J. I. PERELMAN

GEOMETRIE V PŘÍRODĚ

NAŠE VOJSKO

J. I. PERELMAN

GEOMETRIE V PŘÍRODĚ

Přeložil
Václav Bartošek

1952

NAŠE VOJSKO

PRAHA

Výběr sestavil Václav Bartošek. Přeloženo a ilustrace v textu převzaty z ruského originálu Zanimatěľnaja geometrija, který vydalo Gosudarstvennoje izdatěľstvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva 1950.
Po odborné stránce překlad přehlédl Jiří Bečvář.
Obálku navrhl Miloš Hrbas.

PŘEDMLUVA

Tato knížka, kterou jsme nazvali „Geometrie v přírodě“, je výběrem ze sbírky zábavného vyprávění o geometrii známého sovětského popularisátora vědy J. I. Perelmana. Práce tohoto vědce, který zemřel v roce 1942 v Leningradě, vycházejí v Sovětském svazu ve statisícových nákladech. Tento výběr je určen těm čtenářům, kteří se učili základům geometrie jen ve školních lavicích a nenapadlo je, že mnohé geometrické poučky a vzorce mohou prakticky použít v životě – při pochodu, při řešení různých bojových úkolů a pod. Autor vyvedl geometrii, jak sám říká, „ze stěn třídy na volný vzduch, do lesa, na pole, k řece, na cesty, aby se pod širým nebem dal do řešení geometrických úloh bez učebnic a tabulek“. Snažili jsme se sestavit tento výběr tak, aby se co nejvíce přiblížil životu našich vojáků, aby jim každá kapitola byla nějakým způsobem užitečná.

Redakce.

I. GEOMETRIE V LESE

Měření z délky stínu

Ještě teď mám v živé paměti překvapení, které jsem zažil, když jsem po prvé spatřil šedovlasého hajného, který stál vedle obrovské sosny a měřil její výšku malým kapesním přístrojem. Když namířil svou čtverhrannou destičku na vrchol stromu, očekával jsem, že stařík poleze nahoru s měřicím pásem. Místo toho položil přístroj zpět do kapsy a oznámil, že vyměřování je skončeno. A já myslel, že ještě nezačalo . . .

Byl jsem tenkrát velmi mladý a takový způsob měření, kdy člověk určuje výšku stromu, aniž by jej skácel nebo aniž by vylezl na vrchol, zdál se mi malým zázrakem. Teprve později, když mne zasvětili do základů geometrie, pochopil jsem, jak lze provádět takové zázraky. Existuje mnoho různých způsobů jak provést taková měření pomocí velmi jednoduchých přístrojů, ba dokonce i bez jakýchkoli pomůcek.

Nejlehčí a nejstarší způsob je bezpochyby ten, kterým určil starořecký vědec Thales šest století před naším letopočtem výšku pyramidy v Egyptě. Použil totiž jejího stínu. Otroci i faraon, kteří se shromáždili u podnoží nejvyšší pyramidy, zaraženě hleděli na cizince ze severu, který určoval podle stínu výšku ohromné stavby. Thales – jak sděluje ústní podání – zvolil den a hodinu, kdy se délka jeho vlastního stínu rovnala jeho výšce; v tom okamžiku se výška pyramidy musela také rovnat délce jejího stínu.[1]

To je snad jediný případ, kdy člověk využívá k svému prospěchu vlastního stínu.

Problém řeckého vědce se nám dnes zdá dětsky jedno-

[1] **Ovšem, že délku stínu bylo třeba odečítat od středu čtvercové základny pyramidy; šířku základny však Thales mohl změřit bezprostředně.**

duchý, ale nesmíme zapomínat, že se na něj díváme s výšky geometrické stavby, postavené teprve po Thalesovi, který žil dávno před Eukleidem, autorem pozoruhodné knihy, z níž se učila geometrie po dvě tisíciletí po jeho smrti. Pravdy v ní nashromážděné, které dnes zná každý školák, nebyly ještě v době Thalesa známy. Aby bylo možno použít stínu k řešení problému výšky pyramidy, bylo třeba znát některé geometrické vlastnosti trojúhelníků (první z nich objevil sám Thales):

1. úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou si rovny a naopak – strany, ležící proti stejným úhlům trojúhelníku, jsou navzájem stejné;

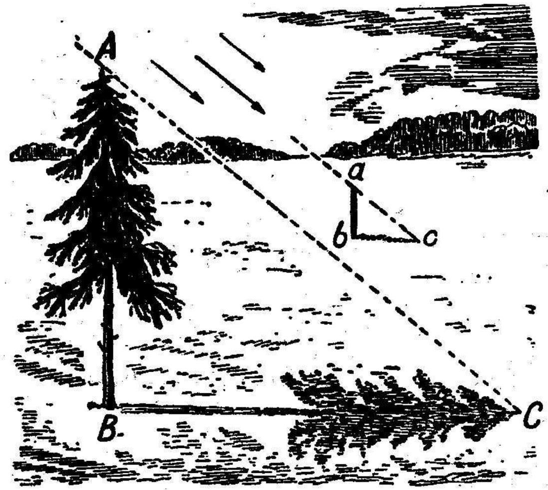
2. součet úhlů každého trojúhelníka (nebo alespoň pravoúhlého) je rovný dvěma pravým úhlům.

Thales vyzbrojen pouze těmito znalostmi právem usoudil, že když se jeho vlastní stín rovná jeho výšce, sluneční paprsky dopadají na zem pod úhlem rovným polovině pravého, a proto vrchol pyramidy, střed její základny a konec jejího stínu musí tvořit rovnoramenný trojúhelník. Zdálo by se, že tohoto jednoduchého způsobu lze velmi pohodlně použít za jasného slunečního dne k měření stromů, jejichž stín nesplývá se stínem sousedních stromů. Avšak v našich zeměpisných šířkách není tak snadné, jako v Egyptě, najít k tomu vhodný okamžik. Slunce u nás stojí nízko nad obzorem a stíny bývají rovny výšce předmětů jen kolem poledne, a to pouze v letních měsících. Proto Thalesova způsobu měření nelze vždy použít. Avšak není těžké změnit tento způsob tak, aby bylo možné použít za slunečního dne kteréhokoliv stínu libovolné délky. Když změříme ještě svůj stín nebo stín jakékoli tyče, můžeme vyčíslit hledanou výšku z poměru (obr. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

t. j. výška stromu je tolikrát větší než naše vlastní výška (nebo výška tyče), kolikrát je stín stromu delší než náš stín (nebo stín tyče). To ovšem vyplývá z geometrické podobnosti trojúhelníků ABC a abc.

Někteří čtenáři však namítnou, že tak elementární způsob nepotřebuje geometrického odůvodnění. Je opravdu i bez geometrie jasné tvrzení: kolikrát je strom vyšší, tolikrát je i jeho stín delší? Otázka není tak jednoduchá jak se zdá. Zkuste použít tohoto pravidla u stínů při světle po-



Obr. 1. Měření výšky stromu podle stínu.

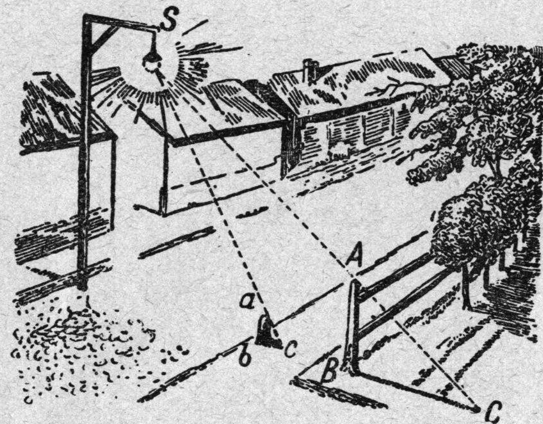
uliční lampy – neosvědčí se. Na obr. 2 vidíte, že sloupek AB je přibližně třikrát vyšší než patník ab, ale stín sloupku je osmkrát větší než stín patníku. Bez geometrie nelze vysvětlit, proč v daném případě lze uvedeného způsobu použít, v druhém nikoli.

