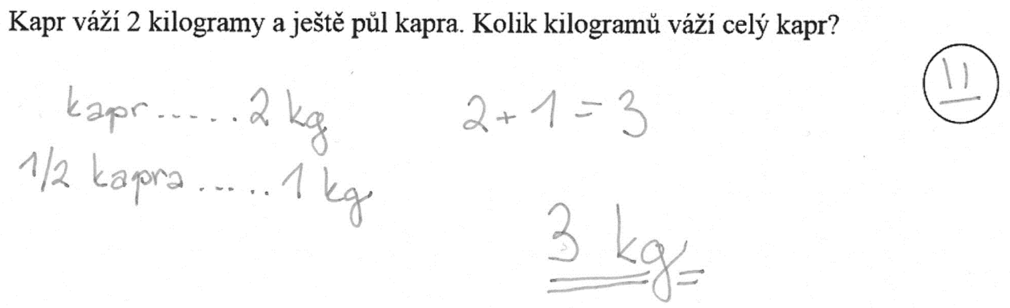
Uvedená úloha se řadí do problémových úloh. Na základních školách je zpravidla zvykem zadávat žákům standardní úlohy, pro něž se žáci učí postupy řešení. Většina žáků totiž vyžaduje od učitele uvést postup řešení a ten potom uplatňuje. Žáci jsou proto nastaveni tak, že se snaží v úloze aplikovat známý algoritmus, a pokud ho nenajdou, úlohu opustí bez řešení nebo ji „nějak“ vyřeší, bez ohledu na logiku. S tímto fenoménem jsme se setkali u výsledků úlohy 6. Několik žáků (a to i nadaných) napsalo, že je úloha nejasně zadaná. V zadání jim mohla vadit formulace „kapr a půl kapra“, kdy nemáme jistotu, zda se jedná o polovinu téhož kapra. V tom případě však měli možnost se učitele zeptat, jak je zadání myšleno, což se nestalo. Proto spíše předpokládám, že zadání neporozuměli.

Celkové výsledky úspěšnosti jsou uvedeny v tabulce 17:

	Počet žáků			**Procentuální úspěšnost**		
	Celkem	4. ročník	5. ročník	Celkem	4. ročník	5. ročník
Nadaní	27	12	15	26	25	27
Ostatní	20	11	9	10	9	11

Tabulka 17. Úspěšnost, Úloha 6

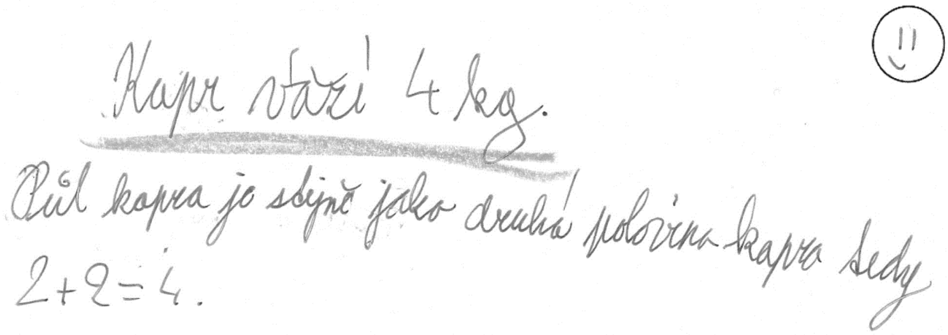
Nejčastěji se objevovala nesprávná úvaha: celý kapr váží 2 kg, polovina kapra tedy váží 1 kg a dohromady jsou to 3 kg. Postup je demonstrován na následujícím obrázku.



Obrázek 11. Žákyně řeší úlohu nesprávnou úvahou.

