MODUL 1. MECHANIKA

1.1 KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

SHRNUTÍ

Hmotný bod (HB):
Model reálného tělesa,objekt nahrazující těleso, jehož rozměry a tvar jsou zanedbatelné vůči trajektorii, hmotný bod má stejnou hmotnost jako těleso, které jím nahrazujeme.

Vztažné těleso:
Těleso nebo soustava těles (popř. část tělesa), k nimž vztahujeme pohyb nebo klid sledovaného tělesa.
Vztažná soustava:
Soustava souřadnic spojená se vztažným tělesem.
Relativnost klidu a pohybu těles:
Pohybový stav tělesa závisí na volbě vztažné soustavy, klid a pohyb těles jsou pouze relativní, absolutní klid neexistuje.
Poloha HB
Vzhledem ke vztažnému tělesu a s ním spojené soustavě souřadnic s definovaným měřením času.

1.1.1. POHYB HMOTNÉHO BODU

SHRNUTÍ

Polohový vektor:
Orientovaná úsečka, jejíž počáteční bod je umístěn v počátku soustavy souřadnic a koncový bod v uvažovaném HB, polohový vektor je funkcí času $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

Trajektorie HB:
Souhrn všech poloh, kterými HB při pohybu prochází, množina koncových bodů polohového vektoru, spojitá křivka určená soustavou parametrických rovnic $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ nebo obecnou rovnicí F(x,y,z) = 0

Dráha HB:
Kvantitativní popis pohybu, délka trajektorie, kterou HB opíše za určitý časový interval.

ZTO 1.1.1.-1
Ve vlaku jedoucím rovnoměrným přímočarým pohybem upustí jeden z cestujících od stropu předmět, který dopadne přesně pod místo, ze kterého byl vypuštěn. Vše sleduje i cestující na nádraží, kterým vlak právě projíždí. Jaká je skutečná trajektorie tělesa?
a) přímka b) parabola c) přímka i parabola současně
d) nelze rozhodnout bez určení vztažné soustavy

BTO 1.1.1.-2

Pohyb hmotného bodu je popsán rovnicemi: $x = 20t^2 + 5$, $y = 15t^2 + 3$ (m; s). Napište obecnou rovnici trajektorie.

BTO 1.1.1.-3

Trajektorie hmotného bodu je zadána těmito parametrickými rovnicemi: $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$ (m; s). Napište obecnou rovnici trajektorie.

1.1.2. RYCHLOST HMOTNÉHO BODU

SHRNUTÍ

průměrná rychlost:

velikost průměrné rychlosti $v_P = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

okamžitá rychlost:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \vec{j}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \vec{k}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}$$

velikost vektoru rychlosti: $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(t) = \dot{s}$$

směr vektoru rychlosti

- vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic:

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_z}{v}$$

- vzhledem k trajektorii:

Okamžitá rychlost je vektor, který má směr **tečny** k trajektorii v místě, v němž okamžitou rychlost určujeme a míří ve směru pohybu.

jednotka: $\mathrm{m.s^{-1}}$

ZTO 1.1.2.-1

Po klidné hladině jezera pluje loď rychlostí 5 $\mathrm{km.h^{-1}}$. Na lodi je na přídi umístěn malý člun A, druhý takový člun B přenášejí lodníci z přídě na záď rychlostí 5 $\mathrm{km.h^{-1}}$. Třetí člun C pluje rovnoběžně s lodí stejným směrem rovněž rychlostí 5 $\mathrm{km.h^{-1}}$ (vzhledem k vodě). Všechny pohyby jsou rovnoměrné a přímočaré.

I) Které z člunů se pohybují vzhledem k lodi rychlostí 5 $\mathrm{km.h^{-1}}$?

a) A, C b) B, C c) B d) C

II) Které z člunů jsou vzhledem k lodi v klidu?

a) A, C b) B, C c) A d) B

III) Které z člunů se pohybují vzhledem k břehům jezera rychlostí 5 $\mathrm{km.h^{-1}}$?

a) A, B b) A, C c) B d) C

IV) Které z člunů jsou vzhledem k břehům jezera v klidu?

a) A, C b) A, C c) A d) B

ZTO 1.1.2.-2
Loďka má vzhledem k vodě rychlost 5 m.s^{-1}, rychlost proudu v řece je 3 m.s^{-1}.
I) Jak velká je rychlost loďky vzhledem k břehům řeky, směřuje-li loďka po proudu řeky?
a) 2 m.s^{-1} b) 4 m.s^{-1} c) 6 m.s^{-1} d) 8 m.s^{-1}
II) Jak velká je rychlost loďky vzhledem k břehům řeky, směřuje-li loďka proti proudu řeky?
a) 2 m.s^{-1} b) 4 m.s^{-1} c) 6 m.s^{-1} d) 8 m.s^{-1}
III) Jak velká je rychlost loďky vzhledem k břehům řeky, směřuje-li loďka kolmo k proudu řeky (tj. míří přídí kolmo k břehům)?
a) 2,1 m.s^{-1} b) 4,5 m.s^{-1} c) 5,8 m.s^{-1} d) 8,2 m.s^{-1}
IV) Pod jakým úhlem vzhledem k proudu musí loďka plout, aby se pohybovala kolmo k břehům řeky (tj. jaký úhel musí svírat příď loďky s proudem v řece)?
a) 27° b) 37° c) 127° d) 137°
V) Jak velká je rychlost loďky v případě IV) vzhledem k břehům řeky?
a) 2 m.s^{-1} b) 4 m.s^{-1} c) 6 m.s^{-1} d) 8 m.s^{-1}

BTO 1.1.2.-3
Dráha hmotného bodu je dána rovnicí: $s = 6t^3 + 5t + 2$ (m,s). Napište rovnici velikosti jeho okamžité rychlosti v závislosti na čase.

BTO 1.1.2.-4
Velikost rychlosti hmotného bodu je dána rovnicí: $v = 3t^2 + 2t + 5$ (m.s^{-1}, s). Napište rovnici jeho dráhy v závislosti na čase.

BTO 1.1.2.-5
Závislost dráhy na čase pohybujícího se tělesa je dána rovnicí $s = 6 - 3t + 2t^2$ (m,s). Určete průměrnou rychlost tohoto tělesa v časovém intervalu od první do čtvrté sekundy od začátku pohybu.

BTO 1.1.2.-6
Závislost dráhy na čase pohybujícího se tělesa je $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$ (m, s). Určete velikost rychlosti tělesa na konci druhé sekundy od začátku pohybu.

BTO 1.1.2.-7
Poloha hmotného bodu je dána polohovým vektorem $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Napište velikost x-ové souřadnice rychlosti tohoto hmotného bodu.

ZU 1.1.2.-1
Dva vlaky se na dvou rovnoběžných kolejích pohybují proti sobě: první rychlostí 36 km.h^{-1}, druhý rychlostí 54 km.h^{-1}. Cestující v prvním vlaku zjistil, že druhý vlak kolem něj projížděl 6 s. Jaká je délka druhého vlaku?

ZU 1.1.2.-2
Autobus vyjede z místa vzdáleného 54 km průměrnou rychlostí 15 m.s^{-1}. Za 15 min po odjezdu autobusu vyjede za ním z téhož místa osobní automobil. Jakou průměrnou rychlostí musí jet vůz, aby dosáhl cíle současně s autobusem?

ZU 1.1.2.-3

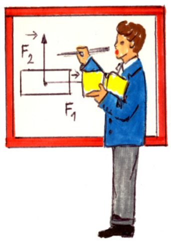
Člun plující po řece urazil vzdálenost 120 m při plavbě po proudu za dobu 14 s, při plavbě proti proudu za dobu 24 s. Vypočtěte rychlost v_1 loďky vzhledem k vodě a rychlost v_2 proudu v řece.

ZU 1.1.2.-4

Převozník chce zjistit rychlost říčního proudu (pro jednoduchost předpokládá, že rychlost proudu je konstantní). Ví, že jeho loďka jezdí na klidné vodě stálou rychlostí 2 m.s^{-1}. Přes řeku se s ní dostane za 58 s. Řeka je široká 100 m. Když se chce přeplavit přes řeku, přistává naproti místu, kde začínal a jezdí celou dobu rovně. Jak rychle řeka teče?

ZU 1.1.2.-5

Dešťové kapky padají stálou rychlostí svisle dolů a dopadají na okno vagónu, který se pohybuje vodorovným směrem. Kapky zanechávají na okně vagónu stopu, která svírá se svislým směrem úhel 60°. Velikost rychlosti vagónu je 54 km.h^{-1}. Určete velikost rychlosti dopadajících kapek.



ZŘÚ 1.1.2.-6

Určete průměrnou rychlost automobilu, který se pohybuje a) první polovinu doby své jízdy rychlostí 90 km.h^{-1}, druhou polovinu rychlostí 30 km.h^{-1}, b) v první polovině celkové dráhy rychlostí 90 km.h^{-1} a ve druhé polovině rychlostí 30 km.h^{-1}.

Řešení:

a) Definiční vztah pro průměrnou rychlost $v_p = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, kde Δs určuje celkovou dráhu, kterou za časový interval Δt automobil urazil.

- Na obou úsecích se vůz pohybuje konstantní rychlostí, takže dráhu, kterou urazí, vypočteme ze vztahu $s = vt$.
- První úsek dráhy: $s_1 = v_1 t_1$, druhý úsek $s_2 = v_2 t_2$. Doba pohybu automobilu na obou úsecích je stejná, proto platí: $t_1 = t_2 = \dfrac{t}{2}$, kde t je celková doba pohybu automobilu.
- Dosaďme do vztahu pro průměrnou rychlost: celková dráha $\Delta s = s_1 + s_2$, celková doba pohybu $\Delta t = t_1 + t_2 = t \;\Rightarrow$

$$v_p = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t} = \frac{v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}}{t} = \frac{\frac{t}{2}(v_1 + v_2)}{t} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

Po číselném dosazení: $v_p = 60$ km.h^{-1}.

b) Vyjdeme ze stejného definičního vztahu pro průměrnou rychlost $v_p = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ a ze vztahu pro dráhu rovnoměrného pohybu $s = vt$.

- Automobil se pohybuje na stejně velkých dráhových úsecích $s_1 = s_2 = \dfrac{s}{2}$, kde s je celková uražená dráha.
- Jelikož je jeho rychlost na obou úsecích různá, urazí tyto vzdálenosti v různých časových intervalech t_1 a t_2. Celková doba pohybu je tedy:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} + \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

- Po dosazení do vztahu pro průměrnou rychlost:

$$v_p = \frac{s}{\frac{s}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

Po číselném dosazení $v_p = 45\ \mathrm{km.h^{-1}}$.

ZU 1.1.2.-7

Motocyklista se snaží překonat kopec na staré motorce, která při stoupání do kopce vyvine rychlost pouze 45 km.h^{-1}. Stoupání i klesání je dlouhé 3,5 km. Jak rychle musí jet dolů z kopce, aby dosáhl průměrné rychlosti 90 km.h^{-1}?

BU 1.1.2.-8

Řidič automobilu jede mezi dvěma vzdálenými místy. Během své jízdy projíždí několika uzavřenými osadami, kde je jeho rychlost omezena na 60 km.h^{-1}. Průjezd těmito osadami odpovídá čtvrtině celkové dráhy. Na úseku délky osminy celkové dráhy je vozovka v rekonstrukci, jede tedy sníženou rychlostí 40 km.h^{-1}. Jakou rychlostí se musí pohybovat na zbývající trati, aby dosáhl průměrné rychlosti 80 km.h^{-1}?

BU 1.1.2.-9

Automobil jel po dálnici konstantní rychlostí. V 8h 20min jel kolem ukazatele s údajem 128 km, v 8h 32min kolem ukazatele s údajem 144 km. Určete a) velikost rychlosti automobilu, b) polohu vozidla v časech 8h 10min a 9h 15min, c) okamžik, kdy automobil projel kolem ukazatele s údajem 180 km.

1.1.3. ZRYCHLENÍ HMOTNÉHO BODU

SHRNUTÍ

průměrné zrychlení při pohybu přímočarém:

$$a_p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

okamžité zrychlení $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

$$\vec{a} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z = \vec{i}\,\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{dv_z}{dt} =$$

$$= \vec{i}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\,\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \vec{i}\,\ddot{x} + \vec{j}\,\ddot{y} + \vec{k}\,\ddot{z}$$

velikost zrychlení: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

směr vektoru zrychlení:

- vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic:

$$\cos(\vec{a},\vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a},\vec{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a},\vec{k}) = \frac{a_z}{a}$$

jednotka: $m.s^{-2}$

přirozené složky zrychlení: **tečné** a **normálové** zrychlení

(vzniknou rozkladem vektoru zrychlení do dvou vzájemně kolmých složek, z nichž jedna má směr tečny k trajektorii jako okamžitá rychlost a druhá má směr hlavní normály k trajektorii)

velikost **tečného** (tangenciálního) zrychlení $a_t = \frac{dv}{dt}$

… udává **změnu velikosti** rychlosti

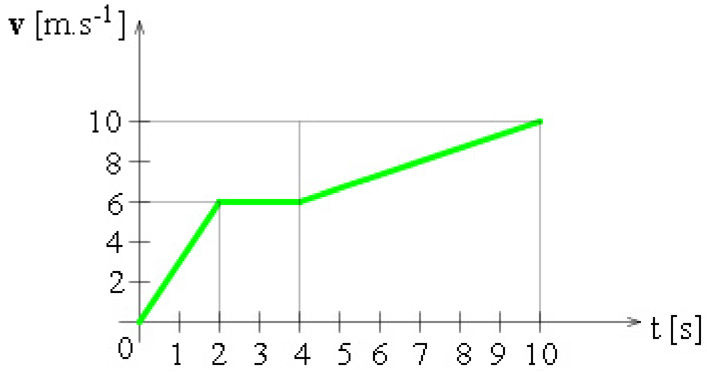
velikost **normálového** (dostředivého) zrychlení $a_n = \frac{v^2}{R}$, kde R je poloměr křivosti trajektorie

… udává **změnu směru** rychlosti

$\Rightarrow$ **celkové** zrychlení $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

ZTO 1.1.3.-1

Hmotný bod se pohybuje po přímce. Na obrázku je nakreslen graf závislosti rychlosti hmotného bodu na čase.



OBR. 1.1.3.-1

I) Jak velké je zrychlení hmotného bodu během prvních dvou sekund pohybu?

a) 1/3 $m.s^{-2}$ b) 3 $m.s^{-2}$ c) 6 $m.s^{-2}$ d) 12 $m.s^{-2}$

II) Jak velké je zrychlení hmotného bodu v čase t = 3 s?

a) 0 $m.s^{-2}$ b) 1/2 $m.s^{-2}$ c) 2 $m.s^{-2}$ d) 6 $m.s^{-2}$

III) Jak velké je zrychlení hmotného bodu v čase t = 6 s?

a) 1/2 $m.s^{-2}$ b) 1 $m.s^{-2}$ c) 4/3 $m.s^{-2}$ d) 8 $m.s^{-2}$

BTO 1.1.3.-2

Dráha hmotného bodu je dána rovnicí: $s = 6t^3 + 5t + 2$ (m, s).

I) Napište rovnici tečného zrychlení v závislosti na čase.

II) Jak velké je tečné zrychlení hmotného bodu ve druhé sekundě od začátku pohybu?

III) Jak velké je normálové zrychlení hmotného bodu ve třetí sekundě od začátku pohybu, jestliže v daném okamžiku opisuje hmotný bod trajektorii s poloměrem křivosti 30 m?

BTO 1.1.3.-3

Tečné zrychlení hmotného bodu vyjadřuje změnu:

a) směru vektoru rychlosti   b) velikosti rychlosti   c) směru i velikosti rychlosti

BTO 1.1.3.-4

Normálové zrychlení hmotného bodu vyjadřuje změnu:

a) směru vektoru rychlosti   b) velikosti rychlosti   c) směru i velikosti rychlosti

BTO 1.1.3.-5

První derivace polohového vektoru podle času má význam

a) výsledného zrychlení   b) průměrné rychlosti

c) vektoru okamžité rychlosti   d) velikosti okamžité rychlosti

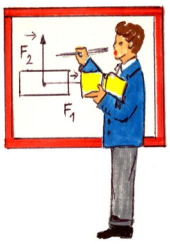
BTO 1.1.3.-6

Druhou derivací polohového vektoru podle času dostaneme

a) velikost tečného zrychlení   b) vektor tečného zrychlení

c) velikost normálového zrychlení   d) vektor normálového zrychlení

e) vektor celkového zrychlení



BŘÚ 1.1.3.-1

Mějme hmotný bod, který se pohybuje po ose x. Okamžitá souřadnice závisí na čase dle vztahu $x = At^3 - Bt^2 + Ct + D$, kde $A =$ 3 m.s^{-3}, $B = 12$ m.s^{-2}, $C = 16$ m.s^{-1}, $D = 10$ m. Určete a) dráhu, kterou hmotný bod urazí v časovém intervalu od začátku pohybu do konce třetí sekundy, b) průměrnou rychlost v tomto časovém intervalu, c) velikost počáteční rychlosti hmotného bodu, d) počáteční zrychlení, e) rychlost a zrychlení v čase $t = 3$ s.

Řešení:

- Dosaďme do obecného vztahu pro souřadnici uvedené konstanty: $x = 3t^3 - 12t^2 + 16t + 10$
- a) souřadnice HB v čase $t_0 = 0$ s je po dosazení za parametr čas $x_0 = 10$ m, souřadnice HB v čase $t_3 = 3$ s je po dosazení za parametr čas $x_3 = 31$ m. Dráha, kterou mezi těmito body hmotný bod urazí je $s = x_3 - x_0 = 21$ m.
- b) Průměrná rychlost je dána poměrem celkové dráhy a celkového času, který HB potřebuje k proběhnutí této vzdálenosti: $v_p = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{x_3 - x_0}{t_3 - t_0} = 7\,\text{m.s}^{-1}$.
- c) okamžitá rychlost je dána vztahem $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3At^2 - 2Bt + C$, po dosazení uvedených konstant: $v = 9t^2 - 24t + 16$. Počáteční rychlost hmotného bodu (v čase $t_0 = 0$ s) je po dosazení za parametr čas $v_0 = 16$ m.s^{-1}.
- d) okamžité zrychlení je dáno vztahem $a = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 6At - 2B$, po dosazení uvedených konstant: $a = 18t - 24$. Počáteční zrychlení hmotného bodu (v čase $t_0 = 0$ s) je po dosazení za parametr čas $a_0 = -24$ m.s^{-2}. Znaménko mínus vyjadřuje,

že v daném okamžiku se HB pohyboval zpomaleně, tj. vektor zrychlení měl opačnou orientaci než vektor rychlosti.

- e) okamžitou rychlost a zrychlení v čase $t_3 = 3\,\mathrm{s}$ získáme dosazením času do předchozích obecných vztahů pro rychlost a zrychlení: $v_3 = 25$ m.s^{-1}, $a_3 = 30$ m.s^{-2}.

BU 1.1.3.-2

Rovnice popisující rovinný pohyb hmotného bodu jsou $x = At$, $y = Bt - Ct^2$, kde $A = 3$ m.s^{-1}, $B = 4$ m.s^{-1}, $C = 2$ m.s^{-2}. Určete a) velikost počáteční rychlosti hmotného bodu, b) úhel, který svírá tečna k trajektorii s osou x v čase 0 s, c) čas, ve kterém je rychlost rovnoběžná s osou x a souřadnici bodu v tomto čase, d) souřadnici x v čase, kdy je souřadnice $y = 0$.

BU 1.1.3.-3

Pohyb hmotného bodu je popsán rovnicemi $x = At^3 - Bt + C$, $y = Dt^2 - Et$, $z = Ft^3 - Gt^2 + Ht$, kde $A = 1$ m.s^{-3}, $B = 6$ m.s^{-1}, $C = 1$ m, $D = 4$ m.s^{-2}, $E = 9$ m.s^{-1}, $F = 1$ m.s^{-3}, $G = 3$ m.s^{-2}, $H = 6$ m.s^{-1}. Určete velikost rychlosti a zrychlení hmotného bodu v čase 2 s od začátku pohybu.

BU 1.1.3.-4

Hmotný bod se pohybuje po přímce, přičemž závislost jeho dráhy na čase je dána vztahem $s = At + Bt^2 - Ct^3$, kde $A =$ 3 m.s^{-1}, $B = 4$ m.s^{-2}, $C = 1$ m.s^{-3}. Určete a) dráhu, rychlost a zrychlení hmotného bodu v čase $t = 2\,\mathrm{s}$, b) čas, ve kterém je rychlost rovna nule, c) čas, ve kterém je zrychlení bodu nulové.

BU 1.1.3.-5

Pohyb hmotného bodu je dán vektorovou rovnicí: $\vec{r}(t) = (2t+5)\vec{i} - t^2\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\vec{k}$. Pro libovolný čas t a potom pro čas $t_1 =$ 3 s určete:

a) jeho souřadnice a vzdálenost od počátku,
b) vektory rychlosti a zrychlení a jejich velikost
c) velikost zrychlení tečného a normálového

1.1.4. PŘÍMOČARÝ POHYB HMOTNÉHO BODU

SHRNUTÍ

$\vec{a}_n = \vec{o}$, $\vec{a} \equiv \vec{a}_t$

Rovnoměrný přímočarý pohyb:

$$\vec{v} = konst\ ,\ \vec{a} = \vec{o} \Rightarrow s = \int v dt = vt + konst = vt + s_0$$

Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb: $\vec{a} = \overrightarrow{konst}, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$

$$v = \int a dt = at + konst = v_0 + at$$

$$s = \int v dt = \int (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + s_0$$

Rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb: $a = konst$

$$v = v_0 - at, \qquad s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

zastavení: $v = 0 \Rightarrow \quad t = \dfrac{v_0}{a} \Rightarrow \quad s = \dfrac{v_0^2}{2a}$

Nerovnoměrně zrychlený (zpomalený) přímočarý pohyb:

$a = a(t)$

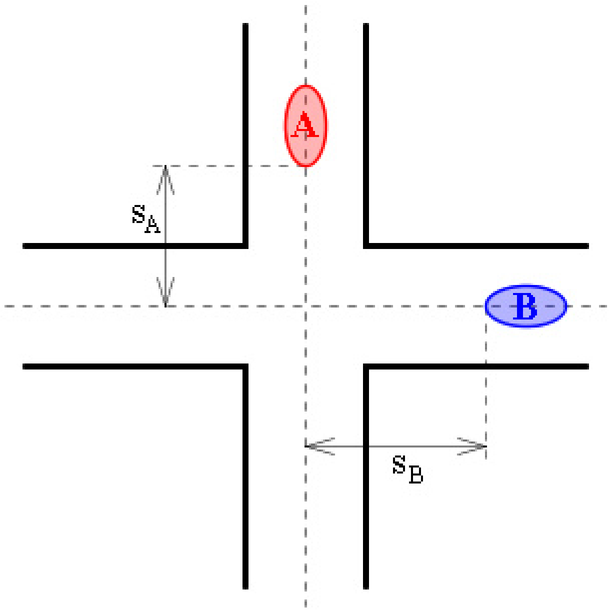
$v = v(t) = \int a(t)dt$

$s = s(t) = \int v(t)dt$

(tato závislost je zcela obecná, tvar každé rovnice záleží na daném příkladu)

ZTO 1.1.4.-1

Dvě vozidla jedou ke křižovatce. Vozidlo A se pohybuje konstantní rychlostí 80 km.h^{-1}, vozidlo B neznámou konstantní rychlostí. Vzdálenosti jednotlivých vozidel od středu křižovatky jsou $s_A = 800$ m, $s_B = 600$ m. Jakou rychlostí se musí pohybovat automobil B, aby se vozy uprostřed křižovatky srazily?



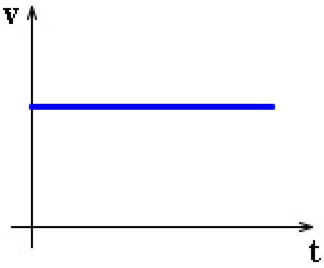
OBR.1.1.4.-1

a) 50 km.h^{-1} b) 60 km.h^{-1} c) 70 km.h^{-1} d) 80 km.h^{-1}

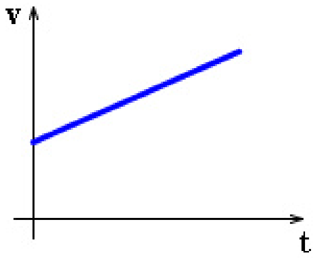
ZTO 1.1.4.-2

Ke grafům závislosti rychlosti hmotného bodu na čase v následujících obrázcích I) – III) zvolte příslušné grafy závislosti dráhy na čase (libovolný graf z uvedených variant a) – g)).

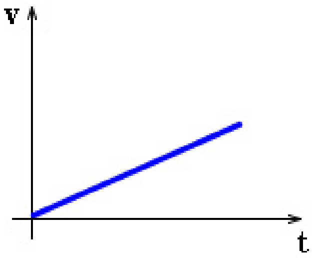
g) žádný z uvedených grafů



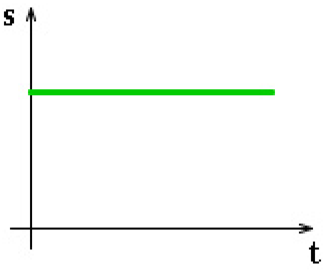
I) 1.1.4.-2



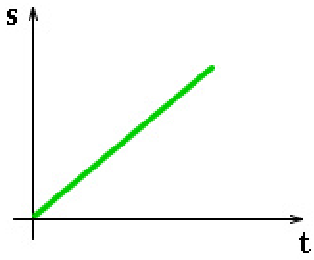
II) 1.1.4.-3



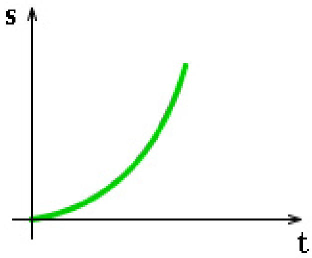
III) 1.1.4.-4



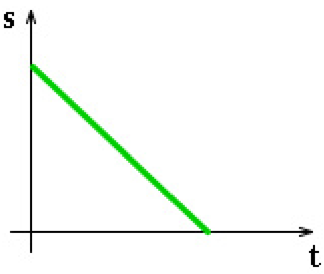
a) 1.1.4.-5



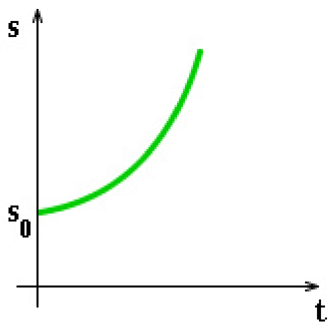
b)1.1.4.-6



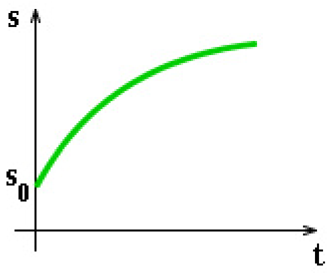
c)1.1.4.-7



d)1.1.4.-8



e)1.1.4.-9



f)1.1.4.-10

ZTO 1.1.4.-3

Automobil jede po přímé silnici rychlostí o velikosti 20 $m.s^{-1}$. V určitém okamžiku začne řidič brzdit a automobil se pohybuje rovnoměrně zpomaleně. Zrychlení má opačný směr než rychlost a jeho velikost je 4 $m.s^{-2}$.

I) Jak velká je rychlost automobilu po 3 sekundách zpomaleného pohybu?

a) 5 $m.s^{-1}$ b) 8 $m.s^{-1}$ c) 12 $m.s^{-1}$ d) 16 $m.s^{-1}$

II) Jakou dráhu ujede automobil za 3 sekundy zpomaleného pohybu?

a) 18 m b) 42 m c) 50 m d) 60 m

ZTO 1.1.4.-4

Rychlost vlaku pohybujícího se rovnoměrně zpomaleně se během 50 s zmenšila z 36 $km.h^{-1}$ na 18 $km.h^{-1}$.

I) S jak velkým zrychlením se vlak pohyboval?

a) 0,1 $m.s^{-2}$ b) 0,2 $m.s^{-2}$ c) 0,36 $m.s^{-2}$ d) 0,72 $m.s^{-2}$

II) Jakou dráhu během brždění vlak urazil?

a) 125 m b) 250 m c) 375 m d) 625 m

ZTO 1.1.4.-5

Vlak, který vyjížděl ze zastávky rovnoměrně zrychleným pohybem, získal během 10 s rychlost 0,6 m.s^{-1}. Za jakou dobu získá rychlost 3 m.s^{-1}?

a) 30 s b) 40 s c) 50 s d) 60 s

ZTO 1.1.4.-6

Těleso, které bylo na počátku v klidu, se začalo pohybovat rovnoměrně zrychleně a v průběhu páté sekundy od začátku pohybu urazilo dráhu 45 m. S jakým zrychlením se pohybovalo?

BTO 1.1.4.-7

Hmotný bod se pohybuje po přímce tak, že jeho dráhu lze vyjádřit rovnicí: $s = 6t + 1$ (m, s).

I) Určete počáteční rychlost hmotného bodu.

a) 0,6 m.s^{-1} b) 1 m.s^{-1} c) 6 m.s^{-1} d) 60 m.s^{-1}

II) Určete zrychlení hmotného bodu.

a) 0 m.s^{-2} b) 0,1 m.s^{-2} c) 0,6 m.s^{-2} d) 6 m.s^{-2}

III) Určete dráhu, kterou hmotný bod urazil za prvních deset sekund.

a) 1 m b) 6 m c) 60 m d) 61 m

IV) Určete rychlost, kterou má hmotný bod na konci desáté sekundy.

a) 1 m.s^{-1} b) 10 m.s^{-1} c) 60 m.s^{-1} d) 61 m.s^{-1}

BTO 1.1.4.-8

U rovnoměrného pohybu přímočarého dochází ke změně:

a) velikosti rychlosti
b) směru rychlosti
c) dochází ke změně jak směru tak i velikosti rychlosti
d) vektor rychlosti má konstantní směr i velikost

ZTO 1.1.4.-9

Hmotný bod se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, jeho zrychlení je:

a) libovolné b) konstantní, různé od nuly c) stále nulové

BU 1.1.4.-1

Hmotný bod se pohybuje rychlostí v_0= 6 m.s^{-1}. V čase t = 0 s se začne pohybovat se zpožděním o velikosti 2 m.s^{-2}. Za jak dlouho se hmotný bod zastaví a jakou dráhu přitom urazí?

ZU 1.1.4.-2

Vlak, který má rychlost 72 km.h^{-1}, lze použitím brzd zastavit za dvě minuty. V jaké vzdálenosti od cílové stanice je třeba začít brzdit, aby se vlak v cílové stanici zastavil? Pohyb vlaku považujte za rovnoměrně zpomalený.

ZU 1.1.4.-3

Po kolejích jede rovnoměrným přímočarým pohybem vlak rychlostí 5 m.s^{-1}. Od semaforu je vzdálen 500 m. Od čela vlaku letí směrem k semaforu moucha rychlostí 10 m.s^{-1}. Když doletí k semaforu, otočí se a hned letí zpět k čelu vlaku. Odtud se vrací zpět k semaforu atd. až do té doby, než dosáhne semaforu čelo vlaku. Jakou dráhu uletí moucha?

BU 1.1.4.-4

Pohyb HB je popsán parametrickými rovnicemi $x = A\sin\omega t$, $y = B\sin\omega t$, kde $A = 0{,}3\,\mathrm{m}$, $B = 0{,}4\,\mathrm{m}$, $\omega = 10$ rad.s^{-1}. Určete a) obecnou rovnici trajektorie hmotného bodu a jeho největší vzdálenost od počátku soustavy souřadnic, b) velikost rychlosti a zrychlení v čase 0 s, c) maximální velikost rychlosti a zrychlení.

ZU 1.1.4.-5

Přímočarý pohyb se koná z klidu se zrychlením, které rovnoměrně roste tak, že v okamžiku $t_1 = 90$ s od začátku pohybu má hodnotu $a_1 =$ 0,5 m.s^{-2}. Určete:

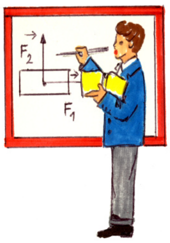
a) závislost rychlosti a zrychlení pohybu na čase,
b) rychlost a uraženou dráhu pro čas 90 s od začátku pohybu,
c) rychlost a uraženou dráhu pro čas 10 s od začátku pohybu.

ZU 1.1.4.-6

Nákladní automobil, který jede stálou rychlostí 54 km.h^{-1}, předjede stojící osobní vozidlo, které se právě rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem. Osobní automobil dohoní nákladní vůz za dobu 20 s. Určete zrychlení osobního vozu a jeho rychlost, kterou předjíždí nákladní automobil.