Úloha

Podívejme se trochu blíže, v čem je rozdíl. Jádro věci spočívá v tom, že sluneční paprsky jsou rovnoběžné, paprsky lucerny však rovnoběžné nejsou; to je jasné. Ale jakým právem považujeme sluneční paprsky za rovnoběžné, ačkoli se nutně setkávají v místě, z kterého vycházejí?

Řešení

Paprsky Slunce, dopadající na Zemi, můžeme považovat za rovnoběžné proto, že úhel, který svírají, je mizivě malý,

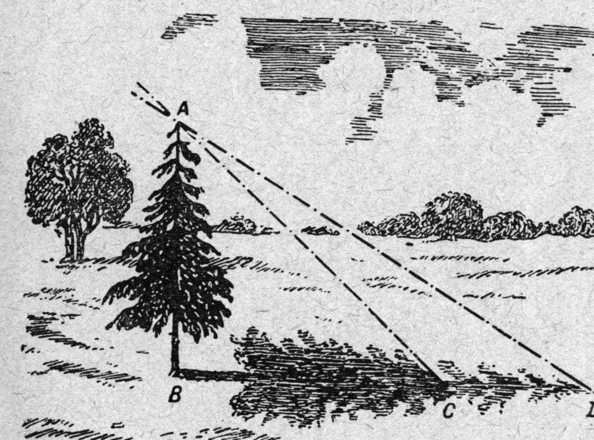


Obr. 2. Kdy je takové měření nesprávné.

prakticky nepostihnutelný. Jednoduchý geometrický výpočet nás o tom přesvědčí. Představme si dva paprsky, vycházející z kteréhokoli bodu na Slunci a dopadající na Zemi ve vzdálenosti, řekněme, jeden kilometr jeden od druhého. To znamená, že kdybychom postavili jednu nožičku kružidla do toho bodu Slunce, z kterého vychází paprsek, a druhou opsali kružnici poloměrem rovným vzdálenosti Země od Slunce (t. j. poloměrem 150,000.000 km), pak by mezi našimi dvěma paprsky, které tvoří poloměr, byl oblouk o délce jednoho kilometru. Délka této obrovské kružnice by byla $2\pi \times 150{,}000.000$ km $= 940{,}000.000$ km. Jeden její stupeň je 360krát menší, t. j. okolo 2,600.000 km; jedna oblouková minuta 60krát menší než stupeň, t. j. 43.000 km, a jedna oblouková vteřina ještě 60krát menší, t. j. 720 km.

Ale náš oblouk má délku toliko 1 km; to znamená, že odpovídá úhlu 1/720 vteřiny. Tak nepatrný úhel nepostřehneme ani přesnými astronomickými přístroji; proto v praxi můžeme považovat sluneční paprsky dopadající na Zemi za rovnoběžné.[1]

Kdyby nám tyto geometrické úvahy nebyly známy, nemohli bychom odůvodnit probíraný způsob určení výšky podle stínu.



Obr. 3. Jak vzniká polostín.

Pokusíme-li se použít methody stínů v praxi, ihned se přesvědčíme o jeho nespolehlivosti. Stíny nejsou ohraničeny tak, aby měření jejich délky bylo možno provést naprosto přesně. Každý stín má ve světle Slunce nejasně nastíněnou šedou obrubu polostínu, která činí hranici stínu neurčitou. Vzniká to tím, že Slunce není bodem, nýbrž velkým zářícím tělesem, které vysílá paprsky z mnoha bodů.

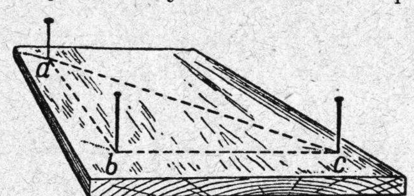
[1] Jiná je situace u paprsků, vycházejících z kteréhokoli bodu Slunce k oběma koncům zemského průměru; úhel mezi nimi je dostatečně velký (okolo 17″); zjištění tohoto úhlu dalo do rukou astronomů jeden z prostředků k stanovení vzdálenosti Země od Slunce.