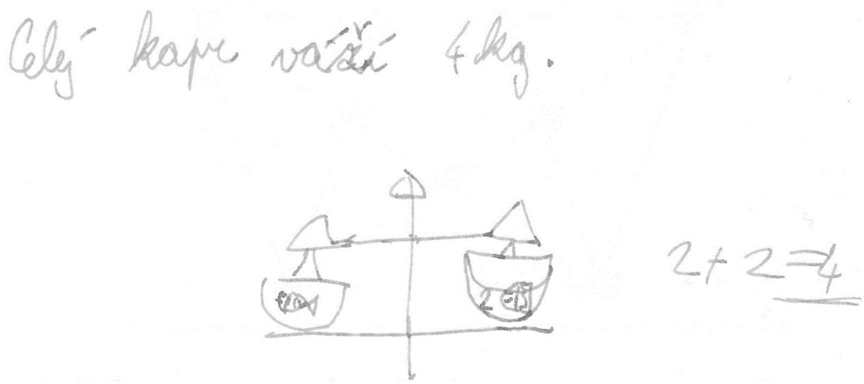
Často se objevovaly i jiné chybné výsledky, ale u nich těžko odhadovat, jak k nim žáci dospěli. Když byl uveden např. výsledek 68 kg, vypadalo to spíše na recesi.

Několik žáků bylo schopno ke správnému výsledku dospět úvahou, jak je znázorněno na obrázku 12.



Obrázek 12. Žákyně popisuje úvahu, kterou dospěla ke správnému výsledku.

Dva žáci se k výsledku dopracovali tak, že si znázornili rovnoramennou váhu. Z nízkého počtu žáků využívajících obrázek vyplývá, že žáci nejsou zvyklí používat ve svých řešeních grafická znázornění, která by řadě z nich mohla pomoci se v úloze orientovat.



Obrázek 13. Žákyně si pomohla znázorněním vah.

Použité metody řešení jsou uvedeny v tabulce 18.

	Nadaní		Ostatní	
	4. ročník	5. ročník	4. ročník	5. ročník
Správně, úvahou	2	2	0	1
Správně, váhy	0	1	1	0
Správně, bez postupu	0	1	0	0
Chybně: 3 kg	5	7	6	2
Chybně	3	4	3	5
Neřešeno	1	0	1	1

Tabulka 18. Různé strategie řešení, Úloha 6

Úloha patřila k méně oblíbeným. Nepatří do kategorie „počítacích“ úloh, jedná se o úlohu logickou, opírající se mimo jiné o schopnost tvořit představy. Tyto úlohy jsou ve výuce zastoupeny zřídka. Některým žákům však přišla zábavná, přestože ji neuměli řešit.

	☺	😐	☹
Nadaní 4. ročník	9	1	1
Nadaní 5. ročník	8	4	3
Ostatní 4. ročník	8	1	0
Ostatní 5. ročník	3	1	4

Tabulka 19. Obliba, Úloha 6

Úspěšnost řešení byla nízká jak pro žáky nenadané, tak pro žáky nadané a ani matematicky nadaní žáci, kterých bylo 5, nebyli příliš úspěšní – pouze 2 z nich dokázali úlohu správně řešit. Je zřejmé, že s podobným typem problémové úlohy se žáci ve školách nesetkávají. Úloha je velmi náročná na úvahu, navíc se v ní vyskytuje číslo v roli veličiny a operátoru, což je nezvyklé pro úlohy na 1. stupni ZŠ.

Ve druhém běhu byla zadána analogie úlohy 6:

Úloha 7: *Cihla váží 1 kilogram a půl cihly. Kolik kilogramů váží cihla?*

Z úlohy 6 se zdálo, že obrázek žákům pomohl se v situaci zorientovat a snáze najít správné řešení. Proto byl nyní u zadání doplněn dodatek, který žáky pobízel, aby si situaci zkusili znázornit.