BU 1.1.4.-7

Těleso se pohybuje rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem, dva stejné úseky dráhy (délky 10 m) po sobě urazí v těchto časových intervalech: t_1 = 1,06 s a t_2 = 2,2 s. Vypočtěte zpomalení pohybu a rychlost na počátku prvního desetimetrového úseku.



BŘÚ 1.1.4.-8

Osobní automobil dojíždí rychlostí 30 m.s^{-1} nákladní vůz, jehož rychlost je 10 m.s^{-1}. Ve vzdálenosti s_0 od nákladního vozu zjistí řidič osobního auta, že nákladní vůz nelze předjet, proto začne brzdit a dále se pohybuje s konstantním zpomalením o velikosti 5 m.s^{-2}. Nákladní vůz jede dál konstantní rychlostí. Nastane srážka vozidel? Pokud ano, určete, na kterém místě a jaký je rozdíl rychlostí vozidel při srážce. Pokud srážka nenastane, určete nejmenší vzdálenost mezi vozidly. Řešte pro vzdálenost s_0 : a) s_0 = 30 m b) s_0 = 40 m c) s_0 = 50 m

Řešení:

$v_1 = 10$ m.s^{-1}

$v_0 = 30$ m.s^{-1}

$a = 5$ m.s^{-2}

a) s_0 = 30 m b) s_0 = 40 m c) s_0 = 50 m

- Pokud má nastat srážka vozidel, musí mít stejnou polohu na dané trajektorii, která určuje dráhy, které jednotlivé vozy urazí ve stejném časovém intervalu (počátečním, výchozím bodem je okamžik, kdy začne osobní automobil brzdit).
- Nákladní auto se pohybuje rovnoměrně přímočaře konstantní rychlostí, uražená dráha je tedy dána vztahem: $s_1 = s_0 + v_1 t$
- Osobní vůz jede rovnoměrně zpomaleným pohybem, dráha je dána: $s_2 = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$
- Porovnejme tyto dvě rovnice: $s_1 = s_2$

$$s_0 + v_1 t = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

- Upravíme: $at^2 + t(2v_1 - 2v_0) + 2s_0 = 0$

- Závislost rychlosti nákladního vozu na čase: $v_1 = konst.$
- Závislost rychlosti osobního automobilu na čase: $v_2 = v_0 - at$

Číselné dosazení a diskuse už musí probíhat pro jednotlivé části zadání odděleně.

a) pro s_0 = 30 m má kvadratická rovnice po dosazení zadaných veličin a krácení tvar:
$t^2 - 8t + 12 = 0$

- Kořeny této kvadratické rovnice jsou: $t_1 = 2$ s, $t_2 = 6$ s, oba tyto kořeny jsou reálné, ovšem fyzikální význam má jen první řešení vyjadřující dobu do střetu vozidel od počátku brždění osobního auta: $t = \mathbf{2}$ **s**. Po dosazení do vztahu pro uraženou vzdálenost (s_1 nebo s_2) získáváme místo střetu: $s =$ **50 m**.

- Okamžitá rychlost vozidel po dvou sekundách pohybu (do okamžiku srážky):
  $v_1 = 10$ m.s^{-1}, $v_2 =$ 20 m.s^{-1}
- Rozdíl rychlostí v okamžiku srážky: $\Delta v = v_2 - v_1 = 10$ m.s^{-1}

b) analogicky jako v předchozí části:

- Kvadratická rovnice má po dosazení zadaných veličin tvar: $t^2 - 8t + 16 = 0$, tato rovnice má jediný kořen označující okamžik střetu vozidel: $t =$ **4 s**, přičemž kolize nastane ve vzdálenosti $s =$ **80 m.**
- Rychlosti vozů v okamžiku srážky: $v_1 = 10$ m.s^{-1}, $v_2 =$ 10 m.s^{-1}
- Rozdíl rychlostí v okamžiku srážky: $\Delta v = v_2 - v_1 = 0$ m.s^{-1}, což značí, že se vozidla pouze dotknou a okamžitě se začnou od sebe vzdalovat (pokud osobní auto brzdí stále stejně).

c) analogicky jako v předchozí části:

- Kvadratická rovnice má po dosazení zadaných veličin tvar: $t^2 - 8t + 20 = 0$, tato rovnice nemá žádný reálný kořen $\Rightarrow$ vozy se nesrazí!

- Stanovíme, kdy budou vozidla nejblíže a jaká bude jejich vzájemná vzdálenost. Z podmínky extrému plyne kvadratická rovnice $t^2 - 8t + 20 = 0$.

- Extrém: hledáme body, ve kterých je první derivace rovna nule (tzv. stacionární body, body podezřelé z extrému)

1. derivace podle času: $2t - 8 = 0 \Rightarrow t = \mathbf{4}$ **s**

- Zda se jedná o minimum nebo maximum zjistíme z druhé derivace: je-li hodnota druhé derivace kladná, jedná se o námi hledané minimum: 2>0, platí!

- Závěr z této části příkladu tedy zní, že vozidla se nesrazí a nejblíže si budou v okamžiku 4 s od začátku brždění osobního automobilu, přičemž jejich vzájemná vzdálenost bude $s = s_2 - s_1$ = 10 m.

ZU 1.1.4.-9
Zrychlení pohybu hmotného bodu je rovno 0,3 m.s^{-2}. Určete, za jaký čas tento bod urazí první a desátý metr dráhy pohybu a jaká je rychlost pohybu po uražení prvních 10 m dráhy, pohybuje-li se hmotný bod rovnoměrně zrychleně z nulové počáteční rychlosti.

ZU 1.1.4.-10
Z jednoho místa vyrazí současně dva řidiči na motocyklech, jeden se pohybuje rovnoměrně zrychleně s počáteční rychlostí 2 m.s^{-1} a se zrychlením o velikosti 0,8 m.s^{-2}, druhý řidič rovnoměrně zpomaleně s počáteční rychlostí 8 m.s^{-1} a se zrychlením o velikosti 0,4 m.s^{-2}. Určete a) čas, ve kterém budou mít oba stejnou rychlost, b) čas, ve kterém urazí oba stejné dráhy, c) rychlost prvního motocyklu v okamžiku, kdy se druhý právě zastaví.

BU 1.1.4.-11
Z téhož místa vyjedou za sebou v časovém odstupu 15 s dvě auta. Obě se rozjíždějí z klidu a pohybují se rovnoměrně zrychleně, první se zrychlením 0,5 m.s^{-2} a druhé se zrychlením 2 m.s^{-2}. Vypočtěte, kdy a v jaké vzdálenosti dohoní druhé auto první a jaké jsou jejich rychlosti v okamžiku předjíždění.

BLP 1.1.4.-12
Kolikrát je rychlost střely na konci hlavně větší než v její polovině? Předpokládejme, že se střela pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem.

Řešení:

- Vypište z textu příkladu zadané a hledané veličiny.
- Vzdálenosti, které střela musí urazit do poloviny a na konec hlavně:

$$s_1 = \frac{1}{2}s, \quad s_2 = s$$

Rychlosti, kterými se střela pohybuje na konci těchto úseků: v_1, v_2

Hledaný poměr rychlostí: $\dfrac{v_1}{v_2}$

Předpokládejte, že pohyb střely v hlavni je rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí. Zapište obecné rovnice pro rychlost a dráhu tohoto pohybu na jednotlivých úsecích.

- $s_1 = \dfrac{1}{2}at_1^2 \wedge v_1 = at_1$, analogicky $s_2 = \dfrac{1}{2}at_2^2 \wedge v_2 = at_2$

Upravte vztahy pro dráhu s_1 a s_2 tak, aby byly vyjádřeny pomocí rychlosti, kterou střela získá na konci těchto úseků.

- $s_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_1^2}{a}$, $s_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_2^2}{a}$

Vyjádřete si rychlosti střely v jednotlivých úsecích.

- $v_1 = \sqrt{2as_1}$, $v_2 = \sqrt{2as_2}$

Stanovte hledaný poměr rychlostí.

- $\dfrac{v_2}{v_1} = \sqrt{\dfrac{2as_2}{2as_1}} = \sqrt{\dfrac{s}{\frac{s}{2}}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$

1.1.5. POHYB HMOTNÉHO BODU PO KRUŽNICI

SHRNUTÍ

- trajektorií hmotného bodu je kružnice
- zavádíme úhlové veličiny:

Úhlová dráha (úhel opsaný průvodičem): $\varphi = \dfrac{s}{R}$

jednotka: rad

Úhlová rychlost: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\varphi) = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

jednotka: rad.s^{-1}

směr: leží v ose rotace $\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$

orientace: na tu stranu, ze které vidíme směr otáčení kladně

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\qquad v = \omega r \sin\alpha = \omega R$

rychlost $\vec{v}$ nazýváme rychlostí **obvodovou** (postupnou)

Úhlové zrychlení: $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$

jednotka: rad.s^{-2}

směr: totožný se směrem úhlové rychlosti

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Tečné zrychlení: $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\varepsilon$

Normálové zrychlení: $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 = \omega v$

Celkové zrychlení: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

Perioda T (s): čas jednoho oběhu po kružnici $s = 2\pi R$

Frekvence f (Hz): počet oběhů za 1 s: $f = \dfrac{1}{T}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

KLASIFIKACE KRUHOVÝCH POHYBŮ DLE RYCHLOSTI

1. Rovnoměrný pohyb po kružnici:

$$v = konst \ , \vec{v} \neq \overrightarrow{konst} \ , \ \omega = konst \ , \vec{\omega} = \overrightarrow{konst}$$

$$a_t = 0, a_n \neq 0, a_n = \overrightarrow{konst} \ , \varphi = \int \omega dt = \varphi_0 + \omega t$$

2. Rovnoměrně zrychlený a zpomalený pohyb po kružnici:

$$a_t = konst, \vec{a}_t \neq konst \qquad \omega = \int \varepsilon dt = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varepsilon = konst, \vec{\varepsilon} = \overrightarrow{konst} \qquad \varphi = \int \omega dt = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \varepsilon t^2$$

3. Nerovnoměrně zrychlený a zpomalený pohyb po kružnici:

$$a_t \neq konst \qquad \omega = \omega(t) = \int \varepsilon(t) dt$$

$$\varepsilon \neq konst \qquad \varphi = \int \omega(t) dt$$

ZTO 1.1.5.-1

Hmotný bod se pohybuje rovnoměrně po kružnici. Poloměr kružnice je r, velikost úhlové rychlosti pohybu je ω.

I) Který z následujících vztahů pro velikost rychlosti hmotného bodu je správný?

a) $v = \omega r$ b) $v = \frac{\omega}{r}$ c) $v = \frac{r}{\omega}$ d) $v = \omega^2 r$

II) Který z následujících vztahů pro velikost zrychlení hmotného bodu je správný?

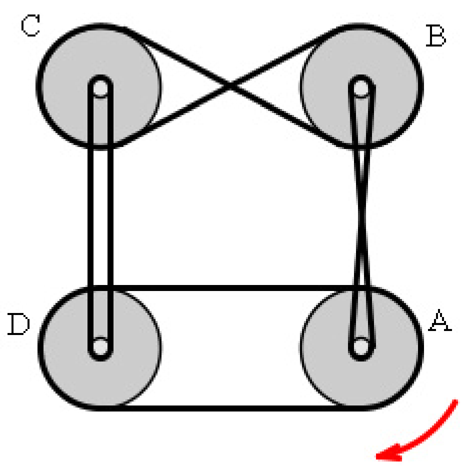
a) $a = \omega^2 r$ b) $a = \omega r^2$ c) $a = \frac{\omega^2}{r}$ d) zrychlení je nulové

III) Který z následujících vztahů pro oběžnou dobu hmotného bodu je správný?

a) $T = \frac{\omega}{2\pi}$ b) $T = 2\pi\omega$ c) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ d) $T = 2\pi\omega^2$

ZTO 1.1.5.-2

Kladky (řemenice) A, B, C, D na obrázku jsou spojeny převodovými řemeny.



OBR: 1.1.5.-1

I) Je-li při naznačeném spojení možný pohyb všech čtyř kladek, v jakém směru se budou jednotlivé kladky otáčet, je-li pohyb kladky A naznačen šipkou (ve směru hodinových ručiček)? Vyznačte správné možnosti:

a) B,C ve směru HR b) C,D ve směru HR c) B proti směru HR d)C,D proti směru HR

II) Je možný pohyb kladek, jsou-li všechny řemeny překříženy?

a) ano b) ne

III) Je možný pohyb, je-li překřížen jen jeden nebo tři řemeny?

a) ano b) ne

BTO 1.1.5.-3

V rovině je rozloženo jedenáct ozubených kol tak, že první kolo je zuby (ozubením) spojeno s druhým, druhé se třetím, … až jedenácté s prvním. Mohou se kola této soustavy otáčet a proč?

a) ano- kol je lichý počet b) ne- kol je lichý počet

ZTO 1.1.5.-4

Průměr kola nákladního auta je 1,2 m. Určete úhlovou rychlost otáčení kola, jede-li vůz rychlostí 2,4 $m.s^{-1}$.

a) 1 $rad.s^{-1}$ b) 2 $rad.s^{-1}$ c) 4 $rad.s^{-1}$ d) 8 $rad.s^{-1}$

BTO 1.1.5.-5

Rychlost bodů, které leží na obvodu rotujícího kotouče je 6 $m.s^{-1}$. Rychlost bodů, které leží o 20 cm blíže ose otáčení je 4 $m.s^{-1}$. Určete úhlovou rychlost kotouče.

ZTO 1.1.5.-6

Kolo o průměru 60 cm vykonává 1000 otáček za minutu. Určete dostředivé zrychlení bodů ležících na jeho obvodu.

ZTO 1.1.5.-7

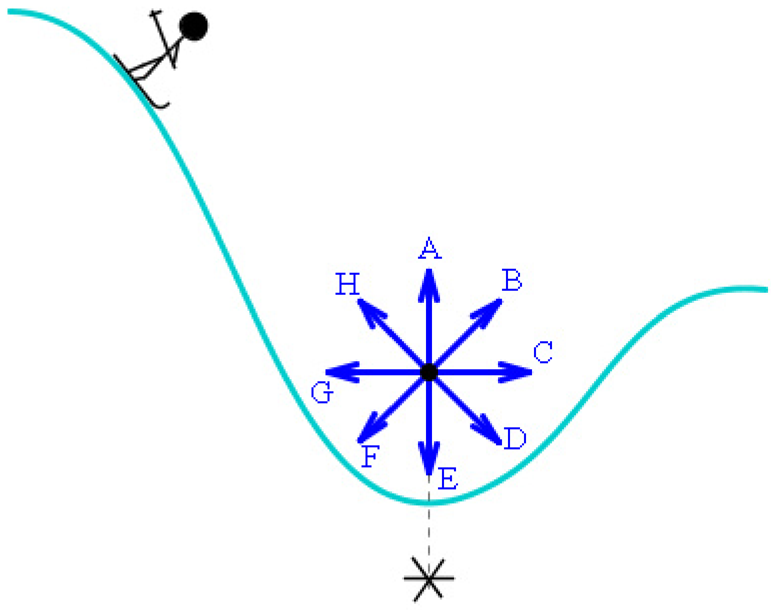
Jaký musí být poloměr kola, jestliže při jeho otáčivém pohybu má bod na obvodu třikrát větší rychlost jako bod, který je o 10 cm blíže k ose otáčení?

ZTO 1.1.5.-8

Jakou rychlostí se pohybuje stacionární družice Země, pokud je její vzdálenost od zemského povrchu 36000 km? Družice se pohybuje nad rovníkem. (Stacionární družice je družice, která se pohybuje stále nad stejným místem zemského povrchu.) Úhlová rychlost rotace Země je $7{,}29.10^{-5}$ $rad.s^{-1}$, poloměr Země 6378 km.

ZTO 1.1.5.-9

Lyžař jede z kopce, jeho trajektorie je nakreslena na obrázku. Která ze šipek označuje směr zrychlení lyžaře v nejnižším bodě označeném hvězdičkou? Předpokládejte, že pohyb lyžaře je v této části kopce rovnoměrný.



OBR: 1.1.5.-2

BTO 1.1.5.-10

Tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují po kružnicích o poloměrech r_1 a r_2 tak, že obě mají stejnou obvodovou rychlost v.

I) Jaký je poměr period $T_1 : T_2$ obou těles ?

a) $r_1 : r_2$ b) $r_2 : r_1$ c) 1 : 1 d) $m_1 : m_2$ e) $r_1.m_1 : r_2.m_2$

II) Jaký je poměr úhlových rychlostí $\omega_1 : \omega_2$ obou těles ?

a) $r_1 : r_2$ b) $r_2 : r_1$ c) 1 : 1 d) $m_1 : m_2$ e) $r_1.m_1 : r_2.m_2$

BTO 1.1.5.-11

Hmotný bod se pohybuje po kružnici s frekvencí 2 Hz. Zastaví se rovnoměrně zpomaleným pohybem za 1 s. Určete velikost úhlového zrychlení.

BTO 1.1.5.-12

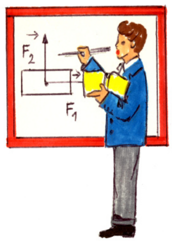
Hmotný bod se pohybuje po kružnici s počáteční úhlovou rychlostí 2 rad.s^{-1}. Za 5 s se jeho úhlová rychlost změní na 10 rad.s^{-1}. Určete velikost úhlového zrychlení za předpokladu, že pohyb je rovnoměrně zrychlený.

BU 1.1.5.-1

Hmotný bod se pohybuje po kružnici poloměru 5 m, přičemž velikost jeho rychlosti se mění podle rovnice: $v = t^2 + 1$ (m.s^{-1}, s). Určete velikost normálového zrychlení na konci druhé sekundy pohybu, velikost tečného zrychlení na konci druhé sekundy pohybu a velikost celkového zrychlení na konci druhé sekundy od začátku pohybu:

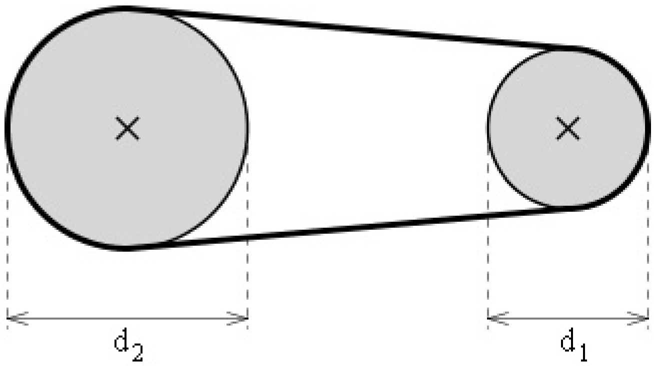
ZU 1.1.5.-2

Centrifuga pro výcvik kosmonautů má frekvenci otáčení 0,4 Hz. Poloměr kruhové dráhy sedačky je 9 m. Jaké je dosahované přetížení (tj. celkové zrychlení, kterým se kosmonaut pohybuje)?



BŘÚ 1.1.5.-3

Mějme dvě otáčivá kola spojená řemenem. Menší kolo o průměru 165 mm se otáčí s frekvencí 12,4 Hz a řemenovým převodem pohání kolo o průměru 850 mm. Určete a) rychlost pohybu řemenu, b) poměr poloměrů kol (tzv. převodový poměr), c) frekvenci hnaného kola.



OBR: 1.1.5.-3

Řešení:

$d_1 = 165$ mm = 0,165 m

$d_2 = 850$ mm = 0,850 m

$f_1 = 12{,}4$ Hz

- Obě kola jsou spojena řemenem, který vede po jejich obvodu (viz obr.). Řemenový pohon těsně přiléhá na obě kola, která se otáčejí bez prokluzování.
- Jelikož je řemen stejnoměrně napnut, netrhá se, rychlost pohybu libovolného bodu řemenu musí být stejná, jako rychlost bodů na obvodu jednotlivých řemenic.
- Platí tedy: $v_1 = v_2 \quad \wedge \quad \omega_1 \neq \omega_2$

a) stanovení rychlosti řemenu: $v = v_1 = v_2 = 2\pi f_1 r_1 = 2\pi f_1 \dfrac{d_1}{2} = \pi f_1 d_1$

….. po číselném dosazení 6,42 m.s^{-1}

b) převodový poměr je dán poměrem poloměrů (resp. průměrů) obou poháněných kol:

$$n = \frac{d_2}{d_1} = 5{,}15$$

c) Dosadíme-li do vztahu pro obvodovou rychlost závislost na frekvenci a poloměru otáčení: $2\pi f_1 r_1 = 2\pi f_2 r_2$ resp. pomocí zadaného průměru kol: $2\pi f_1 \dfrac{d_1}{2} = 2\pi f_2 \dfrac{d_2}{2}$

- Po úpravě: $f_1 d_1 = f_2 d_2 \quad \Rightarrow \quad f_2 = f_1 \dfrac{d_1}{d_2}$

….. po číselném dosazení 2,4 Hz

ZU 1.1.5.-4

Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici s poloměrem 0,5 m a s frekvencí 4 Hz. Určete obvodovou rychlost a tečné i normálové zrychlení hmotného bodu.

ZLP 1.1.5.-5

Šroubovým vrtákem se má vyvrtat 10 děr o průměru 30 mm a hloubce 50 mm. Vrták je z rychlořezné oceli, má frekvencí otáčení 4 Hz a posuv 0,125 mm na jednu otáčku. Vypočítejte dobu potřebnou k provedení úkolu, jsou-li vedlejší časy pro upínání součástí na jeden otvor 2 minuty.

Řešení:

- Vypište z textu příkladu zadané veličiny.
-

$n = 10$

$d = 30$ mm = 0,03 m

$h = 50$ mm = 0,05 m

$f = 4$ Hz

$p = 0{,}125$ mm = $1{,}25.10^{-4}$ m

$t_0 = 2$ min = 120 s

Stanovte celkový vedlejší čas potřebný pro všech 10 otvorů.

- Celkový vedlejší čas je $nt_0 = 1200$ s.

Zjistěte, kolik času je zapotřebí k vyvrtání jedné díry. Vyjděte z informace o posuvu 0,125 mm na jednu otáčku vrtáku.

- Dobu jedné otáčky charakterizuje perioda: $T = \dfrac{1}{f} = 0{,}25$ s.

Určete hloubku jednoho otvoru, kterou lze nahradit jako k-násobek posuvu vrtáku, čímž určíte počet otáček, které jsou nutné na jeho vyvrtání.

- $h = kp \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{h}{p} = 400$ otáček

Určete čas potřebný na jeden otvor a na všech deset otvorů.

- Na jeden otvor $t_1 = kT = 100$ s, na deset otvorů $t_{10} = nt_1 = 1000$ s.

Určete celkový čas potřebný ke splnění úkolu, nezapomeňte na přičtení vedlejšího času pro upínání součástí.

- Celkový čas nutný k provedení úkolu je tedy:

$t = nt_0 + nt_{10} = n(t_0 + t_{10}) = 2200$ s = 36 min 40 s

ZU 1.1.5.-6

Letadlo letí rychlostí 600 km.h^{-1}, vrtule letadla se otáčí úhlovou rychlostí 200 rad.s^{-1}. Jakou dráhu uletí letadlo během jedné otáčky vrtule?

BLP 1.1.5.-7

Kolo o poloměru 0,1 m se otáčí tak, že úhel otáčení závisí na čase vztahem $\varphi = A + Bt^3$, kde $A = 2$ rad, $B = 5$ rad.s^{-3}. Pro čas $t = 2$ s vypočtěte rychlost, tečné a normálové zrychlení bodů na obvodu kola a popište, o jaký pohyb se jedná.

Řešení:

- Vypište z textu příkladu zadané veličiny.
- $r = 0{,}1$ m

  $\varphi = 2 + 5t^3$

$t = 2$ s

Určete úhlovou rychlost hmotného bodu pomocí první derivace úhlové dráhy podle času a popište slovně charakter pohybu.

- $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 15t^2$ … nerovnoměrný pohyb

Určete úhlové zrychlení hmotného bodu pomocí druhé derivace úhlové dráhy podle času (tj. první derivace úhlové rychlosti podle času) a upravte slovní popis charakteru pohybu.

- $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 30t$ … nerovnoměrně zrychlený pohyb

Stanovte tečné zrychlení z první derivace obvodové rychlosti v čase. Obvodovou rychlost definujte pomocí rychlosti úhlové.

- $a_t = \dfrac{dv}{dt}$, kde $v = \omega r = 15t^2 r \Rightarrow a_t = \dfrac{d}{dt}\left(15t^2 r\right) = 30tr$

Dosazením času do vztahu pro obvodovou rychlost a tečné zrychlení vyjádřete okamžité hodnoty těchto veličin.

- $v_2(t = 2\text{s}) = 6\,\text{m.s}^{-1} \Rightarrow \quad a_t(t = 2\text{s}) = 6\,\text{m.s}^{-2}$

Stanovte normálové (dostředivé) zrychlení ze závislosti na obvodové rychlosti a poloměru trajektorie.

- $a_n = \dfrac{v^2}{r} = 15^2 t^4 r = 360\,\text{m.s}^{-1}$

BU 1.1.5.-8

Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru 0,2 m, závislost úhlové dráhy na čase je vyjádřena předpisem $\varphi = A + Bt + Ct^2$, kde $A = 6$ rad, $B = 4$ rad.s^{-1}, C = 2 rad.s^{-2}. Pro čas t = 0,5 s určete a) obvodovou rychlost hmotného bodu, b) tečné a c) normálové zrychlení, d) úhel α, který svírá průvodič bodu a vektor celkového zrychlení.

ZU 1.1.5.-9

Vlak se začne rozjíždět po kruhovém oblouku o poloměru 240 m tak, že má konstantní tečné zrychlení 0,2 m.s^{-2}. Vypočtěte jeho normálové a celkové zrychlení v čase 30 s od začátku pohybu.

BU 1.1.5.-10

Minutová ručička hodinek je třikrát delší než sekundová. V jakém poměru jsou velikosti rychlostí jejich koncových bodů?

ZU 1.1.5.-11

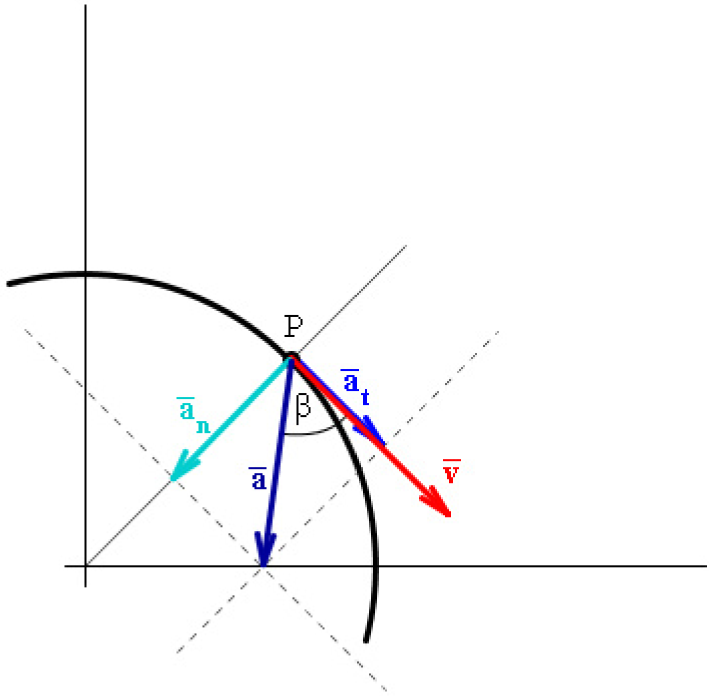
Hmotný bod koná pohyb po kružnici o poloměru 20 cm s konstantním úhlovým zrychlením 2 rad.s^{-2}. Vypočítejte velikost tečného, normálového a celkového zrychlení na konci 4. sekundy od začátku pohybu.

BU 1.1.5.-12

Ventilátor se otáčí s frekvencí 15 Hz. Za jakou dobu od vypnutí motoru se zastaví, vykoná-li ještě 75 otáček a je-li jeho pohyb rovnoměrně zpomalený?

BLP 1.1.5.-13

Hmotný bod se pohybuje po kružnici s konstantním úhlovým zrychlením 0,01 rad.s^{-2} a s nulovou počáteční rychlostí. Za jakou dobu od začátku pohybu bude celkové zrychlení hmotného bodu svírat se směrem jeho rychlosti úhel $\beta = 45°$?



OBR: 1.1.5.-4

Řešení:

- Vypište z textu úlohy zadané veličiny.
- $\varepsilon = 0{,}01$ rad.s^{-2}

  $\omega_0 = 0$

  $\beta = 45°$

  Stanovte z obrázku, které dva vektory svírají tentýž úhel (stejně jako vektor celkového zrychlení a vektor okamžité obvodové rychlosti).
- $\beta(\vec{v},\vec{a}) = \beta(\vec{a}_t,\vec{a})$, neboť vektor obvodové rychlosti a vektor tečného zrychlení leží na tečně k trajektorii, mají tedy stejný směr i orientaci.

Vyjádřete normálové zrychlení v závislosti na úhlovém zrychlení, čase a poloměru trajektorie.

- $\omega = \varepsilon t \ \wedge \ v = \omega r = \varepsilon t r$
- $a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{\varepsilon^2 t^2 r^2}{r} = \varepsilon^2 t^2 r$

Vyjádřete tečné zrychlení v závislosti na úhlovém zrychlení a poloměru trajektorie (def. jako první derivace obvodové rychlosti podle času).

- $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\varepsilon t r)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon r$

Určete poměr normálového a tečného zrychlení pomocí úhlu β.

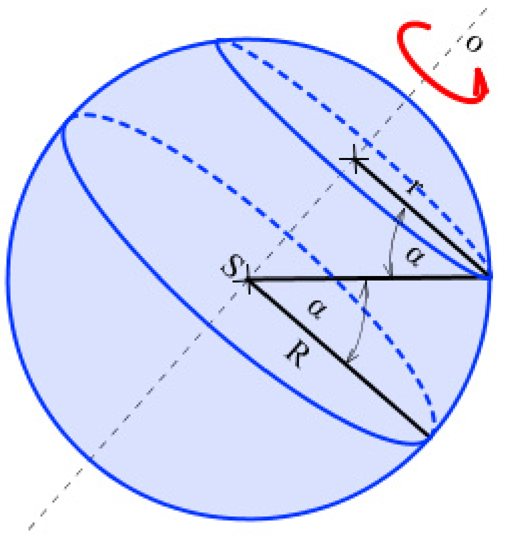
- $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{a_n}{a_t} = \dfrac{\varepsilon^2 t^2 r}{\varepsilon r}$

Z této rovnice vyjádřete neznámou veličinu – čas.

- $t = \sqrt{\dfrac{\mathrm{tg}\beta}{\varepsilon}} = 10\ \mathrm{s}$

BU 1.1.5.-14

Jaká je obvodová rychlost bodu během denní rotace Země, jestliže bod je a) na zemském rovníku, b) na 50°severní šířky? Úhlová rychlost rotace Země je $7{,}272.10^{-5}$ rad.s^{-1}, poloměr Země 6378 km, siderická doba rotace – doba jednoho otočení Země vůči vzdáleným hvězdám- 23 h 56 min 4 s.



OBR: 1.1.5-5

ZU 1.1.5.-15

Setrvačník o průměru 1 m koná 1000 otáček za minutu. Vypočtěte dráhu, kterou urazí bod na obvodu setrvačníku za čas 20 s a jeho obvodovou rychlost.

BU 1.1.5.-16

Kolo se roztáčí z klidu rovnoměrně zrychleně tak, že za prvních pět sekund vykoná 12,5 otáček. Určete jeho úhlovou rychlost na konci páté sekundy.