Na obr. 3 je znázorněno, proč následkem toho stín *BC* má ještě polostín *CD*, který se postupně ztrácí. Úhel mezi krajními hranicemi je rovný úhlu, pod kterým vidíme vždycky sluneční kotouč, t. j. polovině stupně. Chyba, která vzniká tím, že se stíny neměří naprosto přesně, může při nízké poloze Slunce dosáhnout až 5%. Tato chyba přistupuje k jiným nevyhnutelným chybám (nerovnost Země atd.) a činí konečný závěr málo důvěryhodným. V hornaté krajině – na příklad – nemůžeme tohoto způsobu vůbec použít.

Další dva způsoby měření

Při měření výšky lze se obejít bez použití stínů. Takových způsobů je mnoho; začneme dvěma nejjednoduššími.

Především můžeme využít vlastností rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, použijeme-li zcela jednoduchého přístroje, který se snadno zhotoví z destičky a tří špendlíků. Na destičce libovolného tvaru se vyznačí tři body – vrcholy rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka – a do nich se vbodnou špendlíky (obr. 4). Možná, že nemáte po ruce rýsovací trojúhelník k sestrojení pravého úhlu, ani kružidlo k vynesení stejných stran. Prohněte tedy libovolný útržek papíru jednou a potom napříč prvního ohybu ještě jednou tak, aby se obě části prvního přehnutí ztotožnily, a dostanete pravý úhel. Téhož papírku lze použít také místo kružidla k vynášení stejných vzdáleností.

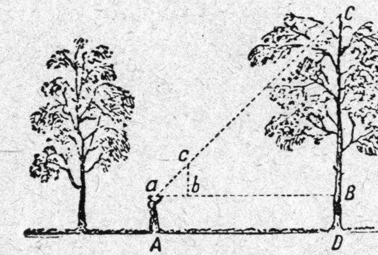


Obr. 4. Špendlíkový přístroj pro měření výšek.

Jak vidíte, přístroj může být snadno zhotoven v táborovém prostředí.

Zacházení s přístrojem není o nic složitější než jeho výroba. Vzdálíte se od vyměřovaného stromu, držíte přístroj

tak, aby jedna odvěsna trojúhelníku směřovala svisle. K vyznačení svislice lze použít nitě se zatížením přivázaným k hornímu špendlíku. Když se budete přibližovat ke stromu nebo od něho vzdalovat, vždycky najdete takové místo *A* (obr. 5), z kterého hledíce na špendlíky *a* a *c* uvidíte, že se kryjí s vrcholkem *C* stromu; to znamená, že prodloužení přepony *ac* prochází bodem *C*. Vzdálenost *aB* je tedy zřejmě rovna *CB*, neboť úhel u *a* = 45°.



Obr. 5. Schema použití špendlíkového přístroje.

Když změříte vzdálenost *AB* (nebo v rovném terénu stejnou vzdálenost *AD*) a připočtete *BD*, t. j. výšku *aA* očí nad zemí, dostanete hledanou výšku stromu.

Při druhém způsobu se obejdete i bez špendlíkového přístroje. Zde je třeba tyče, kterou musíte zarazit svisle do země tak, aby vystupující část byla rovna právě vaší výšce. Místo pro tyč je třeba vybrat tak, aby když ležíte, jak je to znázorněno na obr. 6, viděli jste vrchol stromu v přímce s vrchním bodem tyče. Jelikož trojúhelník *Abc* je rovnoramenný i pravoúhlý, je úhel *A* = 45°, a tedy *AB* je rovno *BC*, t. j. hledané výšce stromu.