Úloha je opět problémová a pro žáky není snadné se v zadání zorientovat. Mnoho žáků se nechalo zmást dvojím zadáním hmotnosti cihly – jednou pomocí kilogramů a podruhé pomocí části cihly. Úloha se jim pak jevila nesmyslně zadaná. Po převedení na rovnici dostáváme $x = 1 + \frac{1}{2}x$ a jedná se o rovnici s neznámou na obou stranách.

$$x - \frac{1}{2}x = 1$$

$$x = 2$$

Souhrnné výsledky jsou v tabulce 20:

	Počet žáků			**Procentuální úspěšnost**		
	Celkem	4. ročník	5. ročník	Celkem	4. ročník	5. ročník
Nadaní	37	22	15	21	18	27
Ostatní	38	19	19	21	11	32

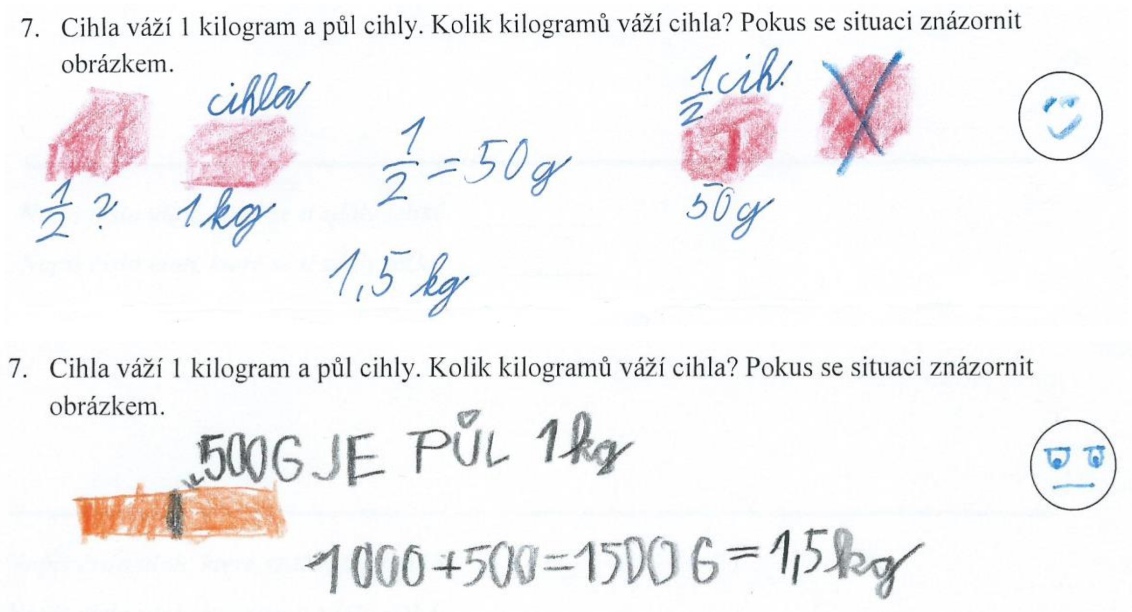
Tabulka 20. Úspěšnost, Úloha 7

Matematicky nadaných žáků bylo 8, z nich 3 řešili úlohu správně. Různé strategie řešení, které žáci používali, vidíme v tabulce 21. Výsledky jsou velmi podobné výsledkům předchozí úlohy. Mírně se zvýšil počet žáků, kteří si situaci graficky znázornili a úlohu správně řešili.

	Nadaní		Ostatní	
	4. ročník	5. ročník	4. ročník	5. ročník
Správně, úvahou	0	1	0	1
Správně, obrázek	4	3	1	3
Správně, bez postupu	0	1	1	2
Chybně: 1,5 kg	12	4	7	8
Chybně	3	3	5	3
Neřešeno	3	3	4	2

Tabulka 21. Různé strategie řešení, Úloha 7

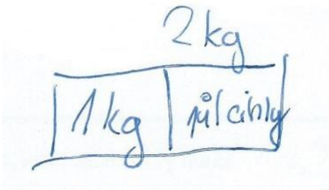
Nejvíce žáků se nechalo zmást zadáním a uvedlo výsledek 1,5 kg. U úloh 6 a 7 je evidentní, že některým žákům dělá problém role čísla v kombinaci operátor-veličina. To je také jedním z důvodů, proč žáci nedokážou správně zakreslit obrázek. Číslo 1 je ve významu veličiny (zakreslím 1 kg), číslo $\frac{1}{2}$ je ve významu operátoru (zakreslím polovinu cihly). To může být pro žáky zcela nepochopitelné.