1.2. DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

1.2.1. SÍLA

SHRNUTÍ

SÍLA : vektor charakterizující **vzájemné působení** těles (resp. hmotných bodů), ozn. $\vec{F}$

: je určena velikostí, směrem a působištěm

: jednotka newton: N = kg.m.s^{-2}

Skládání sil:

- při působení více sil na hmotný bod (či na pevné těleso v jednom bodě) současně lze tyto síly nahradit silou jedinou se stejným pohybovým účinkem (vektorový rovnoběžník resp. silový mnohoúhelník), tzv. **výslednicí** dané soustavy sil

Interakce (vzájemné silové působení):

⇒ při vzájemném **dotyku** (náraz, výstřel, posunutí …)

⇒ prostřednictvím **jiných těles** (dvojice těles spojených pružinou …)

⇒ prostřednictvím silových **polí** (gravitační, magnetické…)

Účinky silového působení:

⇒ **deformace** (statické účinky síly)

⇒ změna **pohybového** stavu (dynamické účinky)

Pohybový stav hmotného bodu definuje veličina HYBNOST $\vec{p}$

- vektor mající směr totožný se **směrem okamžité rychlosti** hmotného bodu
- $\vec{p} = m\vec{v}$
- jednotka: kg.m.s^{-1}

Tíhová síla:

- je příčinou volného pádu těles (resp. hmotných bodů), popisuje silové působení tíhového pole Země na hmotná tělesa, má působiště v těžišti
- ozn. $\vec{F}_G = m\vec{g}$

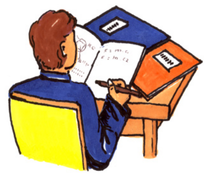
Tíha tělesa

- projevuje se jako tlaková resp. tahová síla, popisuje silové působení hmotného tělesa (resp. hmotného bodu) v tíhovém poli Země na vodorovnou podložku resp. svislý závěs, působiště leží ve styčné ploše tělesa s podložkou resp. se závěsem
- ozn. $\vec{G} = m\vec{g}$

Síla smykového tření

- vzniká při vzájemném pohybu dvou těles (resp. hmotných bodů), která jsou v neustálém styku

- ozn. $F_T = \mu F_n$, kde μ je součinitel smykového tření závisející pouze na materiálu tělesa a podložky a na vyhlazenosti obou ploch, F_n je normálová síla, kterou těleso působí na podložku



ZTO 1.2.1.-1

Předpokládejme, že vztažná soustava spojená s povrchem Země je inerciální. Uvažujme čtyři železniční vozy A, B, C, D. Vůz A stojí v klidu na kolejích, vůz B se rozjíždí rovnoměrně zrychleně po přímé trati, vůz C jede stálou rychlostí po přímé trati, vůz D projíždí zatáčkou rovnoměrným pohybem po kružnici.

I) Na které vozy působí síly tak, že jejich výslednice je nulová?

a) A b) A, B, C c) A, C d) A, C, D

II) Na které vozy působí síly tak, že jejich výslednice má stálou (nenulovou) velikost i stálý směr?

a) B, C b) B c) C d) D

III) Na které vozy působí síly tak, že jejich výslednice má stálou (nenulovou) velikost, ale její směr se neustále mění?

a) na žádný b) B c) C d) D

IV) Se kterými vozy můžeme spojit inerciální vztažné soustavy?

a) A b) A, B, C c) A, C d) A, C, D

ZTO 1.2.1.-2

Dvě tělesa o různých hmotnostech byla uvedena z klidu do pohybu jen vzájemným silovým působením, tj. akcí a reakcí.

I) Které z následujících tvrzení o hybnostech těchto těles je správné?

a) těleso s větší hmotností získalo větší hybnost
b) těleso s větší hmotností získalo menší hybnost
c) tělesa získala stejně velké hybnosti stejného směru
d) tělesa získala stejně velké hybnosti opačného směru

II) Které z následujících tvrzení o rychlostech těchto těles je správné?

a) těleso s větší hmotností získalo větší rychlost
b) těleso s větší hmotností získalo menší rychlost
c) tělesa získala stejně velké rychlosti stejného směru
d) tělesa získala stejně velké rychlosti opačného směru

ZTO 1.2.1.-3

Co mají společné tyto vektory: tíhová síla $\vec{F}_G$ a tíha tělesa $\vec{G}$?

a) směr b) orientaci c) působiště d) velikost

1.2.2. NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY

SHRNUTÍ

1. Newtonův pohybový zákon (zákon setrvačnosti):

„ Každé těleso setrvává v relativním klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém , dokud není přinuceno silovým působením jiných těles tento svůj pohybový stav změnit.“

$\vec{p} = m\vec{v} = \overrightarrow{konst}$, tj. $\vec{v} = \overrightarrow{konst}$ (včetně $\vec{v} = 0$), $\vec{a} = 0$

Inerciální vztažná soustava (IVS)

- vztažná soustava, v níž HB setrvává v klidu či v pohybu rovnoměrném přímočarém, pokud na něj nepůsobí jiná tělesa v soustavě, tj platí Newtonův zákon setrvačnosti
- jakákoliv změna pohybového stavu může nastat jen silovým působením jiných těles
- máme-li IVS, pak každá další vztažná soustava, která je vůči ní v klidu či v pohybu rovnoměrném přímočarém, je také inerciální
- inerciálních vztažných soustav je nekonečně mnoho
- vzájemný mechanický pohyb IVS má nulové zrychlení

Vztažné soustavy, ve kterých tyto vlastnosti neplatí, nazýváme **neinerciální**.

2. Newtonův pohybový zákon (zákon síly):

„ Časová změna hybnosti tělesa je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.“

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

v případě **konstantní hmotnosti** tělesa platí: $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$

mění-li se hmotnost tělesa platí:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\vec{a}$$

3. Newtonův pohybový zákon (zákon akce a reakce):

„Síly vzájemného působení dvou těles jsou stejně velké a opačného směru.“

Zákon zachování hybnosti:

a) pro izolovanou dvojici těles

„Celková změna hybnosti dvojice interagujících těles je nulová. Hybnost této soustavy těles se nezměnila.“

b) zobecnění pro izolovanou soustavu obsahující n těles (resp. n HB), které na sebe vzájemně působí: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = 0$$

Newtonova pohybová rovnice pro hmotný bod:

dle 2. NPZ: $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$ (kde $\vec{F}_i$ jsou síly působící na HB v dané vztažné soustavě) lze tuto vektorovou rovnici nahradit soustavou tří nezávislých rovnic **pro souřadnice**, z nichž lze určit pohyb tělesa vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic, známe-li okamžité souřadnice síly a počáteční podmínky:

$$ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x$$

$$ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y$$

$$ma_z = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z$$

Přímočarý pohyb

a) jestliže $F_x = F_y = F_z = 0$, pak platí $\vec{F} = m\vec{a} = \vec{o} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{o} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \overrightarrow{konst}$

…… hmotný bod setrvává v pohybu rovnoměrném přímočarém

b) jestliže $\vec{F} = m\vec{a} = \overrightarrow{konst} \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = \overrightarrow{konst}$

…… hmotný bod se pohybuje rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem

Neinerciální vztažné soustavy

- takové vztažné soustavy, které se vzhledem k libovolné IVS pohybují s **nenulovým zrychlením**
- působí zde síly **setrvačné,** které nemají původ v reálných tělesech uvnitř soustavy (ozn. síly zdánlivé, fiktivní)
- síly setrvačné mají směr **proti zrychlení** dané soustavy
- výsledná síla působící na těleso je rovna **vektorovému součtu** sil skutečných a sil setrvačných

Pohyb po křivočaré trajektorii

- zrychlení celkové lze rozložit na složku tečnou a normálovou
- analogicky i působící sílu rozložíme na dvě vzájemně kolmé složky:

tečná síla: $F_t = ma_t = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

normálová síla: $F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{R}$,

- normálová složka má směr do středu křivosti trajektorie $\Rightarrow$ **dostředivá síla**, kterou na pohybující se HB působí vazba nutící jej ke křivočarému pohybu
- dle 3. NPZ existuje reakce na tuto sílu $\Rightarrow$ **setrvačná síla**, kterou působí HB na vazbu

ZTO 1.2.2.-1

Na podlaze vagónu, který jede rovnoměrně po přímé trati, leží kulička. Tření mezi podlahou a kuličkou je zanedbatelně malé. V určitém okamžiku je vagón zabržděn a jeho pohyb se změní na rovnoměrně zpomalený.

I) Jak se od tohoto okamžiku bude kulička pohybovat vzhledem k vagónu?

a) rovnoměrně směrem k přední stěně vagónu
b) rovnoměrně směrem k zadní stěně vagónu
c) rovnoměrně zrychleně směrem k přední stěně vagónu
d) rovnoměrně zrychleně směrem k zadní stěně vagónu

II) Jak se bude kulička pohybovat vzhledem k povrchu Země?

a) rovnoměrně ve směru jízdy vagónu
b) rovnoměrně proti směru jízdy vagónu
c) rovnoměrně zrychleně ve směru jízdy vagónu
d) rovnoměrně zrychleně proti směru jízdy vagónu

BTO 1.2.2.-2

Automobil přejíždí po mostě vypuklého tvaru.

I) Vztažná soustava spojená s povrchem Země je:

a) inerciální b) neinerciální c) nelze rozhodnout

II) Vztažná soustava spojená s vozidlem je:

a) inerciální b) neinerciální c) nelze rozhodnout

III) V systému spojeném s vozem je jeho pohyb:

a) klid b) rovnoměrný přímočarý c) rovnoměrný křivočarý
d) rovnoměrně zrychlený přímočarý e) rovnoměrně zrychlený křivočarý

ZTO 1.2.2.-3

Těleso o hmotnosti 10 kg leží na podlaze kabiny výtahu. Předpokládejte, že tíhové zrychlení má velikost 10 $m.s^{-2}$.

I) Jak velkou silou působí těleso na podlahu kabiny, rozjíždí-li se kabina směrem dolů se zrychlením o velikosti 2 $m.s^{-2}$?

a) 20 N b) 80 N c) 100 N d) 120 N

II) Jak velkou silou působí těleso na podlahu kabiny, rozjíždí-li se kabina směrem vzhůru se zrychlením o velikosti 2 $m.s^{-2}$?

a) 20 N b) 80 N c) 100 N d) 120 N

ZTO 1.2.2.-4

Těleso o hmotnosti 10 kg je zavěšeno na siloměru v kabině výtahu. Předpokládejte, že tíhové zrychlení má velikost 10 $m.s^{-2}$. Určete, jakou sílu ukazuje siloměr, pohybuje-li se výtah:

I) stálou rychlostí?

a) 10 N b) 100 N c) 1000 N d) 0 N

II) se zrychlením 4 $m.s^{-2}$ směrem vzhůru?

a) 40 N b) 60 N c) 100 N d) 140 N

III) se zrychlením 4 $m.s^{-2}$ směrem dolů?

a) 40 N b) 60 N c) 100 N d) 140 N

ZTO 1.2.2.-5

O jaké změně v pohybu vlaku svědčí náhlý samovolný pohyb zasouvacích dveří v kupé?

I) pohyb dveří ve směru jízdy vlaku:

a) zrychlený pohyb b) zpomalený pohyb

II) pohyb dveří proti směru jízdy vlaku:

a) zrychlený pohyb b) zpomalený pohyb

ZTO 1.2.2.-6

Popište pohyb tělesa, na které působí vnější síly, jejichž výslednice je:

I) $\vec{F} = \vec{0}$

a) rovnoměrný přímočarý b)rovnoměrný křivočarý c) klid
d) rovnoměrně zrychlený přímočarý e) rovnoměrně zrychlený křivočarý
f) žádná z možností

II) $\vec{F} = \overrightarrow{konst}$

a) rovnoměrný přímočarý b)rovnoměrný křivočarý c) klid
d) rovnoměrně zrychlený přímočarý e) rovnoměrně zrychlený křivočarý
f) žádná z možností

III) $\vec{F} = kt\vec{i}$, kde $k = konst$

a) rovnoměrný přímočarý b)rovnoměrný křivočarý c) klid
d) rovnoměrně zrychlený přímočarý e) rovnoměrně zrychlený křivočarý
f) žádná z možností

IV) $\vec{F} \neq \overrightarrow{konst}, F = konst$

a) rovnoměrný přímočarý b)rovnoměrný křivočarý c) klid
d) rovnoměrně zrychlený přímočarý e) rovnoměrně zrychlený křivočarý
f) žádná z možností

ZTO 1.2.2.-7
Chlapec tlačí po vodorovné podlaze bednu o hmotnosti 40 kg. Na bednu působí třecí síla o velikosti 80 N. Předpokládejte, že tíhové zrychlení má velikost 10 m.s^{-2}.
I) Jak velký je součinitel smykového tření mezi bednou a podlahou?

a) 0,2 b) 0,4 c) 0,5 d) 0,8

II) Jak velkou vodorovnou silou působí chlapec na bednu, pohybuje-li se bedna rovnoměrně zrychleně se zrychlením o velikosti 0,5 m.s^{-2}?

a) 20 N b) 60 N c) 100 N d) 400 N

ZTO 1.2.2.-8
Jaká společná příčina spojuje tyto jevy?
I) Nasazení sekery na topůrko opakovaným klepnutím násady na tvrdou podložku.
II) Pád dopředu při klopýtnutí.
III) Pád dozadu při uklouznutí.

a) gravitace b) setrvačnost c) dostředivá či odstředivá síla

ZTO 1.2.2.-9
Rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb vykonává těleso, na které po dobu pohybu:

a) působí stálá síla proti směru rychlosti tělesa
b) působí stálá síla ve směru rychlosti tělesa
c) nepůsobí žádná síla
d) působí rovnoměrně klesající síla

ZTO 1.2.2.-10
Těleso, které bylo na počátku v klidu, se začalo pohybovat působením stálé síly 20 N rovnoměrně zrychleně a urazilo přitom za dobu 10 s dráhu 25 m. Jakou hmotnost mělo těleso?

ZTO 1.2.2.-11
Vagónu o hmotnosti 16 t byla udělena počáteční rychlostí 36 km.h^{-1} , poté se vagón pohyboval rovnoměrně zpomaleně až do úplného zastavení, přičemž urazil dráhu 0,5 km. Určete velikost stálé brzdící síly, která působila proti směru jeho pohybu.
[1,6.10^{3} N]

BTO 1.2.2.-12
Těleso hmotnosti 1 kg se pohybuje přímočaře rychlostí o velikosti $v = 2t^2 + 3t + 2$. Určete sílu, která tento pohyb způsobuje.

BTO 1.2.2.-13
Na těleso hmotnosti 2 kg, které je na počátku v klidu, začne působit síla o velikosti $F = 4t - 1$, jejíž směr je konstantní.
I) Jaká je rychlost tohoto tělesa ve čtvrté sekundě ?
II) Jaká je rovnice závislosti zrychlení tohoto tělesa na čase?

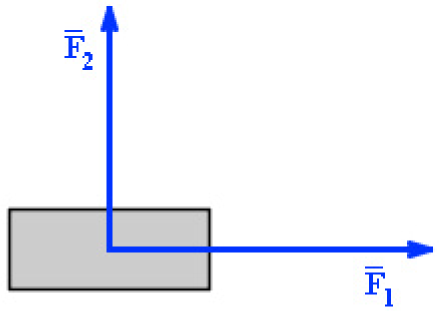
III) Jakou dráhu urazí těleso za tři sekundy od začátku působení síly?

ZTO 1.2.2.-14

Silou 60 N je možné udělit tělesu zrychlení 0,8 $m.s^{-2}$. Jak velká síla uděluje témuž tělesu zrychlení 2 $m.s^{-2}$?

ZTO 1.2.2.-15

Na těleso o hmotnosti 10 kg působí v jednom bodě dvě stálé síly, které jsou vzájemně kolmé a mají velikosti 3 N a 4 N. Určete výsledné zrychlení tělesa, působí-li tyto síly současně.



OBR. 1.2.2.-1

ZTO 1.2.2.-16

Určete, jak velká tahová síla musí působit na vozidlo a jaké bude jeho zrychlení, chceme-li, aby za čas 20 s dosáhlo vozidlo rychlosti 100 $km.h^{-1}$. Tíha vozidla je 12000 N. Na počátku bylo vozidlo v klidu. Odporové síly působící na vůz neuvažujte.

BTO 1.2.2.-17

Na čem nezávisí síla smykového tření?

a) hmotnosti b) tíze tělesa c) normálové tlakové síle do podložky
d)součiniteli smykového tření e) velikosti styčných ploch f) charakteru styčných ploch

ZU 1.2.2.-1

Auto o hmotnosti 1400 kg se rozjíždí po rovné silnici. Na dráze délky 1000 m dosáhne rychlosti v. Na auto působí motor tažnou silou o velikosti 1700 N a proti pohybu odporová síla prostředí o velikosti 100 N. Zjistěte zrychlení auta a jeho rychlost, kterou získá po projetí celé dráhy.

ZU 1.2.2.-2

Na jak dlouhé vodorovné dráze dosáhne vůz hmotnosti 800 kg rychlosti 45 $km.h^{-1}$, působí-li na něj motor konstantní silou 2 kN. Odpor prostředí zanedbáváme.

ZU 1.2.2.-3

Jaká je nejkratší vzdálenost, na které může zastavit automobil jedoucí po vodorovné silnici rychlostí 72 $km.h^{-1}$, je-li součinitel smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou 0,3?

BU 1.2.2.-4

Dvě tělesa o hmotnostech 2 kg a 3 kg se nacházejí na vodorovné dokonale hladké podložce a jsou spojena nehmotným lanem. Na jedno z těles působí ve vodorovném směru síla 10 N. Určete, a) jaké zrychlení síla tělesům udílí, b) jakou silou je napjato lano mezi tělesy.

ZU 1.2.2.-5

Určete maximální sílu, která působí na pilota o hmotnosti 70 kg v proudovém letadle, které při rychlosti 720 km.h^{-1} opisuje kružnici o poloměru 2 km ve svislé rovině.

ZU 1.2.2.-6

Automobil o hmotnosti 1000 kg jede po vypuklém mostě rychlostí 72 km.h^{-1}. Poloměr křivosti mostu je 100 m. Určete a) sílu, kterou působí automobil na most v okamžiku, kdy projíždí jeho středem, b) sílu, kterou působí ve stejném místě most na dané vozidlo, c) jakou rychlostí by se musel vůz pohybovat, aby na mostě „nadskočil“?

BLP 1.2.2.-7

Vozidlo projíždí vodorovnou neklopenou zatáčku o poloměru křivosti 120 m rychlostí 20 m.s^{-1}. Určete a) minimální hodnotu součinitele smykového tření, aby auto nedostalo smyk, b) o jaký úhel by měla být vozovka pro tuto rychlost odkloněna (bezpečí před smykem i s nulovým třením).

Řešení:

- Vypište z textu úlohy zadané veličiny.
- $r = 120$ m
  $v = 20$ m.s^{-1}

Vozidlo se pohybuje po křivočaré trajektorii, pohybuje se tedy se zrychlením (dostředivé, normálové zrychlení). Při tomto pohybu na těleso působí v neinerciální soustavě setrvačná síla $\vec{F}_s$, která má směr proti zrychlení, tj. od středu křivosti („vynáší“ vozidlo ze zatáčky). Určete tuto sílu.

- Velikost setrvačné síly je $F_s = m\dfrac{v^2}{r}$.

Proti setrvačné síle působí síla smykového tření mezi pneumatikami a povrchem silnice. Určete její velikost (normálovou silou je síla tíhová, neboť pohyb se děje ve vodorovné rovině).

- Velikost smykového tření je: $F_t = \mu F_N = \mu m g$

  Jsou-li tyto síly vyrovnány, jedná se o mezní okamžik, kdy ještě vůz na tomto povrchu nedostane smyk. Porovnejte tyto síly a vyjádřete z rovnice součinitel smykového tření.

- $F_t = F_s \;\Rightarrow\; m\dfrac{v^2}{r} = \mu m g \;\Rightarrow\; \dfrac{v^2}{r} = \mu g$

$\mu = \dfrac{v^2}{rg}$ … po číselném dosazení $\mu = 0{,}35$

- Pro stanovení úhlu odklonu vozovky použijte poměr setrvačné a tíhové síly.
- Odklon vozovky je $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{F_S}{F_G} = \dfrac{v^2}{rg} = 0{,}33 \Rightarrow \alpha = 20°$

BU 1.2.2.-8

Jakou maximální rychlostí může jet po vodorovném povrchu motocyklista, opisuje-li oblouk o poloměru 100 m a je-li součinitel smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou 0,4? O jaký úhel se musí odklonit od svislého směru?

1.2.3. HYBNOST A IMPULZ SÍLY

SHRNUTÍ

Hybnost $\vec{p}$

- dynamická veličina popisující pohybový stav soustavy
- na rozdíl od rychlosti zahrnuje i setrvačné vlastnosti hmotného bodu (hmotnost m)
- vektor mající směr totožný se **směrem okamžité rychlosti** hmotného bodu
- $\vec{p} = m\vec{v}$
- jednotka: kg.m.s^{-1}

Impulz síly (charakterizuje časový účinek síly): $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t$

v případě konstantní síly platí:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = \vec{F} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = \vec{F}\left(t_2 - t_1\right) = \vec{F} \Delta t$$

dle 2. NPZ:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}(m\vec{v}) = \left[m\vec{v}\right]_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{I} = \Delta\vec{p}$$

jednotka: N.s

ZTO 1.2.3.-1

Na těleso o hmotnosti 2 kg působí v inerciální vztažné soustavě stálá síla, jejíž velikost je 4 N.

I) Jak velké zrychlení uděluje tato síla tělesu?

a) 0,5 m.s^{-2} b) 2 m.s^{-2} c) 4 m.s^{-2} d) 8 m.s^{-2}

II) Jak velkou hybnost má těleso v okamžiku, kdy je jeho rychlost 4 m.s^{-1}?

a) 2 kg.m.s^{-1} b) 4 kg.m.s^{-1} c) 8 kg.m.s^{-1} d) 16 kg.m.s^{-1}

III) Jak velký je impuls síly, působí-li na těleso po dobu 4 s?

a) 1 N.s b) 4 N.s c) 8 N.s d) 16 N.s

ZTO 1.2.3.-2

Střela o hmotnosti 0,01 kg proletěla hlavní pušky za 0,02 s a nabyla rychlosti 600 m.s^{-1}. Před výstřelem byla puška se střelou v klidu.

I) Jak velká konstantní síla působila při výstřelu na střelu?

a) 2400 N b) 1200 N c) 60 N d) 300 N

II) Jak velkou rychlostí se při výstřelu začne pohybovat puška, není–li upevněna a je-li její hmotnost 6 kg?

a) 1 m.s^{-1} b) 6 m.s^{-1} c) 12 m.s^{-1} d) 600 m.s^{-1}

III) Jak velká je celková hybnost pušky se střelou po výstřelu?

a) 36 kg.m.s^{-1} b) 12 kg.m.s^{-1} c) 6 kg.m.s^{-1} d) 0 kg.m.s^{-1}

BTO 1.2.3.-3

Tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují po kružnicích o poloměrech r_1 a r_2 tak, že obě mají stejnou obvodovou rychlost v. Jaký je poměr hybností $p_1 : p_2$ obou těles ?

a) $r_1 : r_2$ b) $r_2 : r_1$ c) 1 : 1 d) $m_1 : m_2$ e) $r_1.m_1 : r_2.m_2$

BTO 1.2.3.-4

Na těleso jednotkové hmotnosti působí síla $F = 4t - 1$ (N, s). Jakou změnu hybnosti způsobí během prvních dvou sekund pohybu, bylo-li těleso na počátku v klidu?

ZTO 1.2.3.-5

Těleso hmotnosti 40 g se začíná pohybovat rovnoměrně zrychleně se zrychlením 2 m.s^{-2}. Jak velkou hybnost bude mít těleso na konci páté sekundy pohybu?

BU 1.2.3.-6

Síla působící na těleso o hmotnosti 1 kg vzrůstá podle vztahu $F = 10 + 2t$ (N, s).

I) Jaký impuls udělí tato síla tělesu od druhé do třetí sekundy?

a) 15 N.s^{-1} b) 15 N.s c) 30 N.s^{-1} d) 30 N.s

II) Jaká bude rychlost tělesa na konci druhé sekundy, byla-li jeho počáteční rychlost 3 m.s^{-1}.

a) 14 m.s^{-1} b) 22 m.s^{-1} c) 27 m.s^{-1} d) 33 m.s^{-1}

ZU 1.2.3.-1

Kopacímu míči o hmotnosti 100 g byla kopnutím udělena rychlost 10 m.s^{-1}. Jaká průměrná síla na něj působila, jestliže náraz nohy do míče trval 0,01 s?

ZU 1.2.3.-2

Střela o hmotnosti 10 g, pohybující se rychlostí 200 m.s^{-1}, prorazila dřevěnou desku do hloubky 4 cm. Za předpokladu, že pohyb střely v desce je rovnoměrně zpomalený, určete dobu, po kterou se střela v desce pohybovala a velikost síly, kterou působila deska na střelu.

BLP 1.2.3.-3

Na jednom konci loďky o délce 5 m, stojící na klidné vodě, stojí člověk. O kolik se posune loďka po hladině, přejde-li člověk na druhý konec loďky? Hmotnost člověka 60 kg, hmotnost loďky 140 kg.

Řešení:

- Z textu úlohy vypište zadané veličiny.
- $m_1 = 60$ kg
  $m_2 = 140$ kg
  $l = 5$ m

Loďka s člověkem tvoří izolovanou soustavu hmotných bodů, ve které platí zákon zachování hybnosti. Zapište jej.

- $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$, kde v_1 je rychlost člověka, v_2 rychlost loďky na vodě.

Vyjádřete obecně dráhu l, kterou urazí člověk přecházející po loďce a dráhu d, kterou urazí loďka na vodě.

- $l = v_1 t$, $d = v_2 t$, kde t je doba pohybu člověka na loďce a loďky na vodě

Dosaďte do zákona zachování hybnosti za neznámé rychlosti v_1 a v_2 z rovnic pro dráhu.

- $$m_1 \frac{l}{t} = (m_1 + m_2) \frac{d}{t}$$

Z této rovnice vyjádřete neznámou hledanou veličinu d

- $$d = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$$

… po číselném dosazení 1,5 m

BU 1.2.3.-4

Určete, jakou rychlostí se začne pohybovat střelec, který stojí na velmi hladké ledové kře, po výstřelu z pušky. Hmotnost střelce s puškou je 75 kg, hmotnost střely 10 g, počáteční rychlost střely je 400 $m.s^{-1}$.

ZU 1.2.3.-5

Dvě nepružné, plastické koule o hmotnostech 3 kg a 5 kg se pohybují po téže přímce týmž směrem rychlostmi 3 $m.s^{-1}$ a 1 $m.s^{-1}$. Jaké budou mít tyto koule rychlost, pokud se při srážce spojí a budou se pohybovat jako jeden celek?

ZU 1.2.3.-6

Na vozíku hmotnosti 10 kg stojí chlapec o hmotnosti 45 kg. Vozík se pohybuje rychlostí 2 $m.s^{-1}$. Chlapec během jízdy vyhodí z vozíku kámen o hmotnosti 0,6 kg ve směru jízdy pod elevačním úhlem 30° rychlostí 10 $m.s^{-1}$ vzhledem k Zemi. Jaká bude po vyhození kamene rychlost vozíku i s chlapce? Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

1.3. MECHANICKÁ PRÁCE A ENERGIE

SHRNUTÍ

Energie – skalár, charakterizuje formy pohybu hmoty

Mechanická energie – charakterizuje mechanický pohyb těles (resp. hmotných bodů, soustav hmotných bodů) a jejich vzájemné silové působení

Přenos energie $\Rightarrow$ z tělesa na těleso
$\Rightarrow$ **přeměna** jednotlivých forem

Práce: Děj, který je spojen s přenosem a přeměnou energie je spojen s konáním práce.
$\Rightarrow$ míra změny energie je mechanická práce

1.3.1 MECHANICKÁ PRÁCE, VÝKON, ÚČINNOST

SHRNUTÍ

„Těleso koná mechanickou práci, jestliže působí silou na jiné těleso, které se působením této síly přemisťuje po určité trajektorii.“

Elementární vykonaná práce: $\mathrm{d}W = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}W = F\mathrm{d}s\cos\alpha$

celková práce: $$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$

jednotka: N.m = kg.m^2.s^{-2} = J … joule

Výkon

- **průměrný** výkon: $P_P = \dfrac{W}{\Delta t}$, kde W je práce síly v intervalu Δt
- **okamžitý** výkon: $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{W}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v} \Rightarrow P = Fv\cos\alpha$$

jednotka: J.s^{-1} = kg.m^2.s^{-3} = W … watt

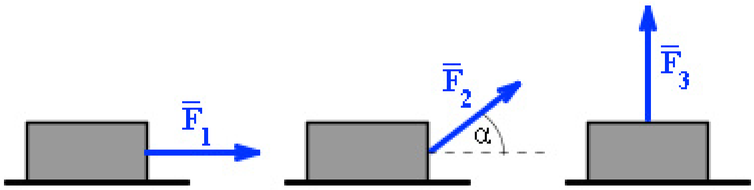
Účinnost

$\eta = \dfrac{W}{W_0} = \dfrac{P_V}{P_P} \quad \Rightarrow \quad \eta = \dfrac{P_V}{P_P} \times 100\%$

- podíl užitečné práce W (skutečně vykonané) a práce W_0, kterou by stroj měl vykonat na základě dodané energie
- podíl užitečného výkonu a dodaného výkonu (příkonu)

ZTO 1.3.1.-1

Tři tělesa se pohybují po vodorovné podlaze. Na tělesa působí stejně velké síly, které se liší navzájem směrem a orientací, jak je patrné z obrázku. Tělesa působením těchto sil urazí stejné dráhy.



OBR. 1.3.1.-1

I) Která síla vykoná největší práci?

a) $\vec{F}_1$ b) $\vec{F}_2$ c) $\vec{F}_3$ d) všechny síly vykonají stejnou práci

II) Která síla vykoná nulovou práci

a) $\vec{F}_1$ b) $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_3$ c) $\vec{F}_3$ d) žádná

III) Pro kterou sílu můžeme práci vypočítat dle vztahu $W = F\,s$?

a) $\vec{F}_1$ b) $\vec{F}_3$ c) pro všechny d) pro žádnou

IV) Podle kterého z následujících vztahů vypočteme práci síly $\vec{F}_2$?

a) $W = F\,s$ b) $W = Fs\cos\alpha$ c) $W = F\,s\sin\alpha$ d) $W = \frac{F}{s}\cos\alpha$

BTO 1.3.1.-2

Jak velkou práci vykoná síla $\vec{F} = 5\vec{i}$, jejíž působiště se pohybuje po křivce $\vec{r} = 3t^2\vec{j}$?

a) $15t^2$ b) $15t^2\vec{i}\vec{j}$ c) 0 J d) 15 J

BTO 1.3.1.-3

Jak velkou práci vykoná síla F = 5 N působící ve směru osy x při přemístění tělesa z bodu O[0 m,0 m] do bodu B[10 m,0 m]?

BTO 1.3.1.-4

Jak velkou práci vykoná síla $F = 2x$ (m, s) při přemístění tělesa z místa o souřadnici $x_1 = 1$ m do místa o souřadnici $x_2 = 3$ m ?

ZTO 1.3.1.-5

Elektromotor má stálý výkon P a účinnost η.

I) Jak vypočteme jeho příkon?

a) $P_P = \eta P$ b) $P_P = \frac{P}{\eta}$ c) $P_P = \frac{\eta}{P}$ d) $P_P = (1-\eta)P$

II) Jakou práci vykoná elektromotor za dobu t ?

a) $W = \eta P t$ b) $W = \frac{P}{t}$ c) $W = \frac{P}{\eta}t$ d) $W = Pt$

ZTO 1.3.1.-6

Účinnost stroje je:

a) výkon stroje za 1 s,
b) celková práce, kterou stroj je schopen vykonat,
c) práce, kterou stroj vykoná za 1 s,
d) poměr dodané práce k práci strojem vykonané.

BTO 1.3.1.-7

V energetice se často používá jednotka kilowathodina (ve zkratce kWh)

I) Jedná se o jednotku

a) práce b) výkonu c) účinnosti d) příkonu

II) Vyjádřete tuto jednotku v jiném tvaru

a) 3600 W b) $3{,}6.10^3$ Wh c) 1000 Ws d) $3{,}6.10^5$ Ws d)36.10^5 J

ZTO 1.3.1.-8

$m^2.kg.s^{-2}$ je vyjádřením jednotky:

a) síly b) výkonu c) práce d) tlaku

ZTO 1.3.1.-9

Čerpadlo vyčerpá 2000 kg vody za 1 minutu z dolu hlubokého 30 m.

I) Jak velkou práci přitom čerpadlo vykoná?

II) S jak velkým průměrným výkonem čerpadlo pracuje?

BU 1.3.1.-1

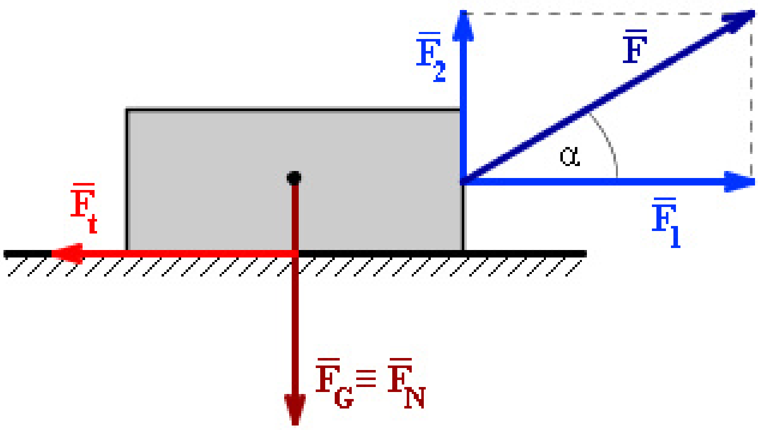
Jak velkou práci vykoná za první dvě sekundy síla $\vec{F} = t^2\vec{i} + \vec{j}$, jejíž působiště se pohybuje po křivce $\vec{r} = t^3\vec{j}$?