Měření podle Julia Vernea

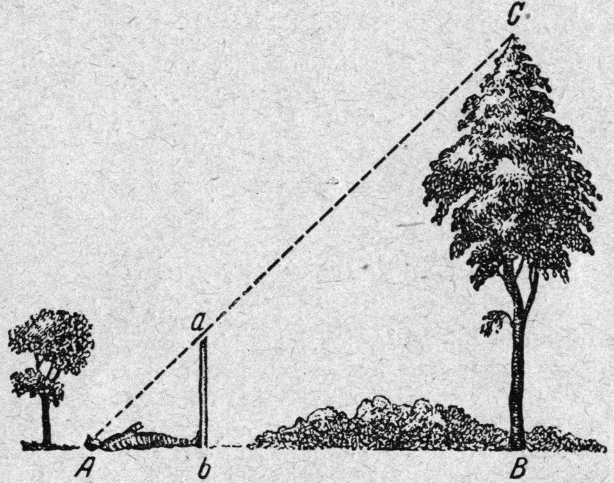
Následující, rovněž velmi jednoduchý způsob měření vysokých předmětů je obrazně popsán Juliem Vernem ve známém románu „Tajuplný ostrov“:

„Dnes musíme změřit výšku plošinky Dalekého rozhledu,“ prohlásil inženýr.

„Budeme k tomu potřebovat přístroj?“ zeptal se Herbert.

„Ne, není zapotřebí. Budeme postupovat poněkud jinak a použijeme jednoho jednoduchého a přesného způsobu.“

Jinoch, který se snažil naučit se co nejvíce, následoval inženýra, jenž se spustil s žulové stěny na okraj břehu. Vzal rovnou, 12 stop dlouhou tyč, kterou změřil co nejpřesněji tím, že ji srovnal se svou výškou, kterou přesně znal. Herbert nesl za ním svěřenou mu olovnici; provaz na jehož konci byl uvázán kámen.



Obr. 6. Ještě jeden způsob stanovení výšky.

Dříve než urazili 500 stop od švislé granitové stěny, zarazil inženýr tyč na dvě stopy svisle do písku.

Potom poodešel od tyče do takové vzdálenosti, aby leže na písku, mohl pozorovat v přímce konec tyče a okraj stěny (obr. 7). Bod, v němž měl při měření hlavu, pečlivě zaznamenal kolíčkem.

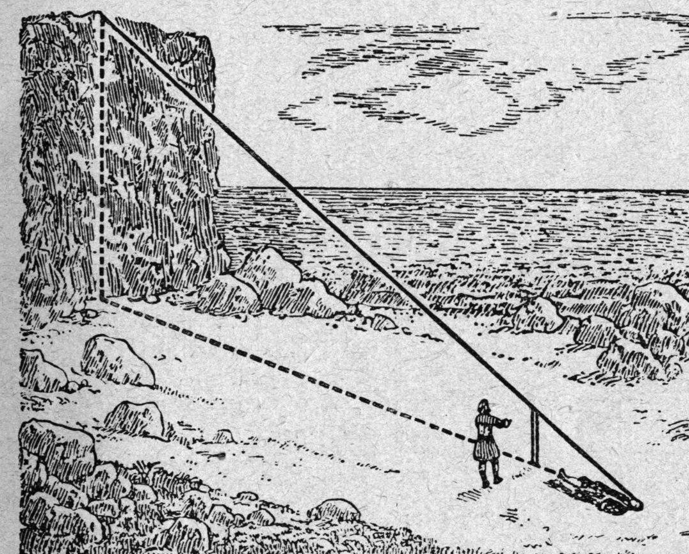
„Znáš základy geometrie?“ zeptal se Herberta, zvedaje se se země.

„Ano.“

„Pamatuješ si vlastnosti podobných trojúhelníků?“

„Jejich shodné strany jsou si úměrné.“

„Správně. Teď se podívej, jak sestrojím dva podobné pravoúhlé trojúhelníky. U menšího bude jednou odvěsnou svislá tyč, druhou – vzdálenost od kolíčku k základně tyče; přeponu bude tvořit můj zorný paprsek. U druhého trojúhelníku bude odvěsnou svislá stěna, jejíž výšku chceme určit, a vzdálenost od kolíčku k základu této stěny; přeponou bude můj zorný paprsek, totožný se směrem přepony prvního trojúhelníku.“



Obr. 7. Jak změřili výšku skály hrdinové Julia Vernea.