Obrázek 14. Někteří žáci sice obrázek zakreslili, ale v řešení jim nepomohl.

Zakreslení obrázku, který znázorňuje zadání, je dovednost, která se musí rozvíjet. To platí dvojnásobně u problémových úloh. Pokud žáci nejsou v hodinách matematiky vedeni k tomu, aby si znázorňovali matematické situace, mají s tím potom problémy.

Přesto se domnívám, že instrukce o nakreslení obrázku zvýšila počet žáků, kteří obrázek zakreslili, a některým s řešením skutečně pomohla.



Obrázek 15. Žákyně si znázornila situaci a správně vyřešila úlohu.

Zatímco u úlohy 6 byly lepší výsledky nadaných žáků oproti nenadaným, v úloze 7 byly lepší výsledky žáků 5. ročníku oproti 4. ročníku. U matematicky nadaných žáků byly výsledky opět slabé. Úloha patřila k nejméně oblíbeným.

	☺	😐	☹
Nadaní 4. ročník	11	8	3
Nadaní 5. ročník	5	3	6
Ostatní 4. ročník	4	5	5
Ostatní 5. ročník	6	8	4

Tabulka 22. Obliba, Úloha 7

Diskuse a závěry

Z testování vyplynulo několik závěrů, které dle mého názoru přes malý počet testovaných žáků do značné míry odpovídají realitě.

Nadání je potenciál pro projevení nadprůměrných výkonů

Z literatury je zřejmé, že pohledy na nadání se různí (např. Havigerová, 2011). Osobně vnímám matematické nadání a nadání obecně jako potenciál pro podávání výborných výkonů. Pokud tento potenciál není rozvíjen, může se nadaný žák pohybovat hluboce pod vlastním potenciálem. Může mít z matematiky jedničku, přesto nemusí být jeho matematický rozvoj dostatečný.

Všeobecné nadání nemusí být předpokladem nadprůměrných výsledků v matematice

Při vyhodnocování jsem se zaměřovala na výsledky matematicky nadaných žáků. Ve většině případů jsou jejich výsledky lepší než u všeobecně nadaných žáků. To odpovídá teoretickému pohledu, který matematické nadání vnímá jako zcela specifický druh nadání (např. Greens, 1981, Gardner, 2006). V reálné výuce se však od všeobecně nadaného žáka očekávají výborné výsledky ve všech předmětech. Pokud má takový žák v matematice problémy, může se cítit frustrován, protože nedosahuje takových výkonů, jak se od něj očekává.

Některé typy úloh neodliší nadané v matematice a nenadané žáky

Viděli jsme, že u některých úloh byly výsledky nadaných a nenadaných žáků srovnatelné, v některých dokonce nenadaní žáci dopadli lépe.

Úloha 1 je jednokroková rovnice s malými čísly a byla triviální pro žáky nadané i nenadané. Naproti tomu velmi náročné byly i pro nadané žáky úlohy 4, 6 a 7. U úlohy 4 se jedná o příběh s plynoucím časem, úlohy 6 a 7 jsou problémové úlohy s kombinací čísla v roli veličiny a operátoru.

Nejvíce odlišovaly nadané a nenadané žáky úloha 3 a úloha 5. V obou případech se jedná o matematický model situace, který v sobě obsahuje vícekrokovou rovnici.

O postoji k řešení úloh rozhodovala více **motivace** nežli nadání. Žáci, kteří se dobrovolně účastnili matematického kroužku, měli nejspíše k matematice kladný vztah. Někteří z nich se na kroužek přihlásili proto, že se chtěli zlepšit v matematice. Na řešeních bylo patrné, že i nenadaní žáci, kteří měli radost z řešení úloh, mohli dopadnout daleko lépe než demotivovaní nadaní žáci. Motivace je tedy dalším důležitým předpokladem rozvoje nadání.