BU 1.3.1.-2

Určete práci, kterou vykonáme při přemístění tělesa rovnoměrným přímočarým pohybem po vodorovné podložce do vzdálenosti 10 m. Hmotnost břemene je 85 kg, součinitel smykového tření mezi tělesem a podložkou je 0,08.

BLP 1.3.1.-3

Jak velkou práci je zapotřebí vykonat, abychom odtáhli za provaz bednu o hmotnosti 50 kg po vodorovné podlaze do vzdálenosti 6 m. Provaz svírá se směrem posunutí úhel 30°. Součinitel smykového tření mezi bednou a podlahou je 0,3.



OBR. 1.3.1.-2

Řešení:

- Vypište z textu úlohy zadané veličiny.
- $m = 50$ kg
  $s = 6$ m
  $\alpha = 30°$
  $\mu = 0{,}3$
  Popište všechny síly (dle obrázku), které na těleso při pohybu působí.
- Působící síly: $\vec{F}_G$ …tíhová (současně normálová), $\vec{F}_t$ … třecí, $\vec{F}$ … tažná, pro kterou platí: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Vyjádřete velikosti složek tažné síly F_1 a F_2.

- $F_1 = F\cos\alpha$ … koná práci, $F_2 = F\sin\alpha$ … těleso při přenášení nadlehčuje

Definujte sílu smykového tření pomocí normálové tlakové síly. Nezapomeňte na složku F_2 tažné síly, která působí proti síle tíhové!

- $F_t = \mu F_N$, kde tlakovou (normálovou) silou, kterou působí těleso na podložku, je výslednice sil: tíhové $\vec{F}_G$ a složky tažné síly, která těleso nadlehčuje $\vec{F}_2$

$\Rightarrow$ $F_t = \mu(F_G - F_2) = \mu(mg - F\sin\alpha)$

Aby se jednalo o pohyb rovnoměrný, musí být výslednice všech sil rovna nule. Porovnejte tyto síly vektorově i velikostně.

- $\vec{F}_t = -\vec{F}_1$, pro velikosti platí $F_t = F_1$

Dosaďte za třecí sílu a sílu $\vec{F}_1$.

- $F\cos\alpha = \mu mg - \mu F\sin\alpha$

Vyjádřete z rovnice hledanou sílu.

- $F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu mg \Rightarrow F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$

Vyjádřete pomocí této síly složku F_1, která koná práci a velikost vykonané práce.

- práci koná síla $F_1 = F\cos\alpha = \dfrac{\mu mg\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \dfrac{\mu mg}{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha}$

Vypočtěte celkovou vykonanou práci.

- celková vykonaná práce $W = F_1 s = \dfrac{\mu mgs}{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha}$ … po číselném dosazení 0,77 kJ

ZU 1.3.1.-4

Jaký je průměrný výkon jeřábu, který zvedá břemeno o hmotnosti 10 t do výšky 6 m za dobu 2 min?

ZU 1.3.1.-5

Těleso o hmotnosti 1 kg padá z výšky 240 m počáteční rychlostí 14 m.s^{-1} a vnikne v písku do hloubky 0,2 m. Určete průměrnou odporovou sílu, kterou písek působí na těleso. Odpor vzduchu zanedbáváme.

ZU 1.3.1.-6

Vlak hmotnosti 10^6 kg se rozjíždí z klidu a za 60 s dosáhne rychlosti 50 $km.h^{-1}$. Jakou práci musí vykonat stroj a jaký je jeho průměrný výkon?

ZU 1.3.1.-7

Lokomotiva o hmotnosti 100 t se pohybuje rychlostí 20 $m.s^{-1}$. V určitém okamžiku se začne pohybovat rovnoměrně zpomaleně se zrychlením o velikosti 1 $m.s^{-2}$. Jakou práci vykoná brzdná síla až do úplného zastavení lokomotivy? Jaký je okamžitý výkon brzdící síly na začátku zpomaleného pohybu? Jaký je průměrný výkon této síly během celého brždění?

1.3.2 MECHANICKÁ ENERGIE

SHRNUTÍ

Kinetická energie E_k

- skalární veličina charakterizující pohybový stav HB či tělesa vzhledem ke zvolené IVS
- míra schopnosti pohybujících se těles konat práci: $W = \Delta E_k$
- $\frac{1}{2}mv^2 = E_K$

Potenciální energie E_p

- polohová energie tělesa (hmotného bodu) v silovém poli jiného tělesa (hmotného bodu)
- předpokládejme, že v určité oblasti prostoru máme v každém bodě definovánu sílu, která působí na těleso v tomto bodě $\Rightarrow$ def. **silové pole**
- $W = -\Delta E_p$

Tíhová potenciální energie (potenciální energie v tíhovém poli Země)**:**

$$E_P = mgh$$

Nulová hladina potenciální energie: $E_P = 0$ na povrchu Země, tj. pro $h = 0$

$$W = -mgh = -(mgh_2 - mgh_1) = -\Delta E_P$$

Zákon zachování mechanické energie

$$E_K + E_P = konst = E$$

Pozn.: Ryze mechanické děje: neobjevují se jiné formy energie … prakticky neexistují

ZTO 1.3.2.-1

Ve vagónu, který jede po přímé trati rychlostí 6 $m.s^{-1}$, bylo ve směru jízdy vrženo těleso o hmotnosti 2 kg rychlostí 4 $m.s^{-1}$ vzhledem k vagónu.

I) Jakou kinetickou energii má těleso vzhledem k vagónu?

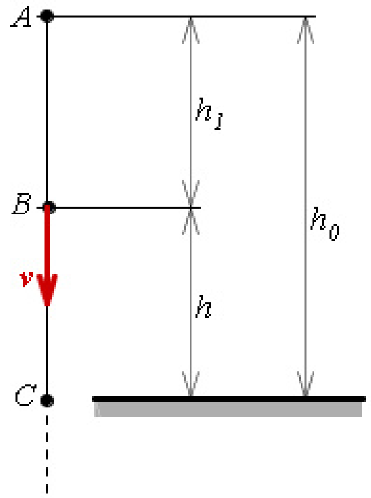
a) 4 J b) 8 J c) 16 J d) 32 J

II) Jakou kinetickou energii má kámen vzhledem k povrchu Země?

a) 16 J b) 36 J c) 52 J d) 100 J

ZTO 1.3.2.-2

Kámen padá volným pádem z bodu A přes bod B do bodu C. Vzdálenost bodů A a B je stejná jako vzdálenost bodů B a C. Odpor vzduchu neuvažujte.



OBR. 1.3.2.-1

I) Ve kterém bodě má kámen největší tíhovou potenciální energii?

a) A b) B c) C d) ve všech stejnou

II) Ve kterém bodě má kámen největší kinetickou energii?

a) A b) B c) C d) ve všech stejnou

III) Ve kterém bodě má kámen největší celkovou mechanickou energii?

a) A b) B c) C d) ve všech stejnou

IV) Ve kterém bodě je kinetická energie kamene rovna jeho tíhové potenciální energii vzhledem k vodorovné rovině proložené bodem C?

a) A b) B c) v žádném bodě d) ve všech bodech

ZTO 1.3.2.-3

Kámen tíhy 20 N byl vržen svisle vzhůru v gravitačním poli Země počáteční rychlostí 4 m.s^{-1}. Jak velkou energii má kámen v nejvyšším bodě své dráhy?

ZTO 1.3.2.-4

Model letadla o hmotnosti 2 kg letí stálou rychlostí o velikosti 20 m.s^{-1} ve výšce 10 m nad povrchem Země. Motor letadla má stálý výkon 200 W. Předpokládejte, že tíhové zrychlení má velikost 10 m.s^{-2}.

I) Jaká je celková mechanická energie letadla vzhledem k povrchu Země?

a) 200 J b) 400 J c) 600 J d) 2000 J

II) Jaká je účinnost motoru letadla, je-li jeho příkon 250 W?

a) 8 % b) 12,5 % c) 50 % d) 80 %

ZTO 1.3.2.-5

Těleso o hmotnosti 5 kg leží na vodorovné střeše, která je ve výšce 8 m nad povrchem Země. Těleso zvedneme rovnoměrným pohybem do výšky 2 m nad střechu. Předpokládejte, že tíhové zrychlení má velikost 10 m.s^{-2}, těleso považujte za hmotný bod.

I) Jak velkou práci při zvedání tělesa vykonáme?

a) 50 J b) 100 J c) 400 J d) 500 J

II) Jakou tíhovou potenciální energii má těleso po zvednutí vzhledem ke střeše?

a) 50 J b) 100 J c) 400 J d) 500 J

III) Jakou tíhovou potenciální energii má zvednuté těleso vzhledem k povrchu Země?

a) 50 J   b) 100 J   c) 400 J   d) 500 J

BTO 1.3.2.-6

Kámen zavěšený se na niti při kývavém pohybu prochází rovnovážnou polohou rychlostí 12 m.s^{-1}. Odpor prostředí neuvažujte. Do jaké výšky vystoupí?

ZTO 1.3.2.-7

Které z následujících veličin jsou veličiny vektorové ?

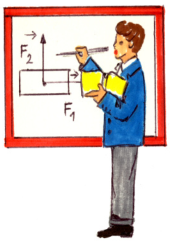
a) hybnost   b) síla   c) impuls síly   d) práce   e) potenciální energie

ZU 1.3.2.-1

Ze střechy budovy vysoké 60 metrů je puštěna cihla o hmotnosti 4,5 kg. a) Jakou rychlost má cihla 10 m pod střechou? b) Jak velkou kinetickou energii má cihla při dopadu na zem? c) Za jak dlouho cihla dopadne na zem?

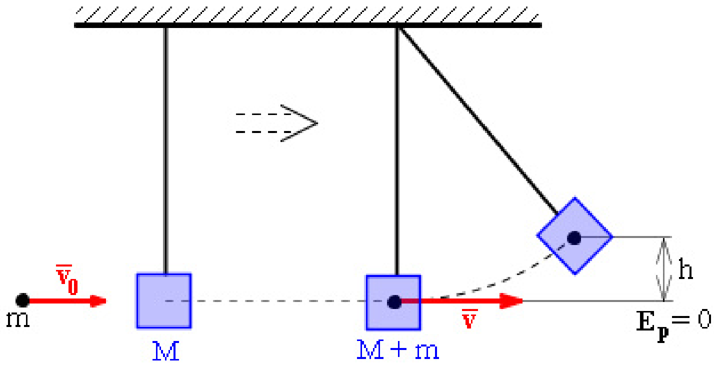
BU 1.3.2.-2

Těleso se pohybuje po dráze délky 100 m. Působí na něj brzdná síla velikosti 20 N. Počáteční rychlost tělesa je 100 km.h^{-1}, hmotnost tělesa je 100 kg. Jakou rychlost bude mít těleso na konci své dráhy? S jakým zpomalením se bude po celou dobu pohybovat? Proveďte výpočet pomocí souvislosti mezi vykonanou prací brzdné síly a změnou energie tělesa.



BŘÚ 1.3.2.-3

Střela o hmotnosti 10 g a rychlosti 600 m.s^{-1} narazí do kvádru o hmotnosti 1 kg, který je zavěšen na laně délky 2,5 m a uvízne v něm. Do jaké maximální výšky kvádr se zarytou střelou vystoupí, jestliže byl na počátku v klidu?



OBR. 1.3.2.-2

Řešení:

$m = 10$ g = 0,01 kg

$M = 1$ kg

$v_0 = 600$ m.s^{-1}

$l = 2,5$ m

- střela s kvádrem tvoří izolovanou soustavu těles
- při srážce střely a kvádru dojde ke vzniku tělesa, které má hmotnost $m + M$, jedná se o tzv. nepružný ráz, dochází k zahřívání a deformaci obou těles, část mechanické energie, kterou měla střela před srážkou se mění na energii vnitřní $\Rightarrow$ při srážce neplatí zákon zachování mechanické energie!

- u nepružného rázu platí zákon zachování hybnosti, který je v tomto případě ve tvaru: $mv_0 = (m+M)v$,

kde v je rychlost, kterou získá kvádr i se střelou v okamžiku srážky, tj. $v = \dfrac{mv_0}{m+M}$

- soustava tvořená kvádrem se střelou již nepodléhá ztrátám mechanické energie, lze tedy použít zákon zachování mechanické energie ve tvaru:

$$(m+M)gh = \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

- volba nulové hladiny potenciální energie odpovídá úrovni, kde se střela srazila s kvádrem
- vyjádříme výšku výstupu a dosadíme vztah pro společnou rychlost kvádru se střelou:

$$h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{g(m+M)}$$

… po číselném dosazení $h = 1{,}8$ m

ZU 1.3.2.-4

Dva kluci sáňkovali na kopci. Sáňky i s nimi měly tíhu 1,15 kN. Aby jeli co nejrychleji, nahoře se rozběhli a naskočili na sáňky. Počáteční rychlost sáněk i s oběma hochy je 7 km.h^{-1}. Jakou rychlostí se sáňky pohybují na úpatí kopce, jehož výška je 15 m? Tření a odpor vzduchu zanedbejte. Kluci se nebojí, takže ani nebrzdí.

BU 1.3.2.-5

Jakou práci vykonal motor nákladního auta, pokud vozidlo o hmotnosti 4 t zvětšilo na vodorovné silnici rychlost z 12 m.s^{-1} na 72 km.h^{-1}?

ZU 1.3.2.-6

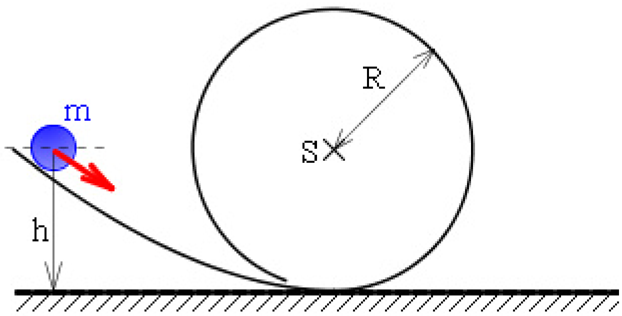
Střela o hmotnosti 20 g pohybující se rychlostí 400 m.s^{-1} prolétne dřevěnou deskou a její rychlost se sníží na 100 m.s^{-1}. Určete práci, kterou střela při proražení dřeva vykonala.

BU 1.3.2.-7

Na jaké dráze s zvýší konstantní síla F, působící na hmotný bod m, jeho rychlost na n-násobek původní rychlost v_0?

BU 1.3.2.-8

Malé těleso klouže bez tření po nakloněné rovině, která na konci přechází ve svislou válcovou plochu o poloměru R. Určete, z jaké výšky musíme těleso vypustit, aby těleso vykonalo celou obrátku.



OBR. 1.3.2.-3

BU 1.3.2.-9

Střela o hmotnosti 10 g prolétla dřevěným trámem tloušťky 20 cm. Do dřeva vnikla rychlostí 700 $m.s^{-1}$ a vylétla z něho rychlostí 300 $m.s^{-1}$. Určete průměrnou sílu, kterou dřevo působí proti pohybu střely.

1.4. GRAVITAČNÍ POLE

1.4.1. NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

SHRNUTÍ

- V okolí **každého hmotného tělesa** existuje gravitační pole, které se projevuje silovým působením na jiná hmotná tělesa.
- Gravitační pole zprostředkuje **vzájemné silové působení** těles, aniž přitom dojde k jejich bezprostřednímu styku … **gravitační interakce**
- Vzájemné přitažlivé síly, které jsou mírou gravitační interakce … **gravitační síly**

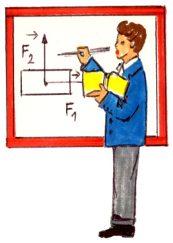
Newtonův všeobecný gravitační zákon

pro dvě hmotná tělesa nahraditelná hmotnými body o hmotnostech m_1, m_2 platí:

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kde $\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ kg^{-1}.m^3.s^{-2} je **gravitační konstanta**

Pozn.: Matematický vztah platí jen pro dva hmotné body a tělesa nahraditelná hmotnými body, jejichž velikost je proti jejich vzdálenosti zanedbatelná. Je také přesným vyjádřením gravitační síly dvojice homogenních koulí, kde r je vzdálenost jejich středů.



ZŘÚ 1.4.1.-1

Marsův měsíc Deimos obíhá kolem planety po kružnici o poloměru 23,5.10^3 km rychlostí 1,35 km.s^{-1}. Vypočtěte hmotnost Marsu.

Řešení:

$r = 23{,}5.10^3$ km

$v = 1{,}35$ km.s^{-1}

$\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

- Deimos se pohybuje po křivočaré trajektorii, tedy se pohybuje se zrychlením – zrychlení normálové (u křivočarých pohybů vždy nenulové) $a_n = \dfrac{v^2}{r}$
- vztažná soustava spojená s Deimosem je neinerciální vztažnou soustavou, ve které neplatí Newtonovy zákony setrvačnosti, ale působí zde zvláštní druh sil – síly setrvačné, které mají směr proti zrychlení (v našem případě proti zrychlení normálovému)
- jedná se tedy o tzv. sílu setrvačnou: $F_s = m\dfrac{v^2}{r}$
- měsíc Deimos je však také vystaven silovému působení planety Mars – gravitační síla vytváří sílu setrvačnou, tj. dle Newtonova gravitačního zákona platí:

$F_s = F_g = \kappa \dfrac{mM}{r^2}$, kde M je hmotnost Marsu, m hmotnost Deimosu

- všechny síly působící na těleso jsou v rovnováze

- dosaďme vyjádření jednotlivých sil:

$$\frac{mv^2}{r} = \kappa \frac{mM}{r^2} \Rightarrow M = \frac{v^2 r}{\kappa}$$

… po číselném dosazení $M = 6{,}42.10^{23}$ kg

ZTO 1.4.1-1

Dva hmotné body, z nichž každý má hmotnost m, se vzájemně přitahují ze vzdálenosti r silou 36 N. Jak velkou silou se tyto body přitahují, je-li jejich vzdálenost poloviční?

ZTO 1.4.1-2

Dva hmotné body, z nichž každý má hmotnost m, se vzájemně přitahují ze vzdálenosti r silou 36 N. Jak velkou silou se tyto body přitahují, změní-li se hmotnost každého z nich na dvojnásobek?

ZTO 1.4.1-3

Dva hmotné body, z nichž každý má hmotnost m, se vzájemně přitahují ze vzdálenosti r silou F. Jak se změní velikost síly F, přemístíme-li oba hmotné body z vakua do vody. Síla F_1 bude

a) stejná, tj. $F_1 = F$ b) větší, tj. $F_1 > F$ c) menší, tj. $F_1 < F$

ZTO 1.4.1-4

Hmotnost Země je 81 krát větší než hmotnost Měsíce. Na spojnici Země - Měsíc existuje takový bod P, ve kterém na případného pasažéra nepůsobí gravitační síla ani od Země ani od Měsíce. Je-li vzdálenost Země a Měsíce d, pro polohu tohoto bodu platí $x : d$ = ?

ZU 1.4.1.-2

Jak velkou silou se přitahují dvě dotýkající se homogenní koule, je-li průměr každé z nich 1 m a hmotnost 6000 kg?

ZU 1.4.1.-3

Největší planeta sluneční soustavy, Jupiter, obíhá kolem Slunce ve střední vzdálenosti $7{,}8.10^8$ km. Hmotnost Slunce je 2.10^{30} kg. Jakou hmotnost má planeta Jupiter, přitahuje-li ho Slunce gravitační silou o velikosti $4{,}2.10^{23}$ N? Jak velké zrychlení uděluje Slunce Jupiteru? Jak velké zrychlení uděluje Jupiter Slunci?

1.4.2. POPIS GRAVITAČNÍHO POLE

SHRNUTÍ

Intenzita gravitačního pole

- **vektorová veličina**, je podílem gravitační síly, která v daném místě pole působí na hmotný bod o hmotnosti m, a této hmotnosti:

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

- intenzita popisuje pole v každém bodě **jednoznačně**
- závisí pouze na poloze uvažovaného bodu a na hmotnosti tělesa, které pole vytváří
- **jednotka**: $N.kg^{-1} = m.s^{-2}$

- je-li pole vytvořeno HB nebo homogenní koulí o hmotnosti M: $K = \kappa \frac{M}{r^2}$

Radiální (centrální) gravitační pole

- **směr** vektoru intenzity $\vec{K}$:do daného hmotného bodu, který je zdrojem tohoto pole (resp. do středu stejnorodé koule, která je zdrojem gravitačního pole)

Homogenní gravitační pole:

- pole charakterizované vektorem intenzity, který má v každém bodě tohoto pole **stejnou velikost, stejný směr, stejnou orientaci**
  - **realizace**: v dostatečné vzdálenosti od gravitačního centra (tj. od středu tělesa, které je zdrojem gravitačního pole)
  - v omezeném prostoru, v němž jsou změny velikosti a směru vektoru intenzity zanedbatelné

Gravitační zrychlení: $\vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g}{m} \Rightarrow a_g = \kappa \frac{M}{r^2}$

- **gravitační zrychlení** v určitém bodě je rovné **intenzitě gravitačního pole** v témže bodě (co do velikosti, směru a orientace) $\vec{K} = \vec{a}_g$
- vektor intenzity gravitačního pole popisuje **pole**, gravitační zrychlení charakterizuje pohyb **konkrétního tělesa**, které se v daném místě pole nachází

Práce sil gravitačního pole:

- **celková práce** při přemístění HB o hmotnosti m ze vzdálenosti r_1 od HB o hmotnosti M do vzdálenosti r_2:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} -\kappa \frac{Mm}{r^2} \mathrm{d}r = \left[\kappa \frac{Mm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \kappa \frac{Mm}{r_2} - \kappa \frac{Mm}{r_1} = -\left(-\kappa \frac{Mm}{r_2} - \left(-\kappa \frac{Mm}{r_1}\right)\right)$$

- **práce gravitační síly**: $W = -(E_{P2} - E_{P1}) = -\Delta E_P$

- Vykonaná mechanická práce je **mírou změny potenciální energie** tělesa.

Potenciální energie v gravitačním poli:

- **skalární veličina**, která kvantitativně popisuje chování těles v gravitačním poli jiných těles: $E_p = -\kappa \frac{Mm}{r}$

Potenciál gravitačního pole:

- skalární veličina charakterizující gravitační pole v určitém bodě závisející pouze na **vlastnostech** tohoto **pole** (nikoli na vlastnostech tělesa v daném bodě umístěného)
- **potenciál** gravitačního pole v daném bodě prostoru je podíl gravitační potenciální energie, kterou má v tomto bodě pomocné těleso (hmotný bod) o hmotnosti m, a této hmotnosti : $\varphi = \frac{E_P}{m}$
- pro gravitační pole hmotného bodu o hmotnosti M a zvolíme-li vztažný bod **v nekonečnu**: : $\varphi = -\kappa \frac{M}{r}$

jednotka: $J.kg^{-1} = N.m.kg^{-1} = m^2.s^{-2}$

ZTO 1.4.2.-1

V gravitačním poli uvažujte dva body A,B. V bodě A působí na těleso hmotnosti 3 kg gravitační síla 30 N, v bodě B působí na těleso hmotnosti 2 kg gravitační síla 4O N. Co platí o velikostech intenzit K_A a K_B v bodech A a B ?

a) $K_A = K_B$ b) $K_A > K_B$ c) $K_A < K_B$

ZTO 1.4.2.-2

Těleso, jehož rozměry neuvažujte, má hmotnost M. Jeho gravitační pole má ve vzdálenosti r od tělesa intenzitu velikosti K. Jak velká bude intenzita tohoto pole ve vzdálenosti 3r?

ZTO 1.4.2.-3

Těleso, jehož rozměry neuvažujte, má hmotnost M. Jeho gravitační pole má ve vzdálenosti r od tělesa intenzitu velikosti K. Jak velká bude intenzita tohoto pole, zvětší-li se hmotnost tělesa na 3M?

ZTO 1.4.2.-4

Intenzita gravitačního pole má v určitém bodě prostoru velikost 6 m/s^2. Umístíme-li do tohoto bodu těleso o hmotnosti 2 kg, jaká gravitační síla bude na toto těleso působit?

BU 1.4.2.-1

Určete gravitační zrychlení na povrchu Venuše, jestliže střední hustota látek, které tvoří planetu Venuši, je 4900 $kg.m^{-3}$ a její poloměr je 6200 km.

1.4.3. GRAVITAČNÍ A TÍHOVÉ POLE ZEMĚ

SHRNUTÍ

GRAVITAČNÍ POLE ZEMĚ

- ve vztahu k jiným vesmírným objektům (planety, družice…)

1. Model Země:

- Zemi považujme za homogenní kouli o poloměru R = 6378 km a hmotnosti M = $5{,}98.10^{24}$ kg

2. Gravitační zrychlení

- gravitační zrychlení klesá s nadmořskou výškou (zvětšuje se vzdálenost od středu Země)
- v nadmořské výšce h je vzdálenost od středu Země $r = R + h$ a tedy gravitační zrychlení je dáno: $a_g = a_{g0}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^2}$
- je-li $h \prec\prec R \quad \Rightarrow a_g = a_{g0}\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^{-2} \approx a_{g0}\left(1-\dfrac{2h}{R}\right)$, kde $a_{g0} = \kappa\dfrac{M}{R^2}$

3. Potenciální energie těles v zemském gravitačním poli: $E_P = -\kappa\dfrac{Mm}{r}$

- při povrchu Země: $E_{P0} = -\kappa\dfrac{Mm}{R}$
- ve výšce h nad povrchem: $E_P = -\kappa\dfrac{Mm}{R+h}$

TÍHOVÉ POLE ZEMĚ

- ve vztahu k tělesům na povrchu resp. v blízkosti povrchu Země
- kromě gravitační síly $\vec{F}_g$ působí na tělesa o hmotnosti m **síla setrvačná** $\vec{F}_S$
- tíhové pole Země je složené z gravitačního pole Země a pole setrvačných (odstředivých) sil
- výslednice sil působících na těleso na Zemi: $\vec{F}_g + \vec{F}_S = \vec{F}_G$

  $\vec{F}_G$ ... **tíhová síla**, $\vec{F}_G = m\vec{g}$, kde $\vec{g}$ je **tíhové zrychlení**
- směr tíhové síly definuje **svislý směr**
- tíhová síla $F_G = mg$ klesá s nadmořskou výškou stejně jako tíhové zrychlení g
- tíhové zrychlení závisí na nadmořské výšce i **zeměpisné šířce**
  - **maximální** je na zemských pólech (9,83 m.s^{-2} při hladině moře)
  - **minimální** je na rovníku (9,78 m.s^{-2} při hladině moře)
  - tato závislost je dána nejen tvarem zemského **elipsoidu**, ale zejména **rotací Země**
  - tíhové zrychlení je **vektorovým součtem** gravitačního zrychlení a zrychlení setrvačného $\vec{g} = \vec{a}_g + \vec{a}_s$

- práce potřebná k vyzvednutí tělesa z povrchu Země do výšky h (pro h<<R):

$W = m g_0 h$

ZTO 1.4.3.-1
Může člověk na rovníku „uletět“ vlivem odstředivé síly? A proč? Řešte nejprve úvahou, její správnost potvrďte výpočtem pomocí těchto veličin: poloměr Země na rovníku 6378 km, úhlová rychlost rotace Země $7{,}29 . 10^{-5}$ rad.s^{-1}, hmotnost člověka 80 kg.

ZU 1.4.3.-1
V jaké výšce nad povrchem Země je gravitační zrychlení poloviční vzhledem ke zrychlení na povrchu Země?

1.4.4. POHYBY V HOMOGENNÍM TÍHOVÉM POLI ZEMĚ

SHRNUTÍ

- tíhové zrychlení je podél celé dráhy tělesa konstantní
- neuvažujeme odpor prostředí

a) VOLNÝ PÁD

- rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí
    - **okamžitá rychlost** $v = gt$
    - **dráha HB** $s = \frac{1}{2} g t^2$

b) VRH SVISLÝ DOLŮ

- rovnoměrně zrychlený pohyb s nenulovou počáteční rychlostí v_0
    - **okamžitá rychlost** $v = v_0 + gt$
    - **dráha HB** $s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

c) VRH SVISLÝ VZHŮRU

- rovnoměrně zpomalený pohyb s nenulovou počáteční rychlostí
    - **okamžitá rychlost** $v = v_0 - gt$
    - **dráha HB** $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$
    - **doba výstupu** pro $v = 0 \Rightarrow t_h = \frac{v_0}{g}$
    - **výška výstupu** $h = \frac{v_0^2}{2g}$
    - v okamžiku dopadu $y = 0 \Rightarrow$ **celková doba vrhu** $t_c = \frac{2v_0}{g}$

d) VRH VODOROVNÝ

- trajektorií je část **paraboly, pohyb v rovině XY**
- těleso se nachází na počátku ve výšce h

  - **souřadnice okamžité rychlosti** $v_x = v_0$, $v_y = -gt$
  - **souřadnice HB** $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$
  - vyloučením času z rovnic pro souřadnice HB $y = h - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2}$
  - **doba vrhu** (pro $y = 0$) $t_s = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$
  - **dálka vrhu** (maximální x-ová souřadnice) $s = v_0 \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$
  - **velikost celkové rychlosti** $v = \sqrt{v_0^2 + 2hg}$

e) VRH ŠIKMÝ VZHŮRU

- pohyb v rovině XY, trajektorií je část **paraboly**
- při uplatnění odporu prostředí je trajektorií **balistická křiv**ka
- počáteční rychlost v_0 svírá s osou x úhel $0 \prec \alpha \prec \dfrac{\pi}{2}$
- na počátku je hmotný bod v počátku soustavy souřadnic

  - **okamžitá rychlost** $\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$
  - **souřadnice HB** $\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$
  - vyloučením času z rovnic pro souřadnice
    $y = x \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$
  - **doba výstupu** (souřadnice vrcholu) pro $v_y = 0$: $t_h = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$
  - **výška výstupu** $y_1 = h = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$
  - **délka vrhu** pro $y = 0$ $x_2 = s = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

- **celková doba vrhu** $t_s = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$
- **velikost okamžité rychlosti** $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$

ZTO 1.4.4.-1

V homogenním tíhovém poli Země je vrženo těleso vodorovným směrem počáteční rychlostí v_0. Odpor vzduchu je zanedbatelně malý, těleso se pohybuje po parabole. Za určitou dobu je v bodě P, který je vyznačen na obrázku. Písmeny A, B, C, D jsou vyznačeny čtyři různé směry.

OBR. 1.4.4.-1

I) Který z označených směrů má síla působící na těleso?

a) A b) B c) C d) D

II) Který z označených směrů má zrychlení tělesa?

a) A b) B c) C d) D

III) Který z označených směrů má v daném bodě okamžitá rychlost tělesa?

a) A b) B c) C d) d

ZTO 1.4.4.-2

Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí 30 $m.s^{-1}$. Odpor vzduchu zanedbejte a předpokládejte, že tíhové zrychlení má velikost 10 $m.s^{-2}$.

I) Jak velká je okamžitá rychlost tělesa v čase 1 s od začátku pohybu?

a) 40 $m.s^{-1}$ b) 20 $m.s^{-1}$ c) 10 $m.s^{-1}$ d) 5 $m.s^{-1}$

II) V jaké výšce nad místem vrhu je těleso v čase 1 s?

a) 30 m b) 25 m c) 20 m d)5 m

III) Jaká je doba výstupu tělesa do nejvyššího bodu trajektorie?

a) 6 s b) 3 s c) 1 s d) 1/3 s

IV) Jaká je výška výstupu tělesa?

a) 90 m b) 60 m c) 45 m d) 30 m

ZTO 1.4.4.-3

Těleso padá volným pádem (g = 10 $m.s^{-2}$) z výšky 40 m. Odpor prostředí neuvažujte, počáteční rychlost je nulová.

I) Určete jeho okamžitou rychlost tělesa na konci druhé sekundy od začátku pohybu.

II) Určete čas, za který těleso dopadne na podložku.

III) Určete dráhu, kterou těleso urazí během třetí sekundy svého pohybu.

IV) Určete dráhu, kterou těleso urazí za první tři sekundy svého pohybu.

ZTO 1.4.4.-4

Tíhové zrychlení na Měsíci je asi šestkrát menší než na Zemi. Představte si, že na Měsíci i na Zemi jsou přímo nahoru vyhozeny shodné míče. Oba míče mají stejnou počáteční rychlost, při házení na Zemi zanedbáváme odpor vzduchu, nepočítáme s výškou házející osoby.