„Rozumím,“ řekl jinoch. „Poměr vzdálenosti od kolíčku k tyči k vzdálenosti od kolíčku k základně stěny je stejný, jako poměr výšky tyče k výšce stěny.“

„Ano. Proto změříme-li dvě první vzdálenosti a známe-li výšku tyče, můžeme vypočítat čtvrtý neznámý člen úměry, t. j. výšku stěny. Tímto způsobem se obejdeme bez bezprostředního měření této výšky. Obě vodorovné vzdálenosti byly změřeny: menší měřila 15 stop, větší 500 stop.“

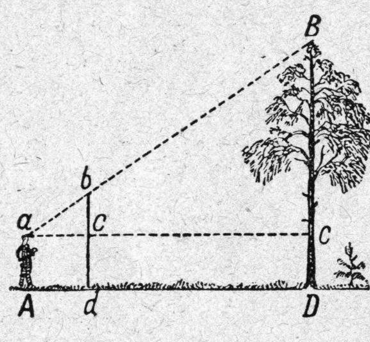
Po skončení měření sestavil inženýr následující zápis:

$$15 : 500 = 10 : x;$$
$$500 \times 10 = 5.000;$$
$$5.000 : 15 = 333{,}3.$$

„To znamená, že výška žulové stěny měří 333 stop.“

Jak postupoval staršina

Některé z právě popsaných způsobů měření výšky jsou nepohodlné proto, že je při nich nezbytné položit se na zem. Je samozřejmě možné vyhnout se této nepohodlné poloze.



Obr. 8. Měření výšky stromu pomocí tyče.

Jednou na jedné z front Velké vlastenecké války dostal oddíl poručíka Ivanjuka za úkol postavit most přes horskou řeku. Na protilehlém břehu se zakopali fašisté. K průzkumu místa na stavbu mostu vybral poručík průzkumnou četu v čele se staršinou Popovem. V nejbližším lese změřili průměr a výšku nejobvyklejších stromů a spočítali množství stromů, kterých bylo možno použít ke stavbě. Výšku stromů určovali pomocí tyčky tak, jak je ukázáno na obr. 8.

Používali k tomu následujícího způsobu:

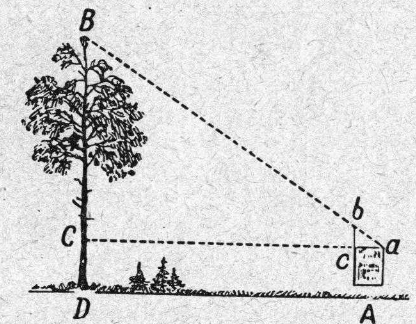
Opatřili si tyč o něco větší než byli sami a zarazili ji do země v jisté vzdálenosti od měřeného stromu (obr. 8). Pak odstoupili od tyče v prodloužení *Dd* do místa *A*, z kterého hledíce na vrcholek stromu, viděli vrcholek stromu a horní bod tyče v jedné přímce. Poté, neměnice polohu hlavy, dívali se směrem vodorovné přímky *AC* a pozorovali body *c* a *C*, v kterých vodorovný zrakový paprsek protínal tyč a strom. Pomocník udělal v těchto místech značky a pozorování bylo skončeno. Zůstává jen z podobnosti trojúhelníků *abc* a *aBC* vypočítat *BC* z úměry:

$$BC : bc = aC : ac,$$

odkud

$$BC = bc\,\frac{aC}{ac}.$$

Vzdálenosti *bc*, *aC* a *ac* lze snadno změřit bezprostředně. K získané hodnotě je třeba připočítat vzdálenost *CD* (která se rovněž změří bezprostředně), abychom zjistili hledanou výšku stromu.



Obr. 9. Měření výšky pomocí zápisníku.

K určení množství stromů staršina poručil vojákům změřit plochu lesa. Potom sečetl množství stromů na nevelkém úseku 50 × 50 m² a násobil plochou lesa.