Úlohy s plynutím času jsou pro žáky náročné

Jak upozorňuje Hejný (2003), úlohy s několika časovými hladinami jsou pro žáky problematické. To se projevilo u zadání úloh 1 a 4, ve kterých se měla řešit táž rovnice, avšak příběh s plynoucím časem měl slabší výsledky.

U úloh zadaných příběhem se domnívám, že dále hraje roli celková nízká čtenářská gramotnost žáků a jejich malá schopnost převést slovní úlohu do matematického zápisu. Dovednost orientovat se v matematickém textu by měla být rozvíjena po celou dobu školní docházky.

Je však třeba zmínit, že v tomto případě se jednalo o velmi jednoduchou rovnici. Jiná situace by zřejmě nastala, pokud by rovnice byla složitá a nebylo by možno ji řešit metodou pokusu a omylu.

Používané strategie

U úloh vedoucích na jednokrokové rovnice s malými čísly jsme se ve shodě s literaturou (Linsell, 2009) setkali nejčastěji s metodou pokusu a omylu, u náročnějších úloh s více sofistikovanou metodou řešení od konce. V řešeních pomocí úvahy se mohou skrývat ještě další přístupy (např. řešení pomocí rozkladů na součin, aj.), které osobně pokládám za jedno ze sofistikovanějších řešení, avšak žák mohl používat i některé méně sofistikované metody. Drtivá většina řešení byla aritmetická, pokud se v ojedinělých případech objevilo algebraické řešení přes x, nemohli jsme si být jisti, zda žák skutečně ovládá kroky postupných úprav rovnice.

Žáci nezapisovali jen výsledky

Velmi potěšujícím faktem je to, že nadaní i nenadaní žáci byli ve většině případů schopni zapsat postup řešení. Někdy byl postup velmi chaotický nebo nepřehledný, někdy byl příliš stručný, ale často byl postup dostatečný k pochopení toho, jak žák uvažoval. To zcela nekoresponduje s všeobecně uznávaným faktem, podle něhož nadaní žáci neuvádějí postupy. Nadaní žáci mají tendence k velké úspornosti vyjadřování a ve výuce skutečně mnohdy zapisují pouze výsledek. Z našich výsledků se však jeví, že jestliže jsou žáci dostatečně důrazně požádáni, aby postup zapisovali, jsou toho schopni. To je velmi důležité v matematických soutěžích, jako je Matematická olympiáda, kde pouhé zapsání výsledku není akceptováno jako správná odpověď.

Žáci však neprováděli zkoušku správnosti svých výpočtů. Z toho důvodu mnohdy neodhalili chybu, které se dopustili. Z výsledků je patrné, že žáci nejsou vedeni ke kontrolování svých postupů a využívání metakognitivních procesů.

Výzkumná sonda ukázala řadu zajímavých fenoménů, avšak je třeba poznamenat, že způsob provedení výzkumu měl za následek některá omezení. Pro příště proto z této zkušenosti vyplývají doporučení, jako např. že po odevzdání testu by měl učitel/výzkumník provést rozhovor s žáky, aby se zjistilo, proč některé úlohy nevyřešili, jak uvažovali u úloh, ke kterým napsali pouze výsledek, nebo u úloh, u kterých není zřejmý postup. Dále by bylo vhodné zaznamenávat rychlost řešení, která může být vysoká, když se jedná o řešení vhledem.

Literatura

Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H. (2003). *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Edice Dějiny matematiky, 23. svazek. Praha: Prometheus

Blažková, R. (2009). *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení v matematice*. Brno: Masarykova univerzita.

Blažková, R., Budínová, I. (2014). *Pracovní listy 1–8 pro matematicky nadané žáky 4. a 5. ročníku.* Brno: Centrum MU pro rozvoj nadaných dětí v JM kraji

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M. (2002). *Kapitoly z didaktiky matematiky: slovní úlohy, projekty.* Brno: PdF MU

Booker, G. (1987). Conceptual Obstacles to the Development of Algebraic Thinking. In J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, s. 275–281). Montreal, Canada.