I) Kolikrát výše vyletí míč na Měsíci než míč na Zemi?

a) 1/6 krát b) 6 krát c)12 krát d) 36 krát

II) Platí v obou případech zákon zachování mechanické energie?

a) ano b) ne

BTO 1.4.4.-5
Hloubku propasti měříme tím, že do ní upustíme předmět a změříme čas, za který uslyšíme jeho dopad. Nesmíme zapomenout na to, že i zvuk se šíří konečnou rychlostí přibližně 340 $m.s^{-1}$. Jaké chyby bychom se dopustili bez započítání doby šíření zvuku při měření propasti Macocha (její skutečná hloubka je 138 m)?

ZTO 1.4.4.-6
Fungovaly by dědečkovy kyvadlové hodiny různě na odlišných místech na Zemi?

a) ne, „jdou“ všude stejně, poloha nemá vliv na jejich správný chod
b) ano, mění se rozměry kyvadla a tím doba kyvu
c) ano, mění se doba kyvu v důsledku změn tíhového zrychlení

ZTO 1.4.4.-7
Nejsou nám nebezpečné dešťové kapky dopadající na povrch Země (padají-li z např. z mraku ve výšce 2 km)? Proč je skutečná rychlost přibližně 2 $m.s^{-1}$?

ZTO 1.4.4.-8
Těleso hmotnosti m bylo vrženo v gravitačním poli Země svisle vzhůru počáteční rychlostí v_o. V nejvyšším bodě své trajektorie má těleso

a) jen energii kinetickou b) jen energii potenciální tíhovou
c) jak kinetickou, tak i potenciální energii tíhovou

ZTO 1.4.4.-9
Těleso hmotnosti m bylo vrženo v gravitačním poli Země šikmo vzhůru počáteční rychlostí v_o pod úhlem α. V nejvyšším bodě své trajektorie má těleso

a) jen energii kinetickou b) jen energii potenciální tíhovou
c) jak kinetickou, tak i potenciální energii tíhovou

BTO 1.4.4.-10
Těleso je vrženo v tíhovém poli Země počáteční rychlostí 20 m/s pod elevačním úhlem 60^O, odpor prostředí neuvažujte. Určete rychlost tělesa ve vrcholu jeho trajektorie.

ZU 1.4.4.-1
Kámen padá volným pádem do propasti o hloubce 122,5 m. Za jakou dobu uslyšíme dopadnutí kamene, je-li rychlost zvuku ve vzduchu 340 $m.s^{-1}$?

ZU 1.4.4.-2
Při volném pádu padá jedno z těles dvakrát delší dobu než druhé. Porovnejte:
I) rychlosti dopadu obou těles,
II) dráhy, které při tomto pohybu tělesa urazí.

BU 1.4.4.-3
Těleso je vrženo svisle dolů do hloubky 90 m počáteční rychlostí 15 $m.s^{-1}$. Za jakou dobu a jakou rychlostí dopadne? Tíhové zrychlení uvažujte 10 $m.s^{-2}$. Řešení proveďte dvěma způsoby: pomocí kinematických pohybových rovnic a využitím zákona zachování mechanické energie.

BU 1.4.4.-4

Z věže byl vržen kámen rychlostí 30 m.s^{-1} vodorovným směrem a dopadl na vodorovný povrch Země za 4 s. Odpor vzduchu zanedbejte.Z jaké výšky byl kámen vržen? V jaké vzdálenosti od svislé osy věže kámen dopadl? Jak velká je svislá složka rychlosti kamene v okamžiku dopadu? Jak velká je vodorovná složka rychlosti kamene v okamžiku dopadu?

BLP 1.4.4.-6

Dvě tělesa jsou vržena svisle vzhůru z téhož bodu stejnou počáteční rychlostí 24,5 m.s^{-1} s časovým odstupem 1 s. Za jakou dobu od začátku pohybu druhého tělesa a v jaké výšce se tělesa srazí?

Řešení:

- Vypište z textu úlohy zadané veličiny.
- $v_0 = 24{,}5$ m.s^{-1}

  $\tau = 1$ s

  Zapište pohybové rovnice pro rychlost a dráhu vrhu svislého vzhůru (jedná se o rovnoměrně zpomalený pohyb v tíhovém poli Země).
- $v = v_0 - gt$, $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

  Zapište pohybovou rovnici pro dráhu pro každé pohybující se těleso zvlášť. Dráhu vyjádřete pomocí souřadnice (značte např. y_1 a y_2).
- Pohybové rovnice obou těles: $y_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$$y_2 = v_0(t+\tau) - \frac{1}{2} g (t+\tau)^2$$

Setkají-li se tato tělesa, musí se jejich souřadnice (tj. uražené dráhy) rovnat. Najděte tuto rovnost.

- $y_1 = y_2 \Rightarrow \quad 0 = v_0 \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 - g t \tau$

  Vyřešte tuto kvadratickou rovnici a vyjádřete neznámou – čas a okamžitou polohu těles.
- $0 = \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}\tau - t \quad \Rightarrow \quad t = 2$ s, $h = 30$ m

ZU 1.4.4.-7

Z věže o výšce 44,1 m byl vodorovným směrem vržen kámen rychlostí 25 m.s^{-1}. Určete a) dobu, za kterou kámen dopadne na zem, b) vzdálenost od paty věže, ve které kámen dopadne, c) celkovou rychlost kamene v okamžiku dopadu.

ZU 1.4.4.-8

Jakou počáteční rychlost musíme ve vodorovném směru udělit tělesu, aby délka vrhu byla rovna n-násobku výšky, ze které bylo těleso vrženo?

ZU 1.4.4.-9

Vypočtěte kinetickou energii volně padajícího tělesa o hmotnosti 5 kg v čase 5 s od začátku pádu. Tíhové zrychlení je 10 m.s^{-2}.

BU 1.4.4.-10
Řetízkový kolotoč o poloměru 5 m se otáčí úhlovou rychlostí 1 rad.s^{-1}. Náhle se utrhne prázdná sedačka o hmotnosti 1,5 kg a padá z výšky 3 m. Kterým směrem a jak daleko dopadne?

ZU 1.4.4.-11
Kámen o hmotnosti 200 g byl vržen svisle vzhůru a spadl zpět za 4 s od začátku pohybu. Určete kinetickou energii v okamžiku dopadu kamene a výšku, které kámen dosáhl.

ZU 1.4.4.-12
Těleso bylo vrženo svisle vzhůru rychlostí 50 m.s^{-1}. Určete: a) rychlost na konci čtvrté sekundy, b) čas, ve kterém dosáhne vrcholu své dráhy, c) jaké max. výšky dosáhne, d) za jaký čas dopadne zpátky na Zem, e) jakou rychlostí dopadne zpět.

ZU 1.4.4.-13
Svah má délku 2192 m a úhel sklonu 30°. Jakou rychlostí ve vodorovném směru je třeba hodit těleso z horního konce svahu, aby dopadlo až na jeho dolní konec (úpatí)?

ZU 1.4.4.-14
Jakou počáteční rychlostí a pod jakým elevačním úhlem musíme hodit kámen, abychom ho přehodili přes řeku širokou 35 m, aby let trval pouze 1 s?

BU 1.4.4.-15
Mějme dvě tělesa. První vrhneme svisle vzhůru počáteční rychlostí 4,9 m.s^{-1}. Současně z maximální výšky, které toto těleso může dosáhnout, vrháme druhé těleso se stejnou počáteční rychlostí. Určete čas, kdy se tato tělesa střetnou, vzdálenost od povrchu Země, ve které ke střetu dojde, rychlosti obou těles v okamžiku srážky.

BU 1.4.4.-16
Jaká je počáteční rychlost tělesa při vrhu svislém dolů z výšky 122 m, má-li za poslední sekundu svého pohybu urazit polovinu celkové dráhy?

1.4.5. RADIÁLNÍ GRAVITAČNÍ POLE ZEMĚ

SHRNUTÍ

- pohyby raketových střel, umělých družic Země, kosmických lodí
- podél trajektorie těchto těles se mění velikost i směr intenzity gravitačního pole i gravitačního zrychlení
- zanedbáváme vliv gravitačního pole Slunce, Měsíce a planet

První kosmická rychlost (kruhová rychlost)

- rychlost, kterou musí mít těleso aby mohlo **trvale obíhat kolem Země** po kruhové trajektorii o poloměru $r = R + h$
- odpor vzduchu zanedbáváme
- dostředivá síla potřebná k udržení rovnoměrného pohybu po kružnici je dána gravitační silou:

$$\frac{m v^2}{r} = \kappa \frac{M m}{r^2}$$

- ➢ odtud první kosmická rychlost:

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{\kappa \frac{M}{r}} = \sqrt{\kappa \frac{M}{R^2} \cdot \frac{R^2}{R+h}} = \sqrt{a_{g0} \frac{R^2}{R+h}}$$

- pro případ h<<R $v_{\mathrm{I}} = \sqrt{a_{g0} R}$ = 7,9 km.s^{-1}

Druhá kosmická rychlost (parabolická, úniková)

- rychlost, kterou je třeba udělit tělesu ve výšce h, aby **opustilo sféru zemské přitažlivosti**
- předpokládáme, že se těleso má vzdálit **do nekonečna** (kde je potenciální energie tělesa nulová)
- ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_P - E_{P\infty} = \kappa \frac{M m}{r}$$

- odtud platí: $v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2 a_{g0} \frac{R^2}{R+h}}$, pro $h = 0$ je v_{II} = 11,2 km.s^{-1}

Třetí kosmická rychlost:

- trajektorií družice je **hyperbola**
- těleso **opouští gravitační pole Země** a stává se umělou družicí Slunce, pokud není její rychlost dostatečná k opuštění gravitačního pole Slunce, čímž by došlo k **opuštění Sluneční soustavy**
- v_{III} = 16,7 km.s^{-1} za předpokladu, že družici vypouštíme ve směru rychlosti, kterou obíhá Země kolem Slunce

1. Keplerův zákon:

„ Planety obíhají kolem Slunce v elipsách o malé výstřednosti (málo se lišících od kružnice), v jejichž společném ohnisku je Slunce.“

2. Keplerův zákon:

„ Plochy opsané průvodičem planety za stejné doby jsou stejné.“

3. Keplerův zákon:

„ Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou různých planet jsou přímo úměrné poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.“

algebraicky: $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$

BTO 1.4.5.-1

Pokládejme Zemi za homogenní kouli o poloměru R a hmotnosti M. Gravitační zrychlení na povrchu Země je 10 m.s^{-2}, rychlost družice obíhající v malé výšce nad povrchem je 8 km.s^{-1}.

I) Jak velké je gravitační zrychlení ve výšce rovné poloměru Země nad povrchem?

a) 40 m.s^{-2} b) 20 m.s^{-2} c) 5 m.s^{-2} d) 2,5 m.s^{-2}

II) Jak velká je rychlost družice, která obíhá Zemi po kružnici o poloměru $4R$?

a) 16 km.s^{-1} b) 8 km.s^{-1} c) 4 km.s^{-1} d) 2 km.s^{-1}

III) Jak velké gravitační zrychlení je na povrchu planety, jejíž poloměr je stejný jako poloměr Země, ale hmotnost je dvojnásobná?

a) 40 m.s^{-2} b) 20 m.s^{-2} b) 10 m.s^{-2} b) 5 m.s^{-2}

IV) Jak velké je gravitační zrychlení na povrchu planety, jejíž poloměr je stejný jako poloměr Země, ale hmotnost je čtyřnásobná?

a) 40 m.s^{-2} b) 20 m.s^{-2} b) 10 m.s^{-2} b) 5 m.s^{-2}

V) Jak velká je rychlost družice obíhající v malé výšce nad povrchem planety ze zadání IV)?

a) 32 km.s^{-1} b) 16 km.s^{-1} c) 4 km.s^{-1} d) 2 km.s^{-1}

VI) V jaké vzdálenosti od středu planety ze zadání IV) je gravitační zrychlení čtyřikrát menší než na jejím povrchu (vyjádřeno v násobcích poloměru)?

a) 16 b) 4 c) 2 d) 0,5

BTO 1.4.5.-2

Pohybujeme se na povrchu Země rychleji ve dne nebo v noci (vzhledem ke Slunci)?

a) ve dne b) v noci c) stále stejně rychle d) různě dle ročních období

ZTO 1.4.5.-3

Představme si planetu X, jejíž hmotnost je rovna dvojnásobku hmotnosti Země, poloměr je taktéž dvojnásobný ve srovnání se Zemí. Vyjádřete pomocí násobků odpovídajících veličin pro Zemi:

I) střední hustotu planety X:

a) 1/4 b) 1/2 c) 1 d) 2 e) 4

II) gravitační zrychlení na jejím povrchu:

a) 1/4 b) 1/2 c) 1 d) 2 e) 4

III) potenciál gravitačního pole na jejím povrchu:

a) 1/4 b) 1/2 c) 1 d) 2 e) 4

BTO 1.4.5.-4

V jaké výšce nad povrchem Země obíhá družice, jejíž kruhová rychlost je poloviční vzhledem ke kruhové rychlosti při povrchu Země? Vyjádřete v násobcích poloměru Země.

a) 1/9 b) 1/3 c) 1 d) 3 e) 9

BTO 1.4.5.-5

Kosmická raketa krouží kolem Země ve výšce 400 km nad zemským povrchem. Určete velikost dostředivého zrychlení rakety na její oběžné dráze a výsledek vyjádřete v násobcích tíhového zrychlení na povrchu Země: g = 9,81 m.s^{-2}

a) 0,50 g b) 0,89 g c) 1,24 g d) 1,62 g

ZU 1.4.5.-1

Vypočítejte obvodovou rychlost a oběžnou dobu družice, která obíhá kolem Země ve výšce 550 km nad jejím povrchem. Hmotnost Země uvažujte 5,98.10^{24} kg, poloměr 6378 km.

1.5. MECHANIKA SOUSTAV HMOTNÝCH BODŮ A TUHÝCH TĚLES

1.5.1. MOMENT SÍLY, MOMONET HYBNOSTI, IMPULZOVÉ VĚTY

SHRNUTÍ

Soustava hmotných bodů: (množina hmotných bodů, které spolu souvisí)

- **kontinuální** soustava hmotných bodů
- soustava **izolovaných** hmotných bodů

a) pohyb posuvný: trajektorie všech bodů soustavy jsou rovnoběžné, všechny body tělesa mají v daném okamžiku stejnou rychlost i zrychlení

b) pohyb otáčivý kolem nehybné osy: některé přímky spojené se soustavou se otáčejí, všechny body tělesa se pohybují se stejnou úhlovou rychlostí a opisují soustředné kružnice, roviny kružnic jsou kolmé na osu otáčení

c) pohyb složený: pohyb složený z translace v prostoru a současné rotace kolem okamžité osy otáčení

- předp. **tuhé soustavy hmotných bodů**, jejichž tvar a rozměry se působením žádných sil nemění, tzn. vzájemné vzdálenosti jednotlivých hmotných bodů se nemění
- Hmotné body tvořící soustavu mohou být vystaveny silovému působení **vnějších** (mají původ v tělesech, která k vyšetřované soustavě nepočítáme) i **vnitřních** sil.

Izolovaná soustava hmotných bodů: neuvažujeme působení vnějších sil, každý bod soustavy je vystaven působení pouze vnitřních sil.

Celková hmotnost a hybnost soustavy:

$m = \sum_{k=1}^{n} m_k$ (resp. $m = \int_V \rho \,\mathrm{d}V$) $\quad \vec{p} = \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k$

1. Impulsová věta:

- vliv vnějších sil na změnu celkové hybnosti soustavy

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \Rightarrow \text{ zjednodušeně } \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

„Časová změna celkové hybnosti soustavy je rovna výslednici vnějších sil působících na soustavu.“

Pro **izolovanou** soustavu: $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} = \overrightarrow{konst}$

…. **zákon zachování hybnosti**

Hmotný střed:

- působiště výslednice vnějších sil působících na soustavu
- při translačním pohybu se pohybuje jako hmotný bod, jehož hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy

Výpočet polohy hmotného středu soustavy hmotných bodů:

$$x_0 = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{1}{m}\sum m_k x_k, \quad y_0 = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} = \frac{1}{m}\sum m_k y_k$$

$$z_0 = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k} = \frac{1}{m}\sum m_k z_k$$

Moment síly

- vektor charakterizující **míru otáčivého účinku** síly působící na těleso resp. soustavu hmotných bodů otáčivou kolem daného bodu
- závisí na velikosti síly, směru a poloze působiště vzhledem k ose otáčení

$M = F r \sin\alpha$, kde součin $r \sin\alpha$ nazýváme **rameno síly**

vektorově: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

jednotka N.m = kg.m^2.s^{-2}

- moment síly je orientován na tu stranu, ze které vidíme otáčivý účinek kladně (resp. **pravidlo pravé ruky** – uchopíme osu otáčení do dlaně tak, aby prsty měly směr působící síly, potom vztyčený palec určuje směr momentu této síly
- při působení **více sil:**

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n \Rightarrow \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + ... + \vec{M}_n = \sum_k \vec{M}_k$$

Momentová věta: Je-li výsledný moment sil působících na soustavu nulový, otáčivý účinek těchto sil se RUŠÍ.

Dvojice sil:

- dvě stejně velké rovnoběžné síly opačně orientované, které působí ve dvou různých bodech soustavy otáčivé kolem nehybné osy
- tyto síly mají nenulový otáčivý účinek na těleso

Moment dvojice sil: $\vec{M}_D$

velikost vektoru momentu dvojice sil: $M_D = Fd$, kde d je rameno dvojice sil (vzdálenost vektorových přímek sil)

Moment hybnosti:

- vektor sloužící k dynamickému popisu **rotačního pohybu** soustavy hmotných bodů (analogie hybnosti)
- $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$
- $b = r p \sin\alpha = r m v \sin\alpha$
- **jednotka**: kg.m^2.s$^{-1$}

Impuls momentu síly (rotační impuls):

vektorová veličina sloužící k popisu **rotačního pohybu** soustavy (analogie impulzu síly)

$$\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \Delta\vec{b}$$

jednotka: kg.m^2.s^{-1}

Souvislost momentu síly a momentu hybnosti: $\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$

2. Impulsová věta: $\sum_k \frac{\mathrm{d}\vec{b}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_k \vec{M}_k$ resp. $\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$

„Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy HB je rovna výslednici momentů vnějších sil působících na soustavu.“

Zákon zachování momentu hybnosti:

- důsledek 2. impulsové věty
- je-li výsledný moment vnějších sil působících na soustavu roven nule: $\vec{M} = \vec{o} \Rightarrow$ $\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = \vec{o} \Rightarrow \vec{b} = \overrightarrow{konst}$

Podmínky rovnováhy (stability) soustavy HB:

$$\vec{F} = \vec{o} \wedge \vec{M} = \vec{o} \text{ … podmínky rovnováhy}$$

tj. výslednice všech vnějších sil působících na soustavu a současně součet momentů všech vnějších sil **musí být nulové**, aby byla soustava v **rovnovážném stavu**

Tuhé těleso (TT):

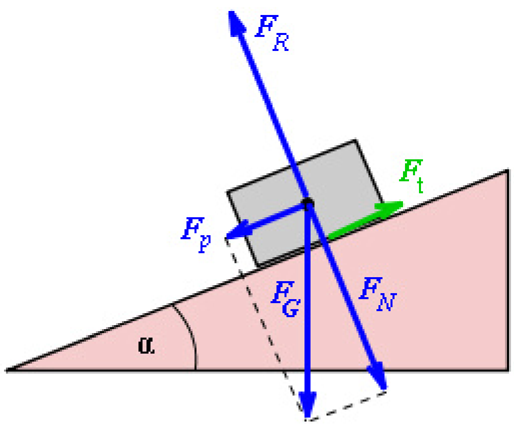
- model pevného tělesa pro případ, že při vyšetřování pohybu nelze těleso nahradit hmotným bodem
- svou povahou odpovídá **tuhé** soustavě HB, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou neproměnné

Posuvný pohyb tuhého tělesa po nakloněné rovině

- uvažujeme působení **třecí síly**, která vzniká při vzájemném pohybu dvou těles, která jsou v neustálém styku:

- tření **smykové**: $F_t = \mu F_N$, kde μ je součinitel smykového tření závisející pouze na materiálu tělesa a podložky a na jakosti obou ploch
- μ_0 … součinitel klidového (statického) tření, $\mu_0 > \mu$

$$\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_t$$

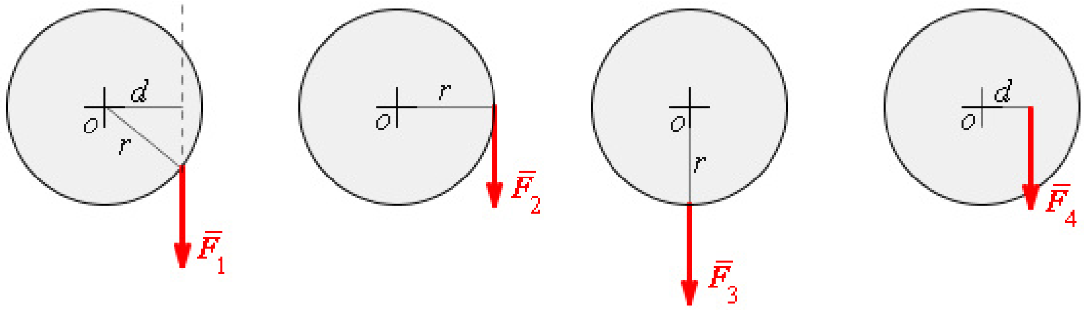


$$F = ma = F_P - F_t = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$
$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$
$$v = \int a\mathrm{d}t = gt(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + v_0$$
$$s = \int v\mathrm{d}t = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

OBR. 1.5.1.-1

ZTO 1.5.1.-1

Kotouč o poloměru r je otáčivý kolem nehybné osy jdoucí jeho středem. Na kotouč působí čtyři síly znázorněné na obrázku. Všechny síly mají stejnou velikost a stejný směr, liší se jen polohou působiště.



OBR. 1.5.1.-2

I) Která síla má na kotouč největší otáčivý účinek?

a) $\vec{F}_1$ b) $\vec{F}_2$ c) $\vec{F}_3$ d) $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ mají stejný účinek, $\vec{F}_4$ menší

II) Která síla má nulový otáčivý účinek?

a) $\vec{F}_1$ b) $\vec{F}_2$ c) $\vec{F}_3$ d) žádná

III) Jak vypočteme velikost momentu síly $\vec{F}_1$ vzhledem k ose otáčení?

a) $M = Fd$ b) $M = Fr$ c) $M = \frac{F}{r}$ d) $M = \frac{F}{d}$

IV) Pro které síly platí pro velikost momentu síly vzhledem k ose vztah $M = Fr$?

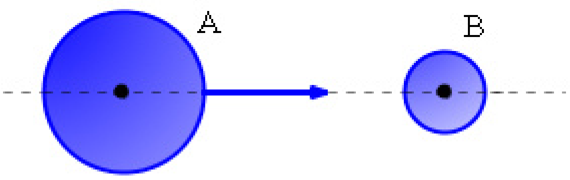
a) pro žádnou b) $\vec{F}_2$ c) $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ d) $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

V) Které síly mají stejný otáčivý účinek jako síla $\vec{F}_1$?

a) žádná b) $\vec{F}_4$ c) $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ d) $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$

ZTO 1.5.1.-2

Koule A o hmotnosti 3 kg se pohybuje rychlostí 10 m.s^{-1} a narazí na kouli B o hmotnosti 2 kg (viz obrázek). Obě koule jsou plastické, ráz je dokonale nepružný – tj. koule se při srážce spojí a budou se pohybovat jako jeden celek.



OBR. 1.5.1.-3

I) Jak velká je společná rychlost koulí po rázu, pohybuje-li se koule B před srážkou rychlostí 5 m.s^{-1}, stejným směrem jako koule A?

a) 15 m.s^{-1} b) 8 m.s^{-1} c) 6 m.s^{-1} d) 4 m.s^{-1}

II) Jak velká je společná rychlost koulí po rázu, je-li koule B před nárazem v klidu?

a) 15 m.s^{-1} b) 10 m.s^{-1} c) 6 m.s^{-1} d) 5 m.s^{-1}

III) Jak velká je společná rychlost koulí po rázu, pohybuje-li se koule B před rázem rychlostí 5 m.s^{-1} proti kouli A?

a) 15 m.s^{-1} b) 8 m.s^{-1} c) 5 m.s^{-1} d) 4 m.s^{-1}

BTO 1.5.1.-3

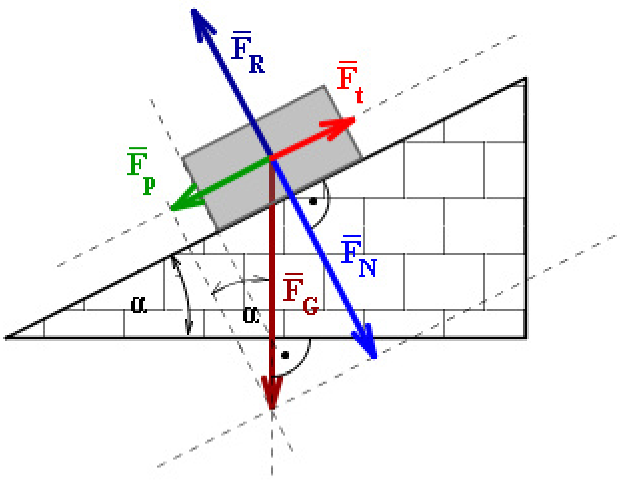
Jaké hlavní faktory ovlivňují hodnotu součinitele smykového tření?

a) hmotnost b) tíha tělesa c) normálová tlaková síla do podložky

d) velikost styčných ploch e) charakter styčných ploch

BTO 1.5.1.-4

Pohybuje-li se těleso po nakloněné rovině, za jakých podmínek je jeho pohyb



OBR. 1.5.1.-4

I) rovnoměrný přímočarý?

a) $F_P \succ F_t$ b) $F_N = F_R$ c) $F_P \prec F_t$ d) $F_G = F_t$ e) $F_G = F_N$ f) $F_P = F_t$

II) rovnoměrně zrychlený přímočarý?

a) $F_P \succ F_t$ b) $F_N = F_R$ c) $F_P \prec F_t$ d) $F_G = F_t$ e) $F_G = F_N$ f) $F_P = F_t$

III) rovnoměrně zpomalený přímočarý?

a) $F_P \succ F_t$ b) $F_N = F_R$ c) $F_P \prec F_t$ d) $F_G = F_t$ e) $F_G = F_N$ f) $F_P = F_t$

BTO 1.5.1.-5

Těleso hmotnosti 2 kg se pohybuje účinkem své tíhy po nakloněné rovině α = 30^{O} bez tření směrem dolů. Jak je velká síla, která uděluje tělesu zrychlení?

BTO 1.5.1.-6

Těleso hmotnosti 1 kg se pohybuje účinkem své tíhy po nakloněné rovině α = 30^{O} bez tření směrem dolů. Vypočítejte zrychlení tělesa po dvou sekundách jeho pohybu.

ZTO 1.5.1.-7

Těleso hmotnosti 1 kg se pohybuje účinkem své tíhy po nakloněné rovině α = 30^{O} bez tření směrem dolů se zrychlením 3 m.s^{-2}. Z těchto údajů:

a) plyne, že na těleso kromě tíhy musí působit ještě další síly,
b) plyne, že těleso se pohybuje pouze pod vlivem své tíhy,
c) nelze rozhodnout, zda na těleso působí kromě tíhy ještě další síly.

BTO 1.5.1.-8

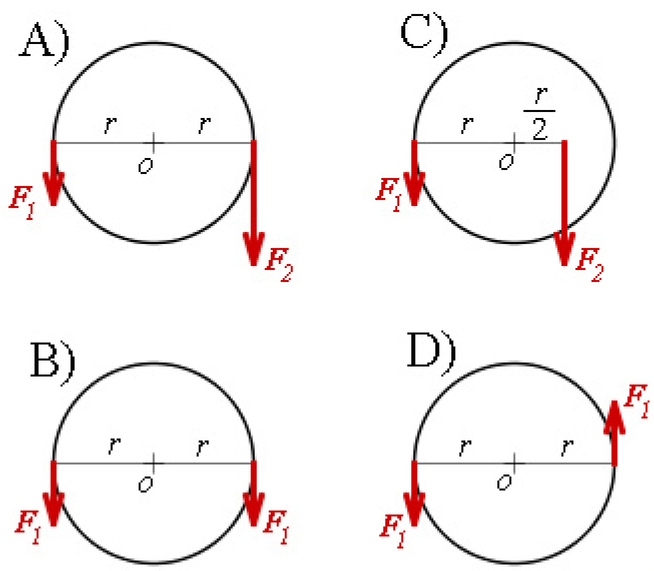
Těleso se pohybuje účinkem své tíhy po nakloněné rovině s úhlem α. Součinitel smykového tření f je různý od nuly. S jakým zrychlením se těleso pohybuje, je-li pohyb rovnoměrně zrychlený?

ZTO 1.5.1.-9

Napište jednotku momentu síly v základních jednotkách soustavy SI.

ZTO 1.5.1.-10

Na kotouč o poloměru r, otáčivý kolem nehybné osy jdoucí jeho středem, působí dvě rovnoběžné síly. Na obrázku jsou čtyři různé případy působení sil označeny písmeny A až D. Síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_1'$ mají stejnou velikost F, síla $\vec{F}_2$ má velikost 2F.



OBR. 1.5.1.-5

I) Ve kterých případech se otáčivé účinky sil navzájem ruší?

a) v žádném　　b) jen B　　c) B, C　　d) jen D

II) Ve kterých případech tvoří síly působící na kotouč dvojici sil?

a) ve všech　　b) jen B　　c) B, D　　d) jen D

III) Ve kterém případě mají síly působící na kotouč největší otáčivý účinek?

a) A　　b) B　　c) C　　d) jen D

IV) Ve kterých případech je působiště výslednice sil ve středu kotouče?

a) ve všech　　b) jen B　　c) B, D　　d) B, D

V) Jakou velikost má výsledný moment sil v případě IV)?

a) $M = 2Fr$　　b) $M = Fr$　　c) $M = \frac{1}{2}Fr$　　d) nulovou

BTO 1.5.1.-11

Na každém konci provazu vedeného přes kladku jsou v téže výšce dvě opice stejné hmotnosti. V určitém okamžiku začne jedna z opic šplhat vzhůru rychlostí 0,5 $m.s^{-1}$ vzhledem k provazu.

I) Jakou rychlostí se tato opice blíží ke kladce?

a) setrvává na stejném místě　　b) 0,25 $m.s^{-1}$　　c) 0,5 $m.s^{-1}$

II) Co se děje s druhou opicí?

a) setrvává na stejném místě

pohybuje se ke kladce rychlostí :   b) 0,25 m.s^{-1} nebo c) 0,5 m.s^{-1}

BTO 1.5.1.-12

Na principu kterého zákona funguje oblíbená dětská hračka JO-JO?

a) zachování hmotnosti b) zachování hybnosti c) síly
d) zachování energie e) setrvačnosti

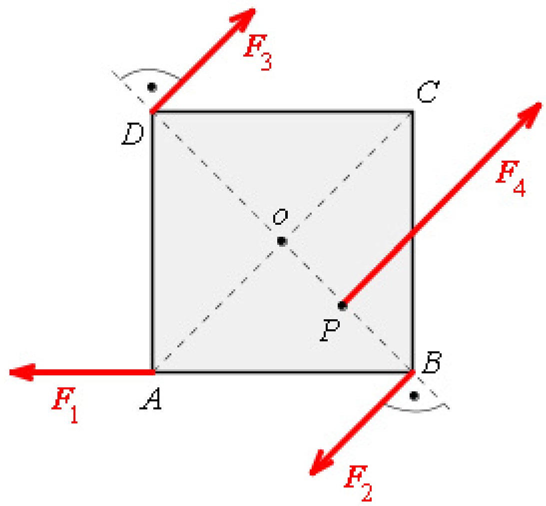
ZTO 1.5.1.-13

Na těleso, které se může otáčet kolem pevné osy, působí konstantní moment síly (různý od nuly). Jaký pohyb bude těleso vykonávat ?

a) bude v klidu b) otáčivý pohyb rovnoměrně zrychlený
c) otáčivý pohyb rovnoměrný d) otáčivý pohyb nerovnoměrný

ZTO 1.5.1.-14

Čtvercová deska o straně a = 2 m je otáčivá kolem pevné osy O. Ve vrcholech A,B,D čtverce působí síly $F_1 = F_2 = F_3 = 10$ N. V bodě P, který je středem úsečky OB je působiště síly F_4.