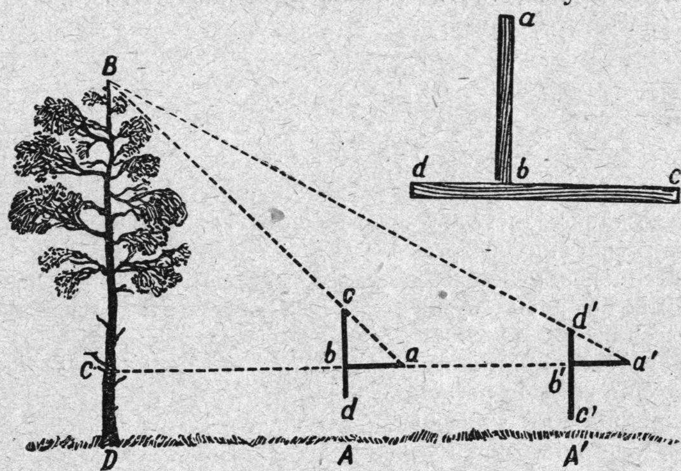
Na základě všech údajů sebraných průzkumníky, velitel oddílu určil, kde a jaký most je třeba postavit. Most postavili včas a úkol úspěšně splnili.[1]

Pomocí zápisníku

Jako přístroje k přibližnému odhadu nedostupné výšky lze použít také kapesního zápisníku, je-li opatřen tužkou vsunutou do pouzdra. Tento zápisník vám pomůže sestrojit dva podobné trojúhelníky, z nichž lze vyčíslit hledanou

[1] Tato příhoda i další popsané episody z Velké vlastenecké války jsou vylíčeny A. Demidovem v časopise „Vojennyje znanija“ č. 8, 1949, pod názvem „Průzkum řeky“.

výšku. Zápisník je třeba držet u oka tak, jak je znázorněno na zjednodušeném obr. 9. Zápisník musí být ve svislé rovině a tužka vyčnívat nad ořízku zápisníku natolik, abychom z bodu a viděli vrchol stromu B v zákrytu s kon-



Obr. 10. Použití jednoduchého přístroje vyrobeného ze dvou latěk.

cem tužky b. Pak se v důsledku podobnosti trojúhelníků abc a aBC určí výška z úměry

$$BC : bc = aC : ac.$$

Vzdálenosti bc, ac a aC se změří bezprostředně. K získané hodnotě BC je třeba připočítat ještě délku CD (na rovném terénu výšku očí nad zemí).

Šířka ab zápisníku se nemění, budete-li se vždycky stavět do jedné a téže vzdálenosti od měřeného stromu (na příklad 10 m); výška stromu bude záviset pouze na vysunuté části bc tužky. Proto můžete předem vypočítat, jaká výška odpovídá tomu nebo onomu vysunutí a nanést tato čísla na tužku. Váš zápisník se tak promění v jednoduchý výškoměr, kterým budete moci určovat výšky najednou, bez výpočtu.

Bez přiblížení se ke stromu

Stává se, že z nějakého důvodu je nepohodlné přijít blízko k základně měřeného stromu. Je možné určit v takovém případě jeho výšku?

K tomu byl zkonstruován vtipný přístroj, který lze stejně jako předcházející snadno sestrojit skromnými prostředky. Dvě lišty ab a cd (obr. 10 nahoře) se spojí pod pravým úhlem tak, aby ab se rovnalo bc, a bd bylo polovinou ab. A přístroj je hotov.

Při měření výšky se drží v rukou tak, že se zamíří laťkou cd vertikálně (proto je u ní olovnice) a měření se provede ve dvou místech: nejdříve (obr. 10) v bodě A, kde se přístroj nastaví koncem c vzhůru, a potom v bodě A'; v tomto případě se přístroj drží vzhůru koncem d. Bod A se zvolí tak, aby hledíme-li z a na konec c, viděli jsme jej v jedné přímce se špičkou stromu. Bod A' se zvolí tak, aby při pohledu z a' na bod d', jsme viděli v prodloužení pohledu B. Ve vyhledávání těchto bodů A a A'[1] spočívá celé měření, neboť hledaná část výšky stromu BC je rovna vzdálenosti AA'. Rovnice vyplývá z toho, jak lze snadno odvodit, že $aC = BC$ a $a'C = 2BC$, takže

$$a'C - aC = BC.$$

Vidíme, že použitím tohoto jednoduchého přístroje můžeme změřit výšku stromu, aniž bychom se přiblížili k jeho kmenu. Je zřejmé, že můžeme-li přijít až ke kmenu, postačí k zjištění jeho výšky nalézt pouze jeden z bodů, A nebo A'.