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook* (s. 20–32). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. In *Journal for Research in Mathematics Education 37* (2), 87–115

Dweck, C. S. (2006). *Mindset. The New Psychology of Success.* New York: Ballantine Books

Fořtík, V., Fořtíková, J. (2007). *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností.* Praha: Portál, 2007

Frensch, P., Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving: Principles and Mechanisms.* Mahwah, NJ: Erlbaum

Gardner, H. (2006). *Multiple Intelligences: New Horizons*. Basic Books.

Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Students in Mathematics. *Arithmetic Teacher, 28* 14–18

Havigerová, J. M. (2011). *Pět pohledů na nadání.* Praha: Grada

Havigerová, J. M., Křováčková, B. a kol. (2011). *Co bychom měli vědět o nadání.* Hradec Králové: Gaudeamus

Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Hejný, M. (2003). *Anatómia slovní úlohy o veku.* Ružomberok.

Dostupné on-line: http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Hejny.pdf

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: PdF UK

Hejný, M., Stehlíková, N. (1999). *Číselné představy dětí.* Praha: PdF UK

Kalchman, M., Koedinger, K. R. (2005). Teaching and Learning Functions. In: *How Students Learn: Mathematics in the Classroom*. Editors: Donovan, M. S., Bransford, J. D. Washington, DC, USA: National Academic Press

Kaslová, M., Fialová, D., Čížková, R., Korda, J. (2007). *Sbírka úloh z matematiky pro 4. a 5. ročník základní školy.* Praha: SPN

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Linsell, C. (2008). Solving Equations: Students' Algebraic Thinking. *Findings From the New Zealand Secondary Numeracy Project 2007*, 39–44.

Linsell, C. (2009). A Hierarchy of Strategies for Solving Linear Equations. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing Divides: Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1). Palmerston North, NZ: MERGA. 331–338.

Malinová, E. (1983). *Didaktika matematiky pro první stupeň základní školy.* Praha: UK

Rogers, L., Novotná, J. (2003). Word Problems: A Framework for Understanding, Analysis and Teaching. In: *Classroom Contexts. Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School*. (s.79–96) Bologna: Pitagora Editrice.

Sriraman, B. (ed.) (2008). *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics.* New York City: IAP

Sternberg, R. J. (1979). *Human Intelligence: Perspectives on its Theory and Measurement.* Norwood, NJ: Ablex

Vergnaud, G. (1985). Understanding Mathematics at the Secondary-school Level. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.): *Theory, Research and Practice in Mathematics Education* (s. 27–45). Nottingham, UK: University of Nottingham, Shell Center for Mathematical Education.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human development*, *52*(2), 83–94.

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.

Vystudovala jsem Přírodovědeckou fakultu MU, obor učitelství matematiky a fyziky pro SŠ. Po absolvování jsem se rozhodla pro doktorské studium na Pedagogické fakultě MU. Během této doby jsem učila na dvou základních školách a gymnáziu. Na rodičovské dovolené mě zaujala Montessori pedagogika a její pozitivní vliv na vývoj dítěte. Montessori pedagogikou se zabývám dodnes.

Ve své práci se snažím hledat způsoby, jak pracovat ve výuce matematiky s žáky podle jejich individuálních možností. Při práci s nadanými dětmi jsem si uvědomila, jak jsou jejich projevy specifické. Proto se v posledních pěti letech pokouším mapovat, jak se nadaní žáci projevují ve výuce matematiky, zda s nimi učitelé dokážou efektivně pracovat a podporovat jejich potenciál, zda je pravda, že nadaným žákům jde matematika lépe než ostatním a nepotřebují v ní žádnou pomoc.

Kontaktní údaje:
Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně, Poříčí 31,
603 00 Brno,
email: irena.budinova@seznam.cz