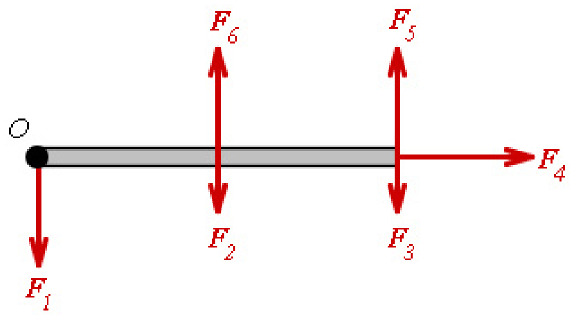


OBR. 1.5.1.-6

I) Jaká je velikost momentu síly F_1 vzhledem k dané ose?
II) Jaká je velikost momentu síly F_2 vzhledem k dané ose?
III) Jaká je velikost momentu síly F_3 vzhledem k dané ose?
IV) Jak velká je síla F_4, kterou se ruší otáčivý účinek síly F_2 na desku?

ZTO 1.5.1.-15

Na tyč otáčivou kolem pevné osy O působí síly $F_1 = F_5 = F_6 = 20$ N, $F_2 = F_3 = 10$ N. Působiště sil F_2 a F_6 leží ve středu tyče. $F_4 = 30$ N.

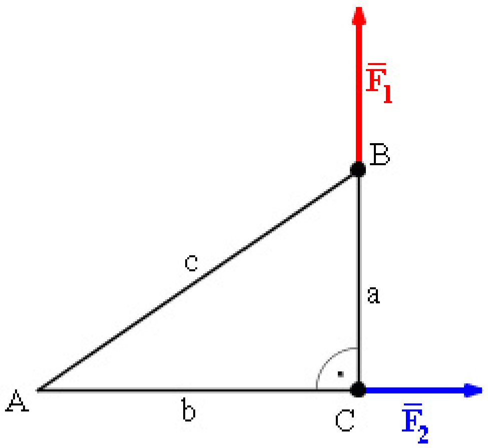


OBR. 1.5.1.-7

a) Které síly působící na tyč mají největší otáčivý účinek?
b) Které síly působící na tyč mají nejmenší otáčivý účinek?
c) Které síly působící na tyč se ve svých otáčivých účincích na tyč vzájemně ruší?

ZTO 1.5.1.-16

Deska tvaru pravidelného trojúhelníku o stranách a = 0,3 m, b = 0,4 m je otáčivá kolem nehybné osy kolmé k desce a jdoucí vrcholem A. Ve vrcholu B působí síla o velikosti 8 N, ve vrcholu C síla o velikosti 6 N. Situace je znázorněna na obrázku.



OBR. 1.5.1.-8

I) Jakou velikost má výslednice sil $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$?

a) 2 N b) 8 N c) 10 N d) 14 N

II) Jakou velikost má moment síly $\vec{F}_1$ vzhledem k ose otáčení?

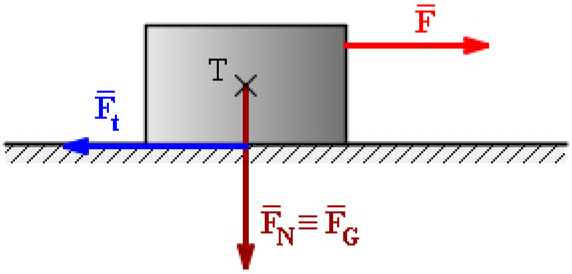
a) 2,4 N.m b) 3,2 N.m d) 4,0 N.m d) 5,6 N.m

ZU 1.5.1.-1

Vypočítejte obvodovou a úhlovou rychlost bodu na povrchu kola automobilu, který jede rychlostí 108 km.h^{-1}. Kolik otáček vykonají kola automobilu za 1 s, jestliže při jednom otočení kola ujede automobil vzdálenost 2 m?

ZŘÚ 1.5.1.-2

Kvádr o hmotnosti 10 kg leží na vodorovné rovině. Jak velkou silou (vodorovnou) na něj musíme působit, aby za dobu 2 s od začátku působení získal rychlost 4 m.s^{-1}? Součinitel smykového tření mezi kvádrem a rovinou je 0,1, tíhové zrychlení uvažujte 10 m.s^{-2}.



OBR. 1.5.1.-9

Řešení:

- budeme-li na těleso působit konstantní silou F, dle důsledku 2. Newtonova pohybového zákona (zákona síly) $F = ma$, udělíme tělesu konstantní zrychlení a
- během působení síly můžeme považovat pohyb tělesa za rovnoměrně zrychlený, jehož rychlost je dána: $v = v_0 + at$
- jelikož těleso bylo na počátku silového působení v klidu, počáteční rychlost je nulová, vztah pro závislost rychlosti na čase se zjednoduší $v = at$
- odsud můžeme určit, s jakým zrychlením se těleso během silového působení vnější síly pohybuje: $a = \dfrac{v}{t}$
- síla $\vec{F}_V$, která udílí tělesu námi určené zrychlení, je výslednicí všech sil, které na těleso během pohybu působí: naše hledaná vnější síla $\vec{F}$ (ve směru pohybu) a proti ní síla smykového tření $\vec{F}_t$, která vzniká na styčných plochách tělesa s podložkou (viz obrázek)
- výsledná síla je tedy dána vektorovým součtem těchto sil $\vec{F}_V = \vec{F} + \vec{F}_t$
- pro velikosti: $F_V = F - F_t$, kde $F_V = ma$
- dosadíme-li za třecí sílu: $F_t = \mu F_N = \mu F_G = \mu mg \Rightarrow F_V = F - \mu mg$
- vyjádříme si hledanou veličinu $F = F_V + \mu mg = ma + \mu mg = m(a + \mu g)$

$$F = m\left(\frac{v}{t} + \mu g\right)$$

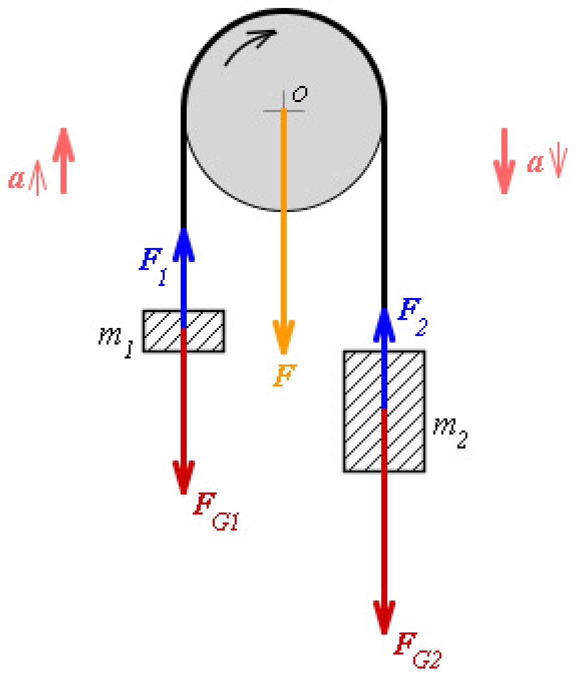
... číselně: F = 30 N

BU 1.5.1.-3
Po nakloněné rovině dlouhé 5 m s úhlem sklonu 30° klouže směrem dolů těleso o hmotnosti 2 kg. Jakou rychlost těleso získá na úpatí nakloněné roviny, je-li součinitel smykového tření mezi tělesem a podložkou 0,05?

BU 1.5.1.-4
Těleso táhneme vzhůru po nakloněné rovině dlouhé 9 m s úhlem sklonu 30°. Součinitel smykového tření je 0,2. S jakou účinností pracujeme (tj. jaký je poměr mezi prací, kterou by vykonala pohybová složka tíhové síly při pohybu dolů z nakloněné roviny a skutečně vykonanou prací vnější síly při rovnoměrném pohybu vzhůru)?

BU 1.5.1.-5
Těleso na konci nakloněné roviny s úhlem sklonu 30° dosáhlo pouze poloviční rychlost, které by mohlo dosáhnout při pohybu bez tření. Určete součinitel smykového tření.

BŘÚ 1.5.1.-6
Na niti vedené přes kladku jsou zavěšena závaží o hmotnostech $m_1 = 0{,}245$ kg a $m_2 = 255$ g. Určete velikost zrychlení závaží a sílu, kterou je namáhána osa kladky. Tření a hmotnost kladky i niti zanedbejte.



OBR. 1.5.1.-10

Řešení:

- nejprve si popišme situaci dle obrázku: na niti přes kladku visí dvě tělesa, na každé ze závaží působí tíhová síla (působiště v těžišti): $\vec{F}_{G1}$, $\vec{F}_{G2}$ a síla niti, na které jsou tělesa zavěšena: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$
- jelikož je nit mezi závažími stejnoměrně napnutá, platí $F_1 = F_2 = F$
- zvolme si směr, ve kterém předpokládáme pohyb závaží (v obrázku vyznačen vektorem zrychlení $\vec{a}$)
- s ohledem na zvolený směr pohybu zapíšeme pohybové rovnice pro každé závaží zvlášť a budeme s nimi pracovat jako se soustavou:

1. těleso: $F - F_{G1} = m_1 a$
2. těleso: $F_{G2} - F = m_2 a$

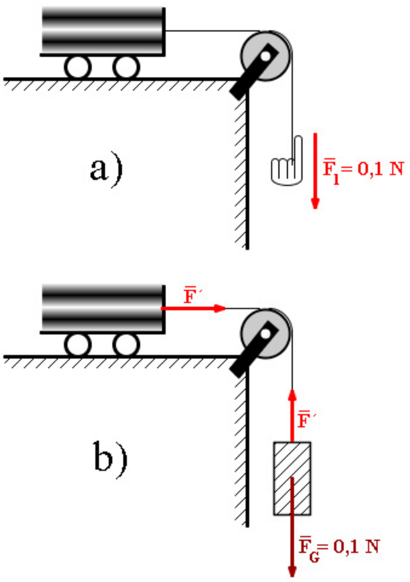
- dosadíme za tíhovou sílu: $F - m_1 g = m_1 a \quad \wedge \quad m_2 g - F = m_2 a$
- sečteme rovnice: $a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1)$
- odtud vyplývá, že velikost zrychlení závaží je $a = \dfrac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$

… číselně $a = 0{,}2$ m.s^{-2}

- síla, která je v obrázku označena $\vec{F}'$, vyjadřuje sílu, kterou je namáhána osa kladky a platí $F' = 2F = 2m_1(a+g) = 2m_2(g-a)$

BU 1.5.1.-7

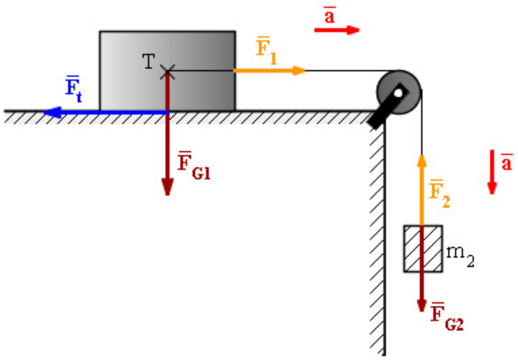
Vozík na vzduchové dráze má hmotnost 250 g a je uváděn na vodorovné podložce do zrychleného pohybu tahem přes pevnou kladku. Porovnejte velikost zrychlení vozíku, jestliže I) táhneme za vlákno rukou silou 0,1 N (zrychlení a_1), nebo II) zavěsíme na vlákno závaží o tíze 0,1 N (zrychlení a_2). Odpověď zdůvodněte. Řešte nejprve úvahou, potom potvrďte výsledek výpočtem pomocí zadaných veličin.



OBR. 1.5.1.-11

BU 1.5.1.-8

Kvádr o hmotnosti 0,5 kg leží na vodorovném stole a je uváděn do pohybu závažím o hmotnosti 0,2 kg, které je k němu připevněno nití vedenou přes kladku dle obrázku. Součinitel smykového tření mezi kvádrem a povrchem stolu je 0,2. Určete zrychlení kvádru a závaží a velikost síly, kterou je napínána nit. Hmotnost kladky a niti zanedbejte.



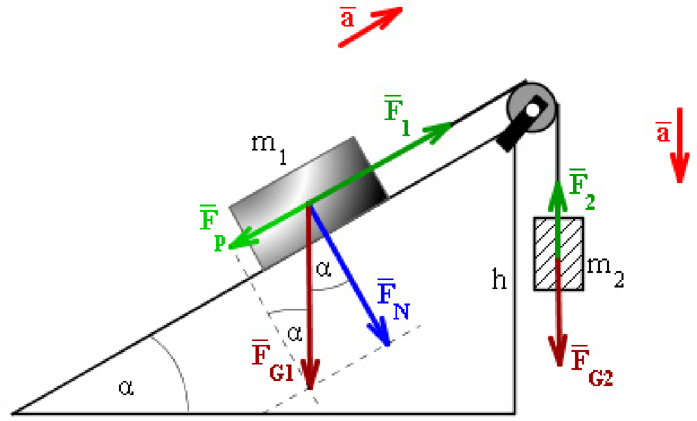
OBR. 1.5.1.-12

BU 1.5.1.-9

Přes pevnou kladku je vedené lanko, na jehož koncích visí ve stejné výšce dvě závaží různých hmotností. Po dvou sekundách od začátku jejich pohybu je rozdíl jejich výšek 48 cm. Určete hmotnost těžšího závaží, pokud lehčí závaží má tíhu 10 N.

BU 1.5.1.-10

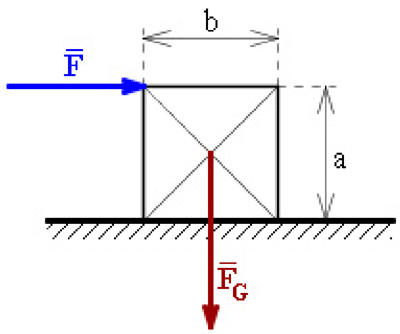
V nejvyšším bodě nakloněné roviny o délce 1,2 m a výšce 0,3 m je upevněna kladka. Na jednom konci nitě vedené přes kladku je upevněno těleso o hmotnosti 0,5 kg, které se pohybuje po nakloněné rovině, na druhém konci visí těleso o hmotnosti 140 g (dle obrázku). Určete zrychlení těles a sílu, kterou je napínána nit. Tření neuvažujte, hmotnost kladky a niti zanedbejte.



OBR. 1.5.1.-13

BLP 1.5.1.-10

Dřevěnou bednu o výšce 1 m a šířce 0,6 m překlopíme účinkem síly 350 N, kterou působíme ve vodorovném směru proti horní hraně tělesa. Jaká je hmotnost bedny?



OBR. 1.5.1.-14

Řešení:

- Vypište z textu úlohy zadané veličiny.
- $a = 1$ m
  $b = 0{,}6$ m
  $F = 350$ N

Bedna se otáčí kolem pravé dolní hrany. Pro obě dvě síly působící na těleso, které je ve stavu rovnováhy, platí momentová věta. Vyslovte a zapište tuto větu.

- Vektorový součet momentů těchto sil musí být roven nule.

  $\Rightarrow$ momenty těchto dvou sil musí být stejně velké, ale opačně orientované (působí na rovnoběžných přímkách).

  $M\left(\vec{F}\right) = M\left(\vec{F}_G\right)$

Stanovte, v jaké vzdálenosti od osy otáčení působí vnější síla.

- Vnější síla působí na vektorové přímce, jejíž vzdálenost od bodu otáčení je a.

Stanovte, v jaké vzdálenosti od osy otáčení působí tíhová síla.

- Vektorová přímka tíhové síly (mající působiště v těžišti) je vzdálena o úsek $b/2$.

Dosaďte vše do momentové věty a vyjádřete neznámou hmotnost.

- Momentová věta a vyjádření neznámé:

$$Fa = mg\frac{b}{2} \;\Rightarrow\; m = \frac{2Fa}{bg} = 119\ \text{kg}$$

BU 1.5.1.-11

Motor o výkonu P = 0,1 kW pohání soustruh. Na soustruhu je upnut dřevěný válec o průměru d = 60 mm a otáčí se s frekvencí 100 Hz. Určete velikost síly, kterou působí nůž na válec, je-li výkon při soustružení roven 80 % výkonu motoru.

BU 1.5.1.-12

Kliková hřídel v automobilovém motoru přenáší při frekvenci 1 800 ot/min výkon 74,6 kW. Určete odpovídající silový moment.

1.5.2. SKLÁDÁNÍ SIL

SHRNUTÍ

Skládání sil ležících na společné přímce:

- působí-li na těleso několik sil, které leží na společné přímce, lze je všechny posunout po této přímce do libovolného společného působiště a sečíst

- velikost výsledné síly je algebraickým součtem velikostí jednotlivých sil s příslušným znaménkem (+ pro síly kladně orientované, - pro síly opačně orientované)

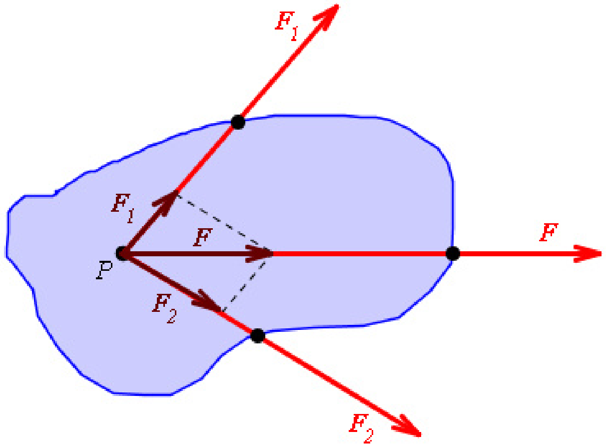
Skládání různoběžných sil:

- postup při skládání dvou různoběžných sil (ležících v jedné rovině) v různých bodech tuhého tělesa:

a) síly posunout po vektorových přímkách do společného průsečíku

b) síly složit dle pravidel vektorové algebry doplněním na rovnoběžník

c) výslednici sil lze opět posunou po její vektorové přímce



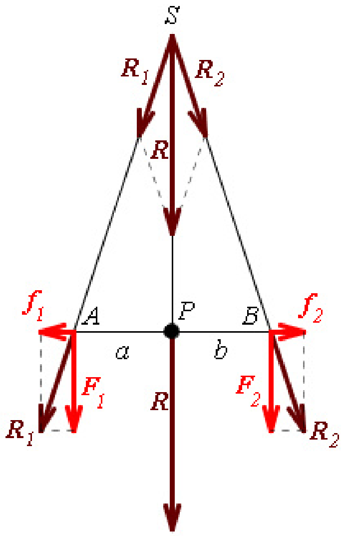
OBR. 1.5.2.-1

Skládání dvou rovnoběžných sil souhlasně orientovaných:

- při skládání dvou sil, které neleží na společné přímce, je nutné nejprve určit jejich společné působiště
- postup dle obrázku přidáním dvou pomocných sil ($\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$) ležících na společné přímce, jejichž účinek se navzájem ruší
- metodou rovnoběžníku jsou určeny výslednice:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{f}_1 \text{ a } \vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{f}_2$$

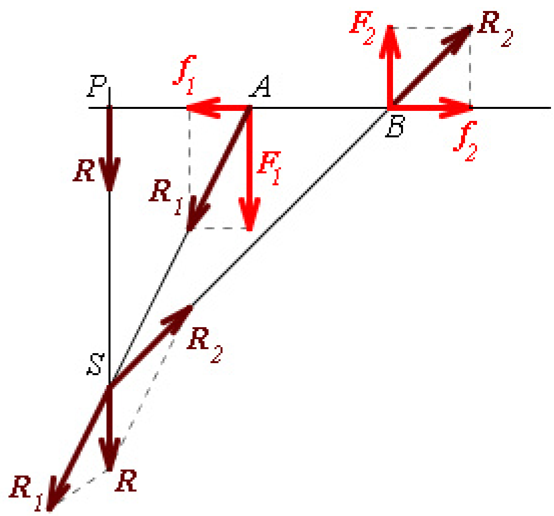
- získané různoběžné síly se skládají dle předchozího předpisu, vektorová přímka jejich výslednice $\vec{R}$ protíná spojnici působišť A, B v bodě P, který určuje působiště výsledné síly



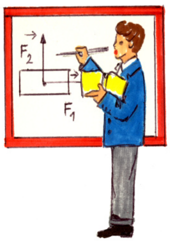
OBR. 1.5.2.-2

Skládání dvou rovnoběžných sil opačně orientovaných:

- mají-li dvě rovnoběžné síly neležící v jedné přímce opačný směr, avšak nestejnou velikost, lze je skládat analogicky jako u sil orientovaných souhlasně
- výsledná síla má směr větší z obou sil, její velikost je dána rozdílem absolutních hodnot obou sil
- působiště výsledné síly leží vně působišť obou sil a to na straně větší z nich

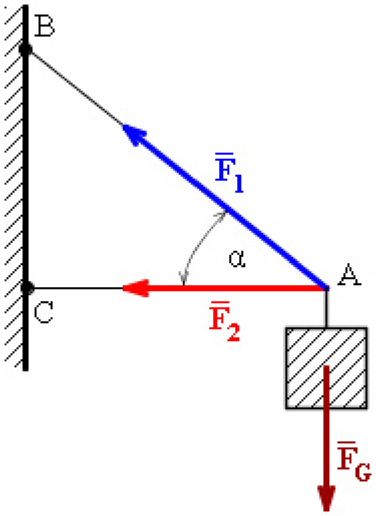


OBR. 1.5.2.-3



ZŘU 1.5.2.-1

Ramena konzoly AB a AC (dle obrázku) mohou být zatížena maximálními silami 2100 N a 1700 N. Jak velký úhel musí ramena svírat a jakou největší zátěž mohou nést?



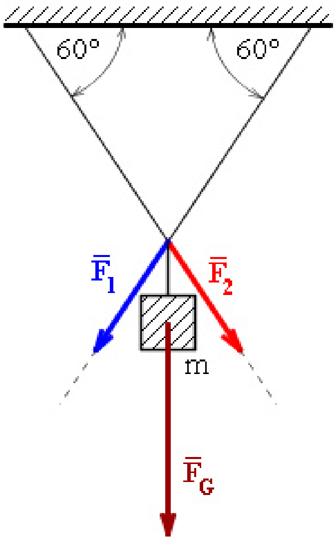
OBR. 1.5.2.-4

Řešení:

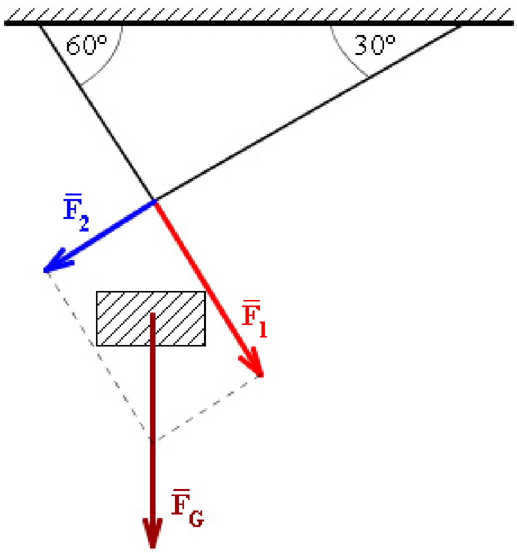
- z trojúhelníka ABC vyplývá: $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow \alpha = 36°$
- zátěž: $F_G = F_1 \sin\alpha$, po číselném dosazení 1234 N

ZU 1.5.2.-2

Vypočtěte velikosti sil působících na každé lano závěsu (dle obrázku 1.5.2.-5 a 1.5.2.-6), je-li hmotnost závaží m, hmotnosti lan jsou zanedbatelné.



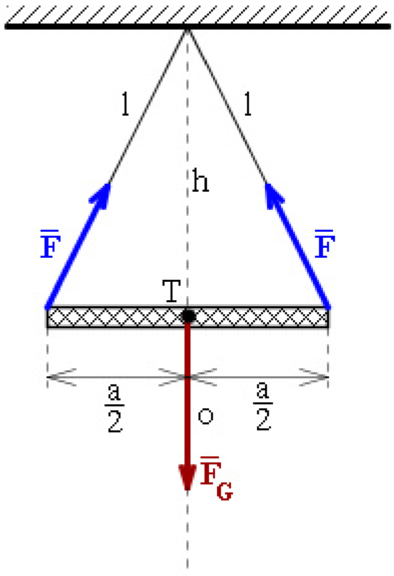
a) OBR. 1.5.2.-5



b) OBR. 1.5.2.-6

BU 1.5.2.-3

Homogenní tyč o délce 0,8 m a hmotnosti 6 kg je zavěšena na dvou vláknech o stejné délce 0,5 m (dle obrázku). Určete tahové síly, kterými vlákna působí na tyč.



OBR. 1.5.2.-7

ZU 1.5.2.-4

Najděte velikost a působiště výslednice dvou rovnoběžných sil o velikostech 30 N a 60 N, jejichž vektorové přímky jsou od sebe vzdáleny o 2,1 m, jsou-li síly a) souhlasně orientovány, b) nesouhlasně orientovány.

1.5.3. TĚŽIŠTĚ TUHÉHO TĚLESA

SHRNUTÍ

- působiště tíhové síly:

$$x_T = \frac{1}{m}\int_m x\,\mathrm{d}m, \quad y_T = \frac{1}{m}\int_m y\,\mathrm{d}m, \quad z_T = \frac{1}{m}\int_m z\,\mathrm{d}m$$

pro **homogenní** těleso (ρ=konst):

$$x_T = \frac{1}{V}\int_V x\,\mathrm{d}V, \quad y_T = \frac{1}{V}\int_V y\,\mathrm{d}V, \quad z_T = \frac{1}{V}\int_V z\,\mathrm{d}V$$

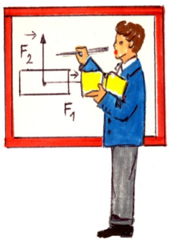
Má-li těleso střed symetrie, je také těžištěm, má-li osu nebo rovinu symetrie, leží těžiště na ní.

ZTO 1.5.3.-1

V rovině Oxy jsou umístěny tři hmotné body A, B, C. Jejich hmotnosti a souřadnice (v metrech) jsou: A [3 m,4 m], m_A = 2 kg, B [-2 m,-1 m], m_B = 4 kg, C [4 m,-3 m], m_C = 6 kg. Najděte souřadnice hmotného středu.

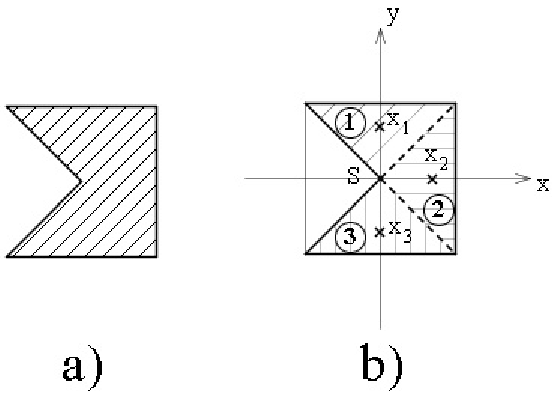
ZTO 1.5.3.-2

Dvě tělesa o hmotnostech m_1 = 0,3 kg a m_2 = 0,5 kg leží na ose x : x_1 = 2 m a x_2 = -3 m. Kde musíte umístit třetí těleso hmotnosti 0,3 kg tak, aby hmotný střed této soustavy byl v počátku souřadnic?



ZŘU 1.5.3.-3

Z homogenního čtverce o straně a vystřihneme trojúhelník (dle obrázku). Určete polohu těžiště zbylého útvaru.



OBR. 1.5.3.-1

Řešení:

- těleso si umístíme vhodně do soustavy souřadnic – viz obrázek
- tento útvar je homogenní, izotropní a má prvek symetrie – osa (která je na obr. ztotožněna s x-ovou osou souřadnic)
- má-li těleso prvek symetrie, leží těžiště na tomto prvku
- jelikož víme, že těžiště leží na ose x, y-ová souřadnice bude nulová
- celé těleso si můžeme představit složené ze tří stejných částí, tří shodných trojúhelníků, která mají stejný obsah i hmotnost: $S_1 = S_2 = S_3$, $m_1 = m_2 = m_3$
- určeme x-ové souřadnice těžiště jednotlivých částí útvaru: $x_1 = 0,\ \ x_2 = a/3,\ \ x_3 = 0$

Pozn. Při stanovení souřadnice druhého trojúhelníku jsme využili poznatku, že těžiště rovnoramenného trojúhelníka leží ve dvou třetinách jeho výšky, tj. $\frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$

- stanovme x-ovou souřadnici soustavy těchto tří trojúhelníků, které tvoří zadaný útvar:

$$x_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{3} x_k m_k \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_0 = \frac{0 + \frac{a}{3}m + 0}{3m} = \frac{a}{9}$$

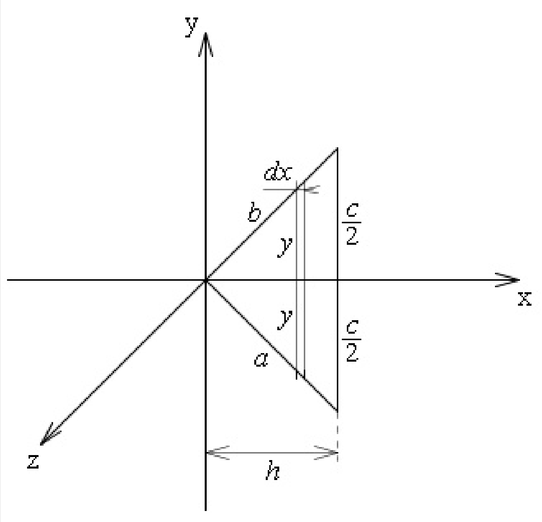
- Těžiště je na ose symetrie ve vzdálenosti $\frac{1}{9}a$ od středu čtverce.

BLP 1.5.3.-4

Určete polohu těžiště homogenní desky zanedbatelné tloušťky ve tvaru rovnoramenného trojúhelníka o výšce h.

Řešení:

- Zakreslete si obrázek do soustavy souřadnic tak, aby jeho osa symetrie ležela na některé ze souřadných os (např. na ose x) a vrchol kužele byl v počátku soustavy souřadnic. Rozdělte těleso na elementy (úzké obdélníky) o délce y a tloušťce $\mathrm{d}x$.



OBR. 1.5.3.-2

Těžiště bude určitě ležet na ose x, proto y-ová souřadnice těžiště bude nulová. Těleso, které má zanedbatelnou tloušťku, charakterizujeme pomocí plošné hustoty σ. Zapište definiční vztah pro stanovení x-ové souřadnice homogenního tělesa.

- $$x_T = \frac{1}{V}\int_V x\mathrm{d}V = \frac{1}{\sigma S}\int_S x\mathrm{d}(\sigma S) = \frac{1}{S}\int_S x\mathrm{d}S$$

Zapište vztah po výpočet plochy celého útvaru a pro zvolený element plochy.

- $$S = \frac{1}{2}hc,\quad \mathrm{d}S = 2y\mathrm{d}x$$

Dosaďte vše do vztahu pro výpočet těžiště.

- $$x_T = \frac{2}{ch}\int_0^h x2y\mathrm{d}x$$

Upravte vztah pomocí pravidel pro podobnost trojúhelníků.

- Pro podobné trojúhelníky platí:

$$\frac{x}{y} = \frac{h}{\frac{c}{2}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2h}{c} \Rightarrow y = \frac{cx}{2h}$$

Dosaďte do rovnice těžiště a upravte.

- $$x_T = \frac{2}{ch}\int_0^h x\frac{xc}{2h}2\mathrm{d}x = \frac{2}{h^2}\int_0^h x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{2h}{3}$$

Těžiště leží na ose symetrie ve vzdálenosti $\frac{2}{3}h$ od vrcholu.

ZU 1.5.3.-5

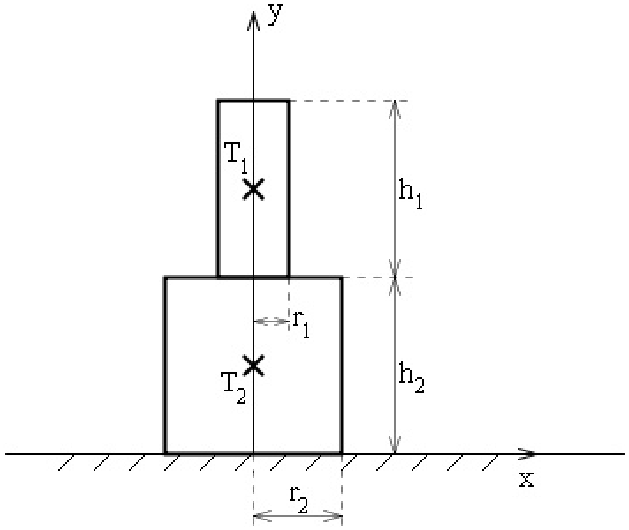
Tři tělesa o hmotnostech $m_A = 1$ kg, $m_B = 2$ kg, $m_C = 3$ kg jsou rozložena v prostoru tak, že jejich souřadnice jsou: $A[2\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m}, -1\,\mathrm{m}]$, $B[4\,\mathrm{m}, -4\,\mathrm{m}, 7\,\mathrm{m}]$, $C\ [1\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m}]$. Určete souřadnice jejich hmotného středu.

BU 1.5.3.-6

Určete těžiště poloviny homogenní koule o poloměru R.

BU 1.5.3.-7

Určete polohu těžiště homogenního tělesa vytvořeného ze dvou souosých válců o parametrech r_1, h_1, r_2, h_2.



OBR. 1.5.3.-3

ZU 1.5.3.-8

Žulový čtyřboký pravidelný hranol má podstavnou hranu 60 cm a výšku 80 cm. Jakou práci musíme vykonat, abychom hranol překlopili z rovnovážné polohy stálé do rovnovážné polohy vratké, stojí-li na vodorovné rovině čtvercovou stěnou? Hustota žuly je 2500 kg.m^{-3}.

1.5.4. ENERGIE TUHÉHO TĚLESA

SHRNUTÍ

Posuvný pohyb TT:

- **celková hmotnost a hybnost** tělesa:

$$m = \int \mathrm{d}m, \quad \vec{p} = \int \mathrm{d}\vec{p} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$$

- **celková kinetická energie** pohybujícího se tělesa:

$$E_k = \int \frac{1}{2} v^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2} v^2 \int \mathrm{d}m \Rightarrow E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

Moment setrvačnosti tuhého tělesa: $J = \int_m r^2 dm$

jednotka momentu setrvačnosti: kg.m^2

Steinerova věta:

- pro stanovení momentu setrvačnosti TT rotujícího kolem pevné osy o', která neprochází těžištěm, kde a je její vzdálenost od rovnoběžné osy o procházející těžištěm
- moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí bodem A rovnoběžné s osou jdoucí těžištěm T je:

$$J = ma^2 + J_0$$

„Moment setrvačnosti tělesa *J* vzhledem k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti HB v těžišti, jehož hmotnost je rovna hmotnosti tělesa, vzhledem k této ose zvětšenému o moment setrvačnosti J_0 tělesa vzhledem k rovnoběžné ose jdoucí těžištěm.“

Práce a výkon při rotačním pohybu TT:

- celková práce: $W = \int_{\vec{\varphi}_1}^{\vec{\varphi}_2} \vec{M} \mathrm{d}\vec{\varphi}$

- výkon: $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\vec{\omega}$

MOMENTY SETRVAČNOSTI VYBRANÝCH TĚLES:

a) tenká homogenní tyč: $J = \dfrac{1}{12}ml^2$

b) homogenní válec (kotouč): $J = \dfrac{1}{2}mr^2$

c) homogenní koule: $J = \dfrac{2}{5}mr^2$

Rotační pohyb TT kolem nehybné osy:

- celková energie tuhého tělesa:

$$E_k = \int \frac{1}{2}v^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int v^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int r^2\omega^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}J\omega^2$$

kde $\int r^2 \mathrm{d}m$ je **moment setrvačnosti J**

Pohybová rovnice pro pohyb tělesa kolem pevné osy:

$$b = \int \mathrm{d}b_k = \omega \int r_k^2 \mathrm{d}m = \omega J \,,$$ vektorově: $\vec{b} = J\vec{\omega}$

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}(J\vec{\omega})}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\vec{\varepsilon}$$

Složený pohyb TT:

- je složením pohybu translačního s pohybem rotačním
- kinetická energie: $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}J_0\omega^2$, kde J_0 je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm

ZTO 1.5.4.-1

Krasobruslař se otáčí s roztaženýma rukama při piruetě kolem svislé osy jdoucí středem jeho těla. Jak se změní jeho moment setrvačnosti, když přitáhne ruce k tělu?

a) zmenší se b) zvětší se c) nezmění se

ZTO 1.5.4.-2

Válec o poloměru 0,4 m má hmotnost 100 kg a moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení 8 kg.m^2. Předpokládejte, že tíhové zrychlení má velikost 10 m.s^{-2}.

I) Jakou kinetickou energii má válec, pohybuje-li se posuvným pohybem rychlostí 3 m.s^{-1}?

a) 36 J b) 72 J c) 450 J d) 900 J

II) Jakou kinetickou energii má válec, otáčí-li se kolem své rotační osy úhlovou rychlostí 3 rad.s^{-1}?

a) 36 J b) 72 J c) 450 J d) 900 J

BTO 1.5.4.-3

Na volně otáčivé stoličce sedí člověk a drží v roztažených rukou dvě stejná závaží. Rotuje s frekvencí 1 Hz a jeho moment setrvačnosti je 3 kg.m^2. Přitáhne-li závaží k sobě, bude mít moment setrvačnosti 2 kg.m^2 S jakou frekvencí bude rotovat?

ZTO 1.5.4.-4

Koule A o hmotnosti 8 kg je spojena s koulí B o hmotnosti 2 kg tenkou tyčí o délce 1 m , dle obrázku. Koule považujte za hmotné body, hmotnost tyče zanedbejte.

OBR. 1.5.4.-1

I) V jaké vzdálenosti od koule A je těžiště soustavy?

a) 0,1 m b) 0,2 m c) 0,5 m d) 0,8 m

II) Jaký je moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose kolmé k tyči a procházející jejím středem?

a) 16 kg.m^2 b) 10 kg.m^2 c) 5 kg.m^2 d) 2,5 kg.m^2

ZTO 1.5.4.-5

Moment setrvačnosti homogenního kotouče vzhledem k ose jdoucí těžištěm kolmo na rovinu kotouče je m.r^2/2. Moment setrvačnosti kotouče poloměru 1 m, který rotuje kolem osy kolmé na rovinu kotouče a procházející ve vzdálenosti 1 m od těžiště je 6 kg.m^2. Určete hmotnost kotouče.

ZTO 1.5.4.-6

Moment setrvačnosti homogenní koule hmotnosti *m* a poloměru *R* vzhledem k ose jdoucí těžištěm je 2.m.R^2/5. Určete moment setrvačnosti této koule vzhledem k ose, která se koule dotýká.

ZTO 1.5.4.-7

Jak se změní kinetická energie rotujícího tělesa změnou polohy rotační osy rovnoběžným posunutím mimo těžiště za předpokladu, že úhlová rychlost se nezmění ?

a) zvýší b) nezmění c) sníží

BTO 1.5.4.-8

Těleso otáčivé kolem pevné osy se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí 2 rad/s. Moment setrvačnosti tělesa je 3 $kg.m^2$. Jaká práce se vykoná při pootočení tělesa o 30°?

ZTO 1.5.4.-9

Vypočítejte kinetickou energii válce hmotnosti 10 kg, který se valí po vodorovné rovině. Těžiště válce se pohybuje rychlostí 10 m/s, tření neuvažujte, $J_o = 0{,}5\ m.r^2$.

BTO 1.5.4.-10

Plný válec hmotnosti m a poloměru r <u>klouže</u> bez tření po nakloněné rovině úhlu α. $J_o = m.r^2/2$. S jakou rychlostí dospěje na konec nakloněné roviny, začíná-li se pohybovat z výšky H?

BTO 1.5.4.-11

Plný válec hmotnosti m a poloměru r <u>se valí</u> bez prokluzování po nakloněné rovině úhlu α. $J_o = m.r^2/2$. S jakou rychlostí dospěje na konec nakloněné roviny, začíná-li se valit z výšky H?

BU 1.5.4.-1

Setrvačník s momentem setrvačnosti 50 $kg.m^2$ se roztáčí z klidu. Za jakou dobu dosáhne frekvence 10 Hz, působí-li na něj moment síly o velikosti 314 N.m?

BU 1.5.4.-2

Jaký je moment setrvačnosti setrvačníku, jehož otáčky klesnou po vykonání práce 1260 J z 320 za minutu na 254 za minutu?

BU 1.5.4.-3

Do jaké výšky by vystoupalo auto jedoucí vzhůru do kopce, které je poháněné pouze setrvačníkem s momentem setrvačnosti 10 $kg.m^2$? Setrvačník vykonává 3600 otáček za minutu. Hmotnost auta je 600 kg. Tření a odpor vzduchu zanedbáváme.

BU 1.5.4.-4

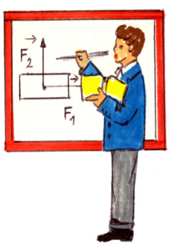
Na setrvačník, jehož moment setrvačnosti je 3 $kg.m^2$ působí moment síly 6 N.m. Za jak dlouho setrvačník zvětší svou úhlovou rychlost z hodnoty 3 rad/s na 12 rad/s?

BU 1.5.4.-5

Na setrvačník, jehož moment setrvačnosti je 3 $kg.m^2$ působí moment síly 6 N.m. Za jak dlouho nabude setrvačník úhlové rychlosti 12 s^{-1}, jestliže jeho počáteční úhlová rychlost byla nulová?

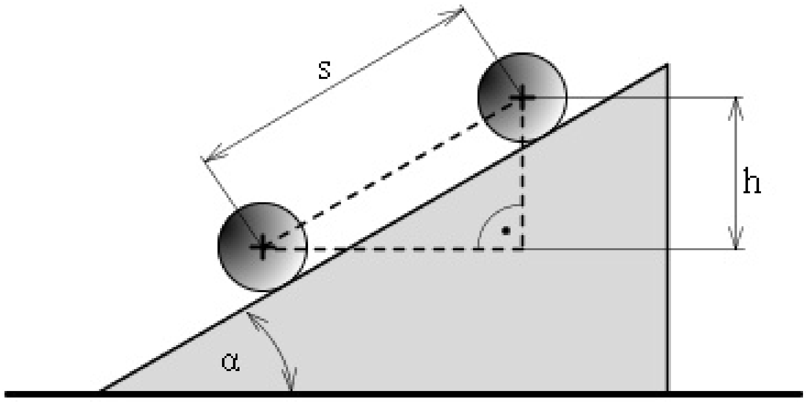
ZU 1.5.4.-6

Určete celkovou kinetickou energii a) tenké obruče, b) plného homogenního válce, c) plné homogenní koule, valí-li se tělesa bez klouzání po vodorovné rovině rychlostí v. Každé těleso má stejnou hmotnost m a poloměr R.



BŘU 1.5.4.-7

Homogenní válec se valí bez prokluzování po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°. Určete zrychlení válce, je-li jeho počáteční rychlost nulová.



OBR. 1.5.4.-2

Řešení:

- vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie
- ve vztahu pro kinetickou energii nesmíme zapomenout, že těleso koná pohyb složený: tj. posuvný i otáčivý
- celková změna kinetické energie je rovna změně energie potenciální:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh = mgs\sin\alpha$$

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r} = mgs\sin\alpha$, kde $J = \frac{1}{2}mr^2$ je moment setrvačnosti válce

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mr^2\frac{v^2}{r} = mgs\sin\alpha$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = mgs\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}v^2 = gs\sin\alpha$$

- uražená dráha rovnoměrně zrychleným pohybem: $s = \frac{1}{2}at^2$
- získaná rychlost po uražení dráhy s: $v = at$
- po dosazení do rovnice pro energii tělesa

$$\frac{3}{4}a^2t^2 = g\frac{1}{2}a^2t^2\sin\alpha$$

- po úpravě: $\frac{3}{4}a = \frac{1}{2}g\sin\alpha$
- dosadíme-li velikost úhlu sklonu nakloněné roviny: $\frac{3}{4}a = \frac{1}{2}g\frac{1}{2}$
- z toho plyne výsledný vztah pro zrychlení válce během pohybu: $a = \frac{1}{3}g$

BU 1.5.4.-8

Svislý homogenní sloup o konstantním průřezu a výšce h byl podřezán u země a spadl. Určete a) jakou rychlostí dopadl na zem koncový bod sloupu, b) který bod sloupu bude mít v okamžiku dopadu na zem stejnou rychlost, jako kdyby padal ze své výšky volným pádem.

BU 1.5.4.-9

Tenká tyč o hmotnosti 1 kg a délce 1 m je otáčivá kolem vodorovné osy jdoucí koncovým bodem tyče kolmo k tyči. Tyč dáme do nejvyšší polohy a uvolníme. Určete, jakou rychlostí proběhne koncový bod tyče nejnižší polohou a jak velkou silou je namáhána osa při průchodu tyče nejnižší polohou.

1.6. MECHANICKÉ KMITÁNÍ

SHRNUTÍ

Kmitavý pohyb je periodický přímočarý pohyb. Vykonává ho např. těleso zavěšené na pružině, které po vychýlení pružiny kmitá (oscilátor). Základními charakteristikami jsou **frekvence kmitu *f*** (Hz), **doba kmitu *T*** (s), **úhlová frekvence *ω*** (rad.s^{-1}), **okamžitá výchylka *y*** (m), **amplituda výchylky kmitu (výkmit) *A*** (m).

1.6.1. NETLUMENÉ KMITÁNÍ

SHRNUTÍ

Kmitavý pohyb charakterizuje rovnice pro okamžitou výchylku:

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

kde φ je počáteční fáze, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, $f = \frac{1}{T}$.

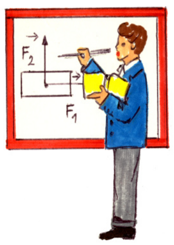
Pro **okamžitou rychlost *v*** (m.s^{-1}) a **okamžité zrychlení *a*** (m.s^{-2}) platí rovnice:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right), a = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Síla pružnosti *F* způsobující harmonický kmitavý pohyb oscilátoru je $F = -k\,y$, kde $k = m\omega^2$ je **tuhost pružiny**. Jednotkou tuhosti pružiny je (N.m^{-1}).

Pohybová rovnice netlumeného kmitavého pohybu je $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0$.

Kinetická energie *E_k* je vyjádřena vztahem $E_k = \frac{1}{2} m\,v^2$, **potenciální energii pružnosti** E_p charakterizuje vztah $E_p = \frac{1}{2} k\,y^2$. Jednotkou energie je (J). Součet obou energií je u netlumeného kmitavého pohybu konstantní. $E_k + E_P = E = \mathrm{konst}$



ZŘU 1.6.1-1

Kmitavý pohyb je popsán rovnicí: $y = 0{,}04\sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Určete: a) amplitudu kmitu,
b) úhlovou frekvenci
c) počáteční fázi
d) frekvenci a periodu kmitu

Řešení:

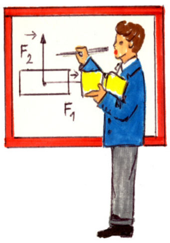
Podle vztahu pro okamžitou výchylku $y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$ **srovnáním** určíme:

a) A= 0,04 m

b) $\omega = 6\pi$ rad.s^{-1}

c) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ rad

d) použijeme vztah $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{6\pi}{2\pi} = 3$ Hz , pro periodu a frekvenci platí $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{3}$ s



ZŘU 1.6.1-2

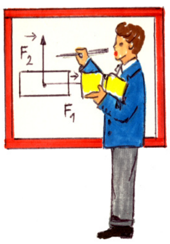
Jaká je doba kmitu harmonického oscilátoru, jestliže zavěšené těleso na pružině má hmotnost 10 g a síla působící při výchylce 3 cm je 5.10^{-2} N?

Řešení:

m =0,01 kg, y = 0,03 m, F = 5.10^{-2} N, T = ?

Souvislost mezi dobou kmitu a úhlovou frekvencí je určena vztahem $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Zároveň platí $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. Pak použitím obou vztahů je $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Tuhost pružiny k je nutno vyjádřit ze vztahu pro sílu pružnosti $F = k\,y$. Pak vztah $k = \dfrac{F}{y}$ dosadíme do jmenovatele předchozího zlomku a dostaneme $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\,y}{F}}$. Po dosazení číselných hodnot $T = 2.3{,}14\sqrt{\dfrac{0{,}01.0.03}{5.10^{-2}}} = 0{,}49\,\mathrm{s}$



ZŘU 1.6.1-3

Těleso hmotnosti 0,01 kg koná netlumený harmonický pohyb. Určete jeho dobu kmitu víte-li, že při výchylce 9.10^{-2} m působí na těleso síla 3.10^{-4} N.

Řešení:

m = 0,01 kg, y = 9.10^{-2} m, F = 3.10^{-4} N, T = ?

Podobně jako u předchozího příkladu

$F = k\,y \Rightarrow k = \dfrac{F}{y} \Rightarrow m\omega^2 = \dfrac{F}{y} \Rightarrow m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = \dfrac{F}{y} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\,y}{F}}$. Po dosazení zadaných hodnot je T = 10,88 s

ZTO 1.6.1-4

Kmitavý pohyb popisuje rovnice $y = 0{,}5\sin\left(8\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Amplituda pohybu je:

a) 8 m

b) $\dfrac{\pi}{4}$ rad

c) 0,5 m

d) 8π rad

ZTO 1.6.1-5

Kmitavý pohyb popisuje rovnice $y = 0{,}5\sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$. Počáteční fáze pohybu je:

a) 8 m
b) $\frac{\pi}{4}$ rad
c) 0,4 m
d) 8π rad

ZTO 1.6.1-6

Kmitavý pohyb popisuje rovnice $y = 0{,}5\sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$. Úhlová frekvence pohybu je:

a) 8 m
b) $\frac{\pi}{4}$ rad
c) 0,4 m
d) 8π rad.s^{-1}

ZTO 1.6.1-7

Kmitavý pohyb popisuje rovnice $y = 0{,}5\sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$. Frekvence pohybu je:

a) 8 m
b) 4 Hz
c) 0,4 m
d) 8π rad

ZTO 1.6.1-8

Kmitavý pohyb popisuje rovnice $y = 0{,}5\sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$. Perioda pohybu je:

a) 8 m
b) 4 Hz
c) 0,4 m
d) 0,25 s

ZTO 1.6.1-9

Těleso hmotnosti m je zavěšeno na pružině tuhosti *k* a koná netlumený harmonický pohyb. Frekvence kmitů závisí na:

a) hmotnosti zavěšeného tělesa *m*
b) amplitudě kmitů y_m
c) tuhosti pružiny *k*
d) velikosti okamžité výchylky tělesa *y*

ZTO 1.6.1-10

Těleso koná harmonický pohyb podle rovnice $y = 2\sin 3t$. Napište rovnici pro rychlost.

a) $v = 6t\cos 3t$, b) $v = 6\cos 3t$, c) $v = 2\cos 3t$, d) $v = 2\pi\cos 3t$

ZTO 1.6.1-11
Těleso koná harmonický pohyb tak, že amplituda je 0,2 m, frekvence 3 Hz, fázový posuv je nulový. Určete, jakou rychlostí prochází těleso rovnovážnou polohou.
a) 0,2 $m.s^{-1}$, b) 1,2 $m.s^{-1}$, c) 0,6 $m.s^{-1}$, d) 1,2 π $m.s^{-1}$

ZTO 1.6.1-12
Těleso konající netlumený harmonický pohyb má maximální rychlost:
a) v bodě vratu b) v rovnovážné poloze

ZTO 1.6.1-13
Těleso konající netlumený harmonický pohyb má maximální zrychlení:
a) v bodě vratu b) v rovnovážné poloze

ZTO 1.6.1-14
Těleso konající netlumený harmonický pohyb má maximální kinetickou energii:
a) v bodě vratu b) v rovnovážné poloze

ZTO 1.6.1-15
Těleso konající netlumený harmonický pohyb má maximální potenciální energii pružnosti:
a) v bodě vratu b) v rovnovážné poloze

ZTO 1.6.1-16
Těleso koná netlumený harmonický pohyb. V bodě vratu má potenciální energii 30 J. Jakou má kinetickou energii v rovnovážné poloze?
a) 0 J, b) 15 J, c) 60 J d)30 J

ZTO 1.6.1-17
Těleso koná harmonický pohyb podle rovnice $y = 2\sin 3t$. Jakou rychlost má v bodě vratu?
a) 6 $m.s^{-1}$, b) 5 $m.s^{-1}$, c) 1,5 $m.s^{-1}$, d) 3t $m.s^{-1}$

ZTO 1.6.1-18
Těleso o hmotnosti 2 kg koná harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2\sin 3t$. Jakou má kinetickou energii v rovnovážné poloze?
a) 0 J, b) 0,36 J, c) 0,04 J, d) 0,2 J

ZTO 1.6.1-19
Těleso o hmotnosti 2 kg koná harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2\sin 3t$. Jakou má potenciální energii pružnosti v rovnovážné poloze?
a) 0 J b) 0,6 J c) 3 J, d) 9 J

ZTO 1.6.1-20
Určete úhlovou frekvenci kmitavého pohybu ω při frekvenci kmitu 2 Hz.
a) 0,5 $rad.s^{-1}$, b) 2π $rad.s^{-1}$, c) 8π $rad.s^{-1}$, d) 4π $rad.s^{-1}$,

ZTO 1.6.1-21
Určete úhlovou frekvenci kmitavého pohybu ω o periodě 2 s.
a):0,5.rad s^{-1}, b) 2π $rad.s^{-1}$, c) π $rad.s^{-1}$, d) 4π $rad.s^{-1}$,

ZTO 1.6.1-22

Těleso o hmotnosti 2 kg kmitá s úhlovou frekvencí 3 $rad.s^{-1}$. Určete tuhost pružiny *k*.

a) 18 $N.m^{-1}$, b) 6 $N.m^{-1}$, c) 12 $N.m^{-1}$, d) 36 $N.m^{-1}$,

ZTO 1.6.1-23

Určete sílu působící na těleso při výchylce 0,2 m, jestliže tuhost pružiny je 25 $N.m^{-1}$.

a) 5 N, b) 50 N, c) 100 N, d) 10 N,

ZTO 1.6.1-24

Určete okamžitou výchylku kmitavého pohybu, jestliže na těleso působí síla 10 N a tuhost pružiny je 20 $N.m^{-1}$.

a) 100 m, b) 0,5 m, c) 200 m, d) 2 m,

ZTO 1.6.1-25

Určete tuhost pružiny, jestliže okamžitá výchylka má při působící síle 30 N velikost 15 cm.

a) 2 $N.m^{-1}$, b) 200 $N.m^{-1}$, c) 4,5 $N.m^{-1}$, d) 45 $N.m^{-1}$,

ZTO 1.6.1-26

Těleso o hmotnosti 0,2 kg kmitá s úhlovou frekvencí 6 $rad.s^{-1}$. Určete velikost působící síly při výchylce 0,5 m.

a) 3,6 N, b) 36 N, c) 6 N, d) 60 N,

ZTO 1.6.1-27

Těleso o hmotnosti 1 kg kmitá s úhlovou frekvencí 2 $rad.s^{-1}$. Určete výchylku tělesa při působící síle 20 N.

a) 10 m, b) 5 m, c) 4 m, d) 16 m,

ZTO 1.6.1-28

Stanovte hmotnost tělesa kmitajícího s úhlovou frekvencí 2 $rad.s^{-1}$, které má při působící síle 8 N okamžitou výchylku 0,2 m.

a) 10 kg, b) 3,2 kg, c) 0,8 kg, d) 16 kg,

BTO 1.6.1-29

Které z uvedených rovnic jsou pohybové rovnice netlumeného harmonického pohybu ?

a) $ma + ky = 0$

b) $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$

c) $m\dfrac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

d) $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

ZTO 1.6.1-30

Zrychlení tělesa, konajícího netlumený harmonický pohyb, je nulové

a) v rovnovážné poloze

b) v bodě vratu

c) nikdy

ZTO 1.6.1-31
Těleso, konající netlumený harmonický pohyb, má maximální zrychlení

a) v rovnovážné poloze
b) v bodě vratu

ZU 1.6.1-32
Hmotný bod koná netlumený harmonický pohyb tak, že při výchylce 0,03 m působí na hmotný bod síla velikosti 6 N. Určete velikost působící síly při výchylce 0,01 m.

ZU 1.6.1-33
Těleso hmotnosti 80 g koná netlumený harmonický pohyb. Při výchylce 0,03 m na něj působí síla 6 N. Určete velikost úhlové frekvence.

ZU 1.6.1-34
Těleso zavěšené na pružině koná netlumený harmonický pohyb. Jeho amplituda je 4 cm a doba kmitu 2 s. Vypočítejte čas, za který těleso urazí dráhu z rovnovážné polohy do bodu vratu.

ZU 1.6.1-35
Kulička zavěšená na pružině koná netlumený harmonický pohyb s amplitudou výchylky 20 cm a s periodou (dobou kmitu) 0,5 s. Určete její frekvenci.

ZU 1.6.1-36
Kulička zavěšená na pružině koná netlumený harmonický pohyb s amplitudou výchylky 20 cm a s periodou (dobou kmitu) 0,5 s. Určete dobu za kterou kulička urazí dráhu 40 cm.

ZU 1.6.1-37
Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice: $y = 0{,}1\sin\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$ (m.s^{-1})

a) Čemu je rovna kruhová frekvence tohoto pohybu ? b) Určete frekvenci.
d) Napište čemu je rovna fáze.
e) Jak velký je fázový posuv (počáteční fáze)?
f) Jak veliká je amplituda výchylky?

ZU 1.6.1-38
Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 7\sin(0{,}5\pi t)$ (m,s). Za jak dlouho se dostane těleso z rovnovážné polohy do bodu vratu ?

ZU 1.6.1-39
Těleso koná netlumený harmonický pohyb s amplitudou výchylky 1 m. Jak daleko od rovnovážné polohy se těleso nachází v čase t = 0 s, jestliže počáteční fáze je 45^0 ?

ZU 1.6.1-40
Těleso koná netlumený harmonický pohyb s amplitudou výchylky 0,05 m. Za jednu minutu vykoná 150 kmitů a jeho počáteční fáze je 45^0. Napište rovnici pro okamžitou rychlost.

ZU 1.6.1-41
Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 6\cos 3t$ (m,s)
Napište rovnici pro rychlost tělesa.

ZU 1.6.1-42

Těleso koná netlumený harmonický pohyb s rychlostí, která je dána rovnicí $v = 6\cos 3t$ (m/s,s). Určete amplitudu výchylky.

ZU 1.6.1-44

Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = A\sin(\omega t)$ (m,s).

Určete rychlost tělesa v čase $t = \frac{T}{4}$.

ZU 1.6.1-45

Rovnice rychlosti tělesa, konajícího netlumený harmonický pohyb je $v = 6\cos 3t$ (m/s,s). S jakou rychlostí prochází těleso rovnovážnou polohu ?

ZU 1.6.1-46

Rovnice rychlosti tělesa, konajícího netlumený harmonický pohyb, je $v = 6\cos 3t$ (m/s,s). Jakou rychlost má toto těleso v bodech vratu ?

ZU 1.6.1-47

Těleso koná netlumený harmonický pohyb tak, že amplituda výchylky je 0,2 m, frekvence 3 Hz a počáteční fáze je nulová. Určete s jakou rychlostí prochází toto těleso rovnovážnou polohu.

ZU 1.6.1-48

Těleso koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 2\sin(3t)$ (m,s). Napište rovnici pro jeho zrychlení.

ZU 1.6.01-49

Těleso koná netlumený harmonický pohyb s amplitudou výchylky 0,2 m a kruhovou frekvencí 3 rad/s. V čase t = 0 s je těleso v rovnovážné poloze. Napište rovnici pro zrychlení tělesa.

ZU 1.6.1-50

Těleso, konající netlumený harmonický pohyb, má zrychlení $a = -10\sin(2t)$ (m.s^{-2},s). S jak velkým zrychlením prochází těleso rovnovážnou polohou ?

ZU 1.6.1-51

Těleso, konající netlumený harmonický pohyb, má zrychlení $a = -10\sin(2t)$ (m.s^{-2},s). Jaká je velikost zrychlení tělesa v bodech vratu ?

ZU 1.6.1-52

Těleso hmotnosti 2 kg koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 2\sin(3t)$ (m,s). Vypočítejte kinetickou energii tělesa v bodě vratu.

ZU 1.6.1-53

Těleso hmotnosti 2 kg koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2\sin(3t)$ (m,s). Vypočítejte kinetickou energii tělesa v rovnovážné poloze.

BU 1.6.1-54

Závaží o hmotnosti 4 kg je zavěšeno na pružinu. Pružina se tím prodlouží o 16 cm vzhledem ke své nezatížené délce.

a) Jaká je tuhost pružiny?

b) Dané závaží odstraníme a na tutéž pružinu zavěsíme závaží o hmotnosti 0,5 kg. Poté pružinu ještě poněkud protáhneme a uvolníme. Jaká bude perioda vzniklých kmitů?

BU 1.6.1-55

Na píst, který harmonicky kmitá ve svislém směru, položíme závaží.

a) Je-li perioda kmitů pístu 1 s, při jaké amplitudě výchylky se závaží oddělí od pístu?

b) Je-li amplituda výchylky kmitů pístu 5 cm, jaká může být největší frekvence, pro kterou zůstává závaží nepřetržitě v kontaktu s pístem?

BU 1.6.1-56

Těleso koná netlumený harmonický pohyb s amplitudou výchylky 3 m, frekvencí 4 Hz. V čase t = 0 s se nachází ve vzdálenosti 1,5 m od rovnovážné polohy. Napište rovnici pro okamžitou výchylku tělesa. y =

BU 1.6.1-57

Těleso hmotnosti 4 kg koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2\sin(0{,}5\pi t)$ (m, s). Určete velikost síly, která působí na toto těleso při výchylce 0,1 m

BU 1.6.1-58

Těleso koná netlumený harmonický pohyb tak, že jeho rychlost v rovnovážné poloze je 3 m/s a zrychlení v bodě vratu má velikost 27 m/s^2. Vypočítejte jeho úhlovou frekvenci.

BU 1.6.1-59

Těleso hmotnosti 2 kg koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 3\sin(2t)$ (m,s). Určete jeho potenciální energii v bodě vratu.

BU 1.6.1-60

Těleso hmotnosti 2 kg koná netlumený harmonický pohyb podle rovnice $y = 0{,}2\sin(3t)$ (m,s). Ve vzdálenosti 0,1 m od rovnovážné polohy má potenciální energii 0,09 J. Určete v této poloze jeho kinetickou energii.

BU 1.6.1-61

Těleso koná netlumený harmonický pohyb. Perioda pohybu je 2 s. Celková energie tělesa je 3.10^{-5} J a maximální síla působící na těleso má velikost $1{,}5.10^{-3}$ N. Určete amplitudu výchylky.

BU 1.6.1-63

Kmitající soustava *pružina* + *těleso* má mechanickou energii 1 J. Kmitání probíhá s amplitudou výchylky 10 cm a maximální rychlost tělesa je 1,2 m/s.

a) Určete tuhost pružiny.

b) Určete hmotnost tělesa.

c) Určete frekvenci kmitání.

BU 1.6.1-64

Výchylka harmonicky kmitající částice je v jistém okamžiku rovna jedné polovině amplitudy. Jaká část celkové mechanické energie má v tomto okamžiku formu energie

a) potenciální
b) kinetické?

1.6.2. TLUMENÉ KMITÁNÍ

SHRNUTÍ

V odporujícím prostředí působí na mechanický oscilátor síla odporu prostředí (tlumící) $F_t = -R\,v$, kde R je koeficient odporu prostředí (jednotka kg.s^{-1}), v je rychlost oscilátoru. Pohybová rovnice tlumeného kmitavého pohybu je $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega\, y = 0$, kde b je součinitel útlumu (jednotka s^{-1}) a ω **je úhlová frekvence netlumených kmitů** (jednotka rad.s^{-1}). Platí $2b = \frac{R}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (k je tuhost pružiny). Řešením je vztah pro okamžitou výchylku tlumených kmitů $y = A\sin\left(\omega\, t + \varphi_0\right)$, kde $A = A_0\, e^{-b\,t}$ je amplituda tlumených mechanických kmitů a $\boldsymbol{\omega}$ **je úhlová frekvence tlumených kmitů**. Vztah mezi úhlovou frekvencí tlumených kmitů a úhlovou frekvencí netlumených kmitů (vlastní frekvencí) je popsán rovnicí $\omega_t^2 = \omega^2 - b^2$.Z dalších konstant definujeme bezrozměrné veličiny útlum $\lambda = e^{bT_t}$ a logaritmický dekrement útlumu $\delta = bT_t$, kde T_t je perioda tlumených kmitů.

BTO 1.6.2-1

Těleso hmotnosti m je zavěšeno na pružině tuhosti k a koná tlumený harmonický pohyb. Tlumící síla prostředí je $F_t = -R\,v$,. Které z uvedených rovnic jsou zápisem tlumených kmitů?

a) $-ky - R\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = ma$

b) $m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + k\,y = 0$

c) $ma = -ky + Rv$

d) $-ky - Rv = 0$

BTO 1.6.2-2

Těleso hmotnosti m je zavěšeno na pružině tuhosti k a koná tlumený harmonický pohyb. Odpor prostředí je $F_t = -R\,v$. Diferenciální rovnici těchto tlumených kmitů můžeme psát ve tvaru $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega^2 y = 0$. Určete, které vztahy charakterizují součinitel útlumu a úhlovou frekvenci netlumených kmitů (vlastní frekvenci).

a) $2b = \frac{R}{m}$ a $\omega^2 = \frac{k}{m}$

b) $2b = \frac{m}{R}$ a $\omega = \frac{k}{m}$

c) $b = \frac{R}{2m}$ a $\omega = \frac{k}{m}$

d) $b = \frac{R}{m}$ a $\omega = \frac{k}{m}$

BTO 1.6.2-3

Těleso hmotnosti *m* je zavěšeno na pružině tuhosti *k* a koná tlumený harmonický pohyb. Síla odporu prostředí je $F_t = -Rv$. Diferenciální rovnici těchto tlumených kmitů můžeme psát ve tvaru $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega^2 y = 0$. Řešením této rovnice je

a) $y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$, kde $A = A_0 e^{bt}$

b) $y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$, kde $A = A_0 e^{-bt}$

c) $y = A\sin\left(\omega_t t + \varphi_0\right)$, kde $A = A_0 e^{-2bt}$

d) $y = A\sin\left(\omega_t t + \varphi_0\right)$, kde $A = A_0 e^{-bt}$

BTO 1.6.2-4

Vlastní kruhová frekvence oscilátoru (tj. kdyby nebyl tlumen) je ω. V případě tlumeného kmitavého pohybu kmitá oscilátor s kruhovou frekvencí ω_t, pro kterou platí:

a) $\omega_t^2 = \omega^2 - b$

b) $\omega_t^2 = \omega^2 - b^2$

c) $\omega_t^2 = \omega^2 + b^2$

d) $\omega = \omega^2 - b^2$

e) $\omega_t = \omega$

BU 1.6.2-5

Těleso hmotnosti m je zavěšeno na pružině tuhosti k a koná tlumený harmonický pohyb. Síla tlumící je $F_t = -Rv$. Určete jednotku koeficientu odporu prostředí *B* v základních jednotkách soustavy SI.

BU 1.6.2-6

Těleso hmotnosti *m* je zavěšeno na pružině tuhosti k a koná tlumený harmonický pohyb. Síla odporu prostředí je $F_t = -Rv$. Diferenciální rovnici těchto tlumených kmitů můžeme psát ve tvaru $\frac{d^2 y}{d t^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$. Určete jednotku součinitele útlumu b v základních jednotkách soustavy SI.

BU 1.6.2-7

Diferenciální rovnice tlumených kmitů má tvar $\frac{d^2 y}{d t^2} + 4 \frac{dy}{dt} + \frac{\pi^2}{4} y = 0$. Určete vlastní úhlovou frekvenci oscilátoru.

BU 1.6.2-8

Diferenciální rovnice tlumených kmitů má tvar $\frac{d^2 y}{d t^2} + 4 \frac{dy}{dt} + \frac{\pi^2}{4} y = 0$. Určete součinitel útlumu.

BU 1.6.2-9

Uvažujte tlumené kmity, jejichž doba kmitu je T_t a součinitel útlumu je b. Poměr dvou po sobě jdoucích krajních výchylek na tutéž stranu je útlum λ. Vyjádřete útlum.

BU 1.6.2-10

Uvažujte tlumené kmity, jejichž doba kmitu je T_t a součinitelem útlumu je b. Vyjádřete logaritmický dekrement útlumu δ.

BU 1.6.2-11

Uvažujte tlumené kmity, jejichž logaritmický dekrement útlumu je 0,2. Jaký je poměr dvou krajních výchylek následujících po sobě na tutéž stranu?

BU 1.6.2-12

Součinitel útlumu je 3 s^{-1}. Určete dobu, za kterou klesne energie tlumených kmitů na 20%.

1.7. MECHANICKÉ VLNĚNÍ A ZVUK

1.7.1 MECHANICKÉ VLNĚNÍ

SHRNUTÍ

Vlnění je pohyb složený z jednotlivých kmitavých pohybů. Kmitová energie $E = \frac{1}{2}kA^2$ jednoho kmitajícího bodu (oscilátoru) se postupně přenáší na druhý kmitající bod. Tato energie se šíří prostorem rychlostí v (fázová rychlost). Fázová rychlost je v daném prostředí konstantní. Do vzdálenosti x se rozšíří za dobu *t*.

Pak platí $v = \frac{x}{t}$, případně $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$. Kde λ je vlnová délka (vzdálenost, do které se kmitová energie rozšíří za dobu jedné periody), T je perioda (doba jednoho kmitu oscilátoru) a f je frekvence kmitavého pohybu (počet kmitů za sekundu)..
Jestliže jsou kmity jednotlivých bodů kolmé ke směru šíření vlnění, pak hovoříme o **vlnění příčném**. Jestliže body kmitají ve směru šíření vlnění , jedná se o **vlnění podélné**.
V případě, že počáteční bod (zdroj) kmitá harmonicky, popisuje jeho kmitání rovnice $y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$. Pro jednoduchost uvažujeme kmitavý pohyb pouze ve směru osy *y*.
Do bodu vzdáleného od zdroje o vzdálenost *x* se vlnění rozšíří s časovým zpožděním. Jeho okamžitá

výchylka *u* pak bude popsána rovnicí: $u = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Okamžitou výchylku značíme

obecně symbolem *u*, protože vlnění se může šířit v libovolném směru a bod kmitat ve směru nebo kolmo ke směru šíření vlnění.

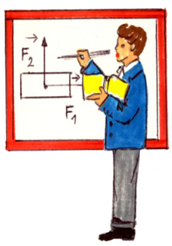
Úpravou získáme rovnici **postupné vlny** $u = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

Tato rovnice platí pro příčnou i podélnou.

Při dopadu vlnění na rozhraní dvou prostředí pod úhlem α se vlnění :

- odráží pod stejným úhlem (úhel je měřen od kolmice k rozhraní obou prostředí)
- láme při prostupu do druhého prostředí, lom je popsán vztahem $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$,

  kde α_1 je úhel dopadu, α_2 je úhel lomu v_1, v_2 jsou rychlosti v prvníma druhém prostředí.



ZŘU 1.7.1-1.
Prostředím se šíří postupné vlnění jehož úhlová frekvence je 12π rad.s^{-1} a rychlost šíření vlnění je 6 m.s^{-1}. Určete vlnovou délku tohoto vlnění.

Řešení

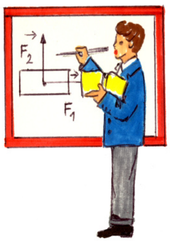
$\omega = 12\pi$ rad.s^{-1}, v = 6 m.s^{-1},

Pro vlnovou délku platí ze vztahu pro fázovou rychlost $\lambda = \dfrac{v}{f}$.

Frekvenci f kmitavého pohybu vyjádříme ze vztahu $\omega = 2\pi f$. Pak $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Po dosazení do vztahu pro vlnovou délku je $\lambda = \dfrac{v2\pi}{\omega} = \dfrac{6.2\pi}{12\pi} = 1m$.

Vlnová délka je 1 m.



ZŘU 1.7.1-2

Postupné vlnění je popsáno rovnicí $u = 0{,}5\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{0{,}4} - \dfrac{x}{8}\right)$. Určete periodu pohybu libovolného bodu, frekvenci, vlnovou délku, fázovou rychlost.

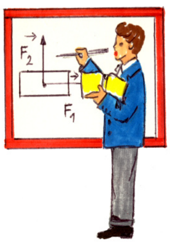
Řešení

Srovnáním se základní rovnicí postupné vlny $u = A\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

$u = 0{,}5\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{0{,}4} - \dfrac{x}{8}\right)$ určíme amplitudu A= 0,5 m, T = 0,4 s, λ = 8 m.

Výpočtem určíme frekvenci podle vztahu $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ Hz.

Fázovou rychlost stanovíme z rovnice $v = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{8}{0{,}4} = 20\,$m.s^{-1}.



ZŘU 1.7.1-3 Napište rovnici postupné vlny, jestliže vlnění má frekvenci 1 kHz, amplitudu výchylky 0,3 mm a postupuje rychlostí 340 m.s^{-1}. Dále určete okamžitou výchylku kmitajícího hmotného bodu ležícího ve vzdálenosti 0,17 m od zdroje vlnění v čase 0,3 s

Řešení:

f = 10^3 Hz, A = 3.10^{-4} m, v = 340 m.s^{-1},

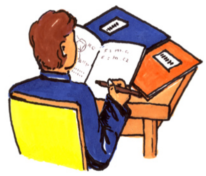
Rovnici postupné vlny určuje vztah

$u = A\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$.

Jestliže platí $v = \lambda f$, pak $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{340}{10^3} = 0{,}34\,\mathrm{m}$

Po dosazení dostáváme rovnici ve tvaru

$u = 3.10^{-4}\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{10^{-3}} - \dfrac{x}{0{,}34}\right)$.



ZTO 1.7.1-1.

Rovnice $u = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

a) popisuje jen vlnu příčnou
b) popisuje jen vlnu podélnou
c) popisuje vlnu příčnou i podélnou
d) nepopisuje ani příčnou ani podélnou vlnu

ZTO 1.7.1-2.

Bodovou řadou se šíří příčná postupná netlumená vlna s konstantní fázovou rychlostí. Potom libovolný bod této řady vykonává harmonické kmity se

a) stejnou frekvencí, ale různou amplitudou
b) různou frekvencí, ale stejnou amplitudou
c) stejnou frekvencí i stejnou amplitudou
d) stejnou frekvencí, amplitudou i fází

ZTO 1.7.1-3.

Vlna, jejíž perioda je T a frekvence f, se šíří rychlostí v. Které z následujících definic jsou správné pro definici vlnové délky ?

a) $\lambda = v.T$
b) je nejmenší vzdálenost dvou bodů, kmitajících se stejnou fází
c) je vzdálenost, o kterou postoupí fáze za dobu jedné periody
d) $\lambda = v/f$

ZTO 1.7.1-4.

Ve směru osy x se šíří rovinná vlna vlnové délky λ. Čemu je rovna nejkratší vzdálenost d dvou bodů prostředí, které kmitají s opačnou fází ?

a) $d = \frac{2}{\lambda}$
b) $d = \frac{\lambda}{2}$
c) $d = \lambda$
d) $d = \lambda^2$

ZTO 1.7.1-5.

V homogenním prostředí se šíří vlna. Fázovou rychlostí rozumíme

a) maximální rychlost, se kterou se pohybuje každá kmitající částice
b) střední rychlost kmitajících částic
c) rychlost, s jakou se šíří táž fáze bodovou řadou

ZTO 1.7.1-6.

Vlna přechází z prostředí, ve kterém se šíří fázovou rychlostí v do prostředí, kde je fázová rychlost vlny 2krát menší. Frekvence vlny

a) bude 2krát větší
b) zůstane konstantní
c) bude poloviční

ZTO 1.7.1-7.
Vlna přechází z prostředí, ve kterém se šíří fázovou rychlostí v do prostředí, kde je fázová rychlost vlny 2krát menší. Vlnová délka vlny

a) bude 2krát větší
b) zůstane konstantní
c) bude poloviční

ZU 1.7.1-1.

V homogenním prostředí se šíří vlna $u = 0{,}5 \sin 20\pi\left(t - \dfrac{x}{30}\right)$ (m,s). Vypočítejte její vlnovou délku.

ZU 1.7.1-2.
V kladném směru osy x postupuje příčná vlna rychlostí 100 m/s. Pohyb bodu O je popsán rovnicí $u = 5\cos 2t$ (m,s). Vypočítejte vlnovou délku této vlny.

ZU 1.7.1-3.

V homogenním prostředí se šíří vlna $u = 0{,}5 \sin 20\pi\left(t - \dfrac{x}{30}\right)$ (m,s) Vypočítejte frekvenci vlny.

ZU 1.7.1-4.

V homogenním prostředí se šíří vlna $u = 0{,}5 \sin 20\pi\left(t - \dfrac{x}{30}\right)$(m,s) Vypočítejte fázovou rychlost vlny.

ZU 1.7.1-5.
Ve směru osy x se šíří postupná vlna vlnové délky 1 m. Najděte fázový rozdíl dvou kmitajících bodů, které jsou od sebe vzdáleny 2 m.

BU 1.7.1-1.
Bodovou řadou postupuje vlna rychlostí 300 m/s. Perioda T = 0,04 s. Určete fázový rozdíl dvou kmitajících bodů, které jsou ve vzdálenosti 10 m a 16 m od zdroje vlnění.

ZU 1.7.1-6.
Postupná vlna se šíří hmotným prostředím rychlostí v = 2.10^3 m/s ve směru osy x. Amplituda výchylky je 2 cm a frekvence vlnění je 40 Hz. Napište rovnici pro okamžitou výchylku u této vlny.

BU 1.7.1-2.
Rovnice výchylky postupného vlnění má tvar:

$u = 0{,}04 \sin 2\pi\left(25t - \dfrac{x}{20}\right)$. Najděte rovnici pro rychlost kmitající částice.

BU 1.7.1-3.
V homogenním prostředí se šíří vlna

$u = 0{,}5 \sin 20\pi\left(t - \frac{x}{30}\right)$. Určete největší rychlost kmitajících částic prostředí.

BU 1.7.1-4.
V homogenním prostředí se šíří vlna
$u = 0{,}5 \sin 20\pi\left(t - \frac{x}{30}\right)$. Určete největší zrychlení kmitajících částic prostředí.

ZU 1.7.1-7.
Rychlost elektromagnetické vlny ve vakuu je 3.10^8 m/s. Vlnové délky viditelného světla jsou zhruba v intervalu od 400 nm (pro fialové světlo) do 700 nm (pro červené světlo). Určete obor frekvencí viditelných frekvencí.

ZU 1.7.1-8.
Elektromagnetické vlny v oboru frekvencí od 1,5 MHz do 300 MHz jsou označovány jako krátkovlnné rádiové vlny (např. VM nebo VHF). Určete odpovídající obor vlnových délek.

BU 1.7.1-5.
V homogenním prostředí se šíří vlna
$u = 10^{-3} \sin 5000\pi\left(t - \frac{x}{400}\right)$ (m,s).
Vypočítejte kolikrát je fázová rychlost tohoto vlnění větší než maximální rychlost kmitajících částic prostředí.

BU 1.7.1-2.
Pod jakým úhlem může nejvýše dopadnout vlnění na rozhraní dvou prostředí vzduch-mosazná deska, aby se úplně od desky odrazilo?

1.7.2 Interference

SHRNUTÍ

Více vln postupujících prostředím je možné skládat. Hovoříme o **interferenci vlnění.**
Pokud proti sobě postupují dvě vlny stejné frekvence, amplitudy a fázové rychlosti, vznikne **stojaté vlnění.** Okamžitá výchylka je popsána rovnicí
$u = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{T}$.
V tomto případě nedochází k přenosu energie z jednoho bodu na druhý, ale každý bod kmitá se svou vlastní energií, která závisí na maximální výchylce každého bodu. Existují body s nulovou výchylkou (energií) – *uzly* a body s maximální výchylkou - *kmitny*. Vzdálenost dvou sousedních uzlů (kmiten) $d = \frac{\lambda}{2}$.

ZTO 1.7.2-1.

Jestliže daným prostředím postupuje několik vln o různých amplitudách a různých kmitočtech, potom

a) interferovat mohou jen vlny se stejným kmitočtem

b) interferovat mohou jen vlny se stejnou amplitudou

c) interferují všechny vlny

c) interferovat mohou jen vlny se stejným kmitočtem i stejnou amplitudou

ZTO 1.7.2-2.

Prostředím postupují dvě vlny. K interferenci může dojít

a) jen u podélných vln

b) jen u příčných vln

c) jak u příčných, tak i podélných vln

ZTO 1.7.2-3.

Stojaté vlnění vzniká

a) interferencí dvou vlnění stejné frekvence, stejné vlnové délky a stejné amplitudy, postupujících stejným směrem, je-li jejich fázový rozdíl roven celistvému násobku 2π

b) interferencí vlnění stejné frekvence, postupujících stejným směrem různou rychlostí

c) interferencí podélného vlnění s příčným vlněním stejné frekvence

d) interferencí dvou vlnění stejné amplitudy a stejné vlnové délky postupujících v určitém prostředí proti sobě

ZTO 1.7.2-4

U stojatého vlnění kmitají všechny body řady

a) s frekvencí, která je dvojnásobkem frekvence interferujících vlnění

b) s frekvencí, která se periodicky mění v závislosti na čase

c) s frekvencí, která je přímo úměrná amplitudě v daném bodě

d) se stejnou frekvencí jako je frekvence interferujících vln

ZTO 1.7.2-5.

Která z následujících tvrzení jsou správná ? Amplituda stojatého vlnění

a) v žádném místě není nulová

b) v určitém místě je trvale nulová

c) je v daném místě konstantní

BTO 1.7.2-1.

Maximální amplituda je u stojatého vlnění

a) rovna amplitudě interferujících vln

b) rovna dvojnásobku amplitudy interferujících vln

nezávislá na amplitudě interferujících vln

BTO 1.7.2-2.

Rychlost se kterou se při stojatém vlnění posouvá bod kmitající s určitou amplitudou je

a) závislá na frekvenci

b) závislá na rychlosti šíření interferujících vln

c) nulová

BTO 1.7.2-3.
Vzdálenost dvou sousedních kmiten stojatého vlnění je
a) rovna vlnové délce interferujících vln
b) rovna polovině vlnové délky interferujících vln
c) nezávislá na vlnové délce interferujících vln

ZU 1.7.2-1.
Určete vzdálenost dvou sousedních uzlů stojatého vlnění, které vzniklo interferencí dvou vln periody 2.10^{-2} s, postupujících rychlostí 1208 m/s.

ZU 1.7.2-2.
V určitém prostředí vzniklo stojaté vlnění interferencí dvou postupných vln frekvence 483,3 Hz. Určete rychlost vlnění, je-li vzdálenost dvou sousedních uzlů 1,5 m.

BU 1.7.2-1.
Struna, po níž se šíří vlny rychlostí 400 m/s, je na obou koncích uchycena v pevných svorkách. Strunu rozkmitáme tak, že kmitá s frekvencí 600 Hz. Vznikající stojatá vlna má amplitudu 2 mm a je tvořena čtyřmi půlvlnami.
a) Jaká je vzdálenost mezi svorkami?
b) Napište rovnici výchylky jednotlivých částic struny jako funkci polohy částic a času.

BU 1.7.2-2.
Na napnuté struně postupují souhlasným směrem dvě stejné vlny.Jaký je mez nimi fázový rozdíl, jestliže amplituda výsledné vlny je 1,5krát větší než společná amplituda obou výchozích vln?

BU 1.7.2-3.
Dvě sinusové vlny o stejné vlnové délce postupují současně stejným směrem v napnuté struně. Jejich amplitudy jsou 4 mm a 7 mm, fázové konstanty mají hodnotu 0 a 0,8 π rad. Jaká je amplituda výsledné vlny?

BU 1.7.2-4.
Dvě sinusové vlny mají stejnou frekvenci a šíří se stejným směrem. Jejich amplitudy jsou 3 cm a 4 cm, fázové konstanty mají hodnotu 0 a $\pi/2$ rad. Určete amplitudu výsledné vlny.

1.7.3 ZVUK

SHRNUTÍ

Podélné vlnění postupující hmotným prostředím jako tlakové vlny je možné fyziologicky vnímat jako vibrace. Tlakové vlny o frekvencích 16 Hz až 20 000 Hz registrujeme sluchem. V tomto případě hovoříme o **zvuku.**

Rychlost šíření podélného vlnění (zvuku):

b) v pevné látce…… $v=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, kde E (jednotka Pa) je modul pružnosti v tahu v pevné látce hustoty ρ. Rychlost šíření příčného vlnění v pevné látce ja dána vztahem $v' = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$. Souvislost mezi podélným a příčným vlněním určuje vztah $G=\sqrt{\dfrac{mE}{2\,(m+1)}}$, kde G je modul pružnosti v torzi (jednotka Pa) a m je Poissonovo číslo charakteristické pro každý materiál.

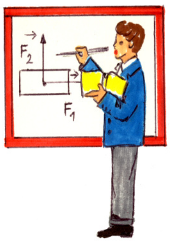
c) v kapalině……… $v=\sqrt{\dfrac{k}{\rho}}=\sqrt{\dfrac{1}{\gamma\rho}}$, kde k (jednotka Pa) je modul pružnosti kapaliny a γ(jednotka Pa^{-1}) je modul objemové stlačitelnosti kapaliny hustoty ρ,,

d) v plynu………… $v=\sqrt{\dfrac{\chi\, p}{\rho}}$, kde χ je Poissonova konstanta, p je tlak plynu hustoty ρ,

Energie *E* vlnění vyslaná zdrojem zvuku za dobu t představuje **výkon zdroje** $P=\dfrac{E}{t}$.
Jednotkou akustického výkonu je (watt).
Odevzdá-li zvukové vlnění za čas t energii E ploše S, je **intenzita zvuku** $I=\dfrac{E}{t\,S}=\dfrac{P}{S}$.
Jednotkou akustické intenzity je W.m^{-2}. Úpravou je $I=\dfrac{1}{2}\rho\,\omega^2 A v=\dfrac{1}{2}\dfrac{p^2}{\rho\, v}$, kde A (jednotka m) představuje amplitudu vlnění, p je tlak (jednotka Pa) prostředí.
Subjektivní vnímání zvuku popisuje **hladina intenzity *L*** (*hladina zvuku*), která je dána vztahem $L\ =10\lg\dfrac{I}{I_0}$, kde $I_0\ =10^{-12}$ W.m^{-2} je prahová intenzita vnímaného zvuku při frekvenci 1 000 Hz. Jednotkou hladiny intenzity je dB (decibel).

Dopplerův jev popisuje závislost změny přijímané frekvence na pohybu zdroje zvuku a přijímače. f_0 je frekvence vysílaná zdrojem, v_φ je rychlost zvuku, v je rychlost zdroje, u je rychlost přijímače. Potom nastávají případy:

- zdroj se přibližuje a příjemce je v klidu, pak $f=f_0\dfrac{v_\varphi}{v_\varphi - v}$
- zdroj se vzdaluje a příjemce je v klidu, pak $f=f_0\dfrac{v_\varphi}{v_\varphi + v}$
- příjemce se přibližuje a zdroj je v klidu, pak $f=f_0\dfrac{v_\varphi + u}{v_\varphi}$
- příjemce se vzdaluje a zdroj je v klidu, pak $f=f_0\dfrac{v_\varphi - u}{v_\varphi}$



ZŘU 1.7.3-1

Lidské ucho vnímá frekvence 16 Hz – 20 000 Hz při teplotě 30 °C. V jakém intervalu leží příslušné vlnové délky ?

Řešení:

$f_1 = 16$ Hz, $f_2 = 20\,000$ Hz, $t = 30$ °C, $\lambda_1 = ?$, $\lambda_2 = ?$

Pro rychlost šíření zvuku ve vzduchu platí vztah:

$$v = (331{,}6 + 0{,}607\,t) = (331{,}6 + 0{,}607.30) = 351{,}5\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

Pro vlnové délky zvuku při daných frekvencích platí:

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{351{,}5}{16} = 22\,\mathrm{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{351{,}5}{20\,000} = 0{,}018\,\mathrm{m}$$

ZŘU 1.7.3-2.

Zvuková vlna se vrací do místa rozruchu jakožto ozvěna od kolmé stěny za 1,52 s. Jaká je vzdálenost stěny od zdroje zvuku, je-li rychlost zvuku 332 m/s.

Řešení:

$t = 1{,}52$ s, $v = 332\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $s = ?$

Zvuk se šíří v daném prostředí konstantní rychlostí.

Pak $v = \frac{s}{t}$. Doba potřebná k uražení dráhy k překážce je $t' = \frac{t}{2}$. Pak po dosazení úpravě a dosazení je $s = v\,t' = v\frac{t}{2} = 332\frac{1{,}52}{2} = 252\,\mathrm{m}$.

BŘU 1.7.3-1.

Zvuková intenzita elektrofonické kytary byla zesílená z 10^{-10} W.m^{-2} na 10^{-4}W.m^{-2}. Kolik decibelů představuje zesílení?

Řešení:

$I_1 = 10^{-10}$ W.m^{-2}, $I_2 = 10^{-4}$W.m^{-2}, $\Delta L = ?$

Hladina intenzit zvuku je dána vztahem $L_1 = 10\lg\frac{I_1}{I_0}$, $L_2 = 10\lg\frac{I_2}{I_0}$, pak rozdíl hladin je po úpravě:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10\lg\frac{I_2}{I_0} - 10\lg\frac{I_1}{I_0} = 10\left(\lg I_2 - \lg I_0 - \lg I_1 + \lg I_0\right) = 10\lg\frac{I_2}{I_1} = 10\lg 10^6 = 60\ \mathrm{dB}$$

ZTO 1.7.3-1.

Nejmenší vlnová délka, kterou je schopen vydat netopýr, je 3,3 mm. Jaká je příslušná frekvence? Rychlost zvuku ve vzduchu uvažujte 330 m.s^{-1}.

a) $f = 100$ kHz
b) $f = 50$ kHz
c) $f =$ 1089 Hz
d) $f = 1$ Hz

ZTO 1.7.3-2.
Zvuk je vlnění
a) příčné
b) podélné
c) příčné i podélné

ZTO 1.7.3-3.
Zvuk se šíří
a) ve vakuu
b) v hmotném prostředí
c) ve vakuu i v hmotném prostředí

ZTO 1.7.3-4.
Rychlost šíření zvuku na hustotě prostředí
a) závisí
b) nezávisí

ZTO 1.7.3-5.
Intenzita zvuku je:
a) energie *E* vysílaná plochou *S*,
b) energie *E* vysílaná zdrojem za dobu *t*,
c) energie *E* vysílaná zdrojem a dopadající během doby *t* na plochu *S*,
d) energie *E* vysílaná plochou zdroje *S* po dobu *t*

ZTO 1.7.3-6.
Intenzita zvuku I je
a) $I = \frac{E}{S}$,
b) $I = \frac{E}{t}$,
c) $I = \frac{E}{t\,S}$,
d) $I = \frac{E\,S}{t}$

ZTO 1.7.3-7
Jednotkou intenzity zvuku I je:
a) W.m
b) $W.m^{-1}$
c) $W.m^{-2}$
d) $W^{-1}.m$

ZTO 1.7.3-8
Výkon zdroje je:
a) energie *E* vysílaná plochou *S*,
b) energie *E* vysílaná zdrojem za dobu *t*,
c) energie *E* vysílaná zdrojem a dopadající během doby *t* na plochu *S*,
d) energie *E* vysílaná plochou zdroje *S* po dobu *t*

ZTO 1.7.3-9.
Výkon zdroje P je

a) $P = \dfrac{E}{S}$,
b) $P = \dfrac{E}{t}$,
c) $P = \dfrac{E}{S\,t}$,
d) $P = \dfrac{S\,t}{E}$

ZTO 1.7.3-10.
Jednotkou výkonu P zdroje zvuku je:

a) W,
b) $J.s^{-1}$,
c) J,
d) $W.s^{-1}$

ZTO 1.7.3-11.
Při vzdalování zdroje zvuku je frekvence přijímaného signálu

a) stejná,
b) větší,
c) menší

ZTO 1.7.3-12.
Při přibližování zdroje zvuku je frekvence přijímaného signálu

a) stejná,
b) větší,
c) menší

ZTO 1.7.3-13.
Při pohybu příjemce směrem ke zdroji je frekvence přijímaného zvukového signálu

a) stejná,
b) větší,
c) menší

ZTO 1.7.3-14.
Při pohybu příjemce směrem od zdroje je frekvence přijímaného zvukového signálu

a) stejná,
b) větší,
c) menší

ZU 1.7.3-1.
Zvuk se šíří ve vodě rychlostí 1 480 $m.s^{-1}$, ve vzduchu rychlostí340 $m.s^{-1}$. Jak se změní při přechodu zvuku ze vzduchu do vody jeho vlnová délka?

ZU 1.7.3-2.
Pravidlo pro určení vzdálenosti v kilometrech od místa, kde udeřil blesk, doporučuje počítat sekundy od chvíle, kdy je vidět blesk, až do chvíle, kdy je slyšet hrom a pak počet sekund vydělit třemi. Vysvětlete toto pravidlo.

ZU 1.7.3-3.
Nejmenší vlnová délka, kterou je schopen vydat netopýr, je 3,3 mm. Jaká je příslušná frekvence?

ZLP 1.7.3-4.
Uslyšíme zvuk, jehož vlnění je popsáno rovnicí
$u = 0{,}05\sin(1980t - 6x)$?
Vypočtěte také vlnovou délku a rychlost tohoto zvuku.

Porovnáme tuto rovnici s rovnici postupné vlny ve tvaru $u = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$.

Pak $\frac{2\pi}{T} = 1980\,s^{-1}$, frekvence $f = \frac{1}{T} = \frac{1\,980}{2\pi} = 315\,\mathrm{Hz}$
Tato frekvence patří do oblasti slyšitelných frekvencí.

ZLP 1.7.3-4.2
Dalším srovnáním $\frac{2\pi}{\lambda} = 6\ \mathrm{m}^{-1}$ získáme vlnovou délku $\lambda = \frac{2\pi}{6} = 1{,}05\ m$.

Rychlost zvukového vlnění určíme ze vztahu $v = f\,\lambda = 315.1{,}05 = 330\ m.s^{-1}$.

ZU 1.7.3 - 5.
Rychlost zvuku v ledu je 3300 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Vypočítejte modul pružnosti v tahu ledu, je-li jeho hustota 9.10^2 $\mathrm{kg.m^{-3}}$.

ZU 1.7.3-6.
Vypočítejte modul pružnosti v tahu oceli, rozšíří-li se podélné vlnění do vzdálenosti 1000 m za dobu 0,188 s. Hustota oceli je $7{,}8.10^3$ $\mathrm{kg.m^{-3}}$.

ZU 1.7.3-7.
Vypočítejte modul pružnosti v tahu mědi, rozšíří-li se podélné vlnění v mědi do vzdálenosti 1000 m za dobu 0,269 s.

BU 1.7.3-1.
Vypočítejte koeficient stlačitelnosti alkoholu γ, je-li jeho hustota $8{,}06.10^2$ $\mathrm{kg.m^{-3}}$ a rychlost šíření podélných vln v alkoholu 1227 $\mathrm{m.s^{-1}}$.

BU 1.7.3-2.
Rychlost šíření podélných vln v oceli v_1= 5100 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Jaká je rychlost šíření příčných vln, jestliže Poissonovo číslo m = 3,1?

ZU 1.7.3.-8.
Jaká je intenzita zvuku v postupující zvukové vlně o takové amplitudě 0,1 Pa a o frekvenci 1 kHz

a) ve vzduchu , kde hustota vzduchu je 1,293 kg.m^{-3} a rychlost šíření 331,7 m.s^{-1},
b) ve vodě, kde hustota vody je 1 000 kg.m^{-3} a rychlost šíření 1485 m.s^{-1}.

ZU 1.7.3-9.
Bodový zdroj výkonu 1 W izotropně vysílá zvukové vlny. Za předpokladu, že energie vln se zachovává, jaká je intenzita zvuku ve vzdálenosti 1 m od zdroje?

BU 1.7.3.-3.
Uvažujeme dvě zvukové vlny, z nichž jedna se šíří,rychlostí v_1 = 340 m.s^{-1} ve vzduchu hustoty ρ_1 = 1,292 kg.m^{-3} a druhá ve vodě rychlostí v_2 = 1 440 m.s^{-1}. Jaká je amplituda akustického tlaku vlny ve vodě, mají-li obě vlny stejnou intenzitu a amplituda akustického tlaku ve vzduchu je p_1 = 19,5 Pa?

BU 1.7.3.-4.
Stojíte ve vzdálenosti D od zdroje vysílajícího zvukové vlny do všech směrů stejně. Když se přemístíte o 50 m blíže, zjistíte, že intenzita vln se zdvojnásobila. Vypočtěte vzdálenost D.

BU 1.7.3-5.
Určete hladinu intenzity L_v, sečteme-li dva zvuky o stejných intenzitách I.

BU 1.7.3-6.
Hladina intenzity (hlasitost) zvuku zvětšíme o 30 dB. Kolikrát se zvýší jeho intenzita?

BU 1.7.3-7.
Při zkušebním letu prolétá tryskové letadlo podzvukovou rychlostí ve výšce 100 m nad zemí.Hladina intenzity zvuku na zemi při průletu je L=150 dB.V jaké výšce by mělo letadlo letět, aby hladina intenzity (hlasitost) na povrchu nepřekročila práh bolesti, tj. L_1= 120 dB? Dobu, za kterou zvuk z letadla dosáhne povrchu země, zanedbejte.

BU 1.7.3.-8.
V roce 1976 vytvořila skupina Who rekord v hlasitosti koncertu. Hladina intenzity zvuku byla ve vzdálenosti 46 m před reproduktory L_2 = 120 dB. Jaký je poměr intenzity I_2 zvuku v daném místě ku intenzitě I_1 bucharu pracujícího s hladinou intenzity zvuku L_1 = 92 dB?