Místo dvou latěk můžeme také použít čtyř špendlíků, které napícháme do destičky příslušným způsobem. Tento přístroj je ještě jednodušší.

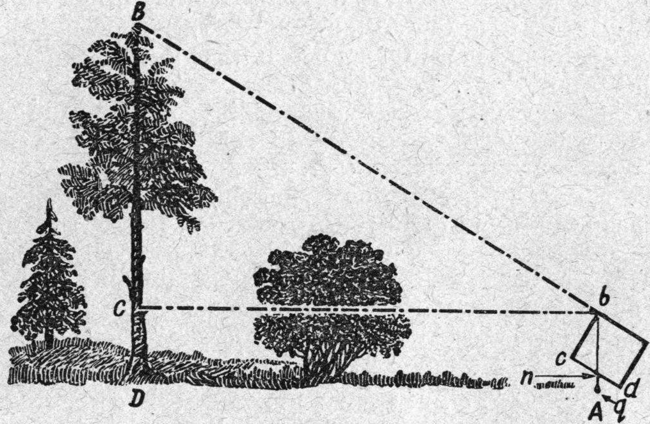
Lesnický výškoměr

Nyní je třeba objasnit, jak jsou zkonstruovány „skutečné“ výškoměry, kterých se používá v lesnické praxi. Popíšeme jeden z těchto výškoměrů, který trochu pozměníme

[1] Tyto body musí ležet stále v jedné přímce se základnou stromu.

tak, aby jej bylo možno zhotovit vlastními prostředky. Podstata zařízení je patrna z obr. 11.

Kartonový nebo dřevěný obdélník *abcd* držíme tak, abychom hledíme-li podél ramene *ab*, viděli v jeho prodloužení vrchol stromu *B*. V bodě *b* je na niti zavěšeno závažíčko *q*. Při měření zjistíme bod *n*, ve kterém nit protíná rameno *cd*.



Obr. 11. Schema použití lesnického výškoměru.

Trojúhelníky *bBC* a *bnc* jsou si podobné, neboť oba jsou pravoúhlé a mají stejné ostré úhly *bBC* a *bnc* (s navzájem rovnoběžnými stranami).

Můžeme tedy napsat úměru:

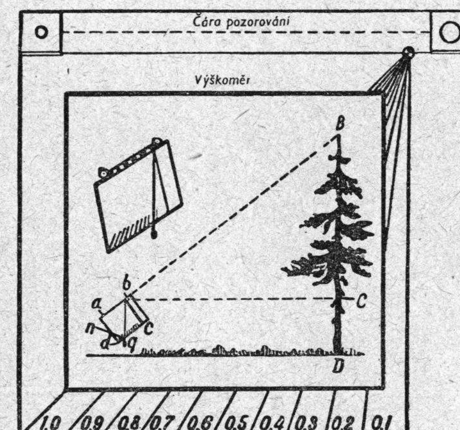
$$BC : nc = bC : bc,$$

odkud

$$BC = bC \frac{nc}{bc}.$$

Jelikož *bC*, *nc* a *bc* lze změřit bezprostředně, lze snadno stanovit hledanou výšku stromu, připočteme-li výšku spodní části *CD* kmene (výšku přístroje nad zemí).

Zbývá dodat několik podrobností. Jestliže rameno *bc* destičky bude na příklad 10 cm velké a na rameno *dc* naneseme centimetrové značky, pak poměr $\frac{nc}{bc}$ bude vždy udávat desetinný zlomek, který přímo ukáže, jakým zlomkem vzdálenosti *bC* je výška stromu *BC*. Na příklad protne-li nit rameno *cd* u sedmého dílku (t. j. $nc = 7$ cm), znamená to, že výška stromu nad výškou oka je rovna 0,7 vzdálenosti pozorovatele od kmene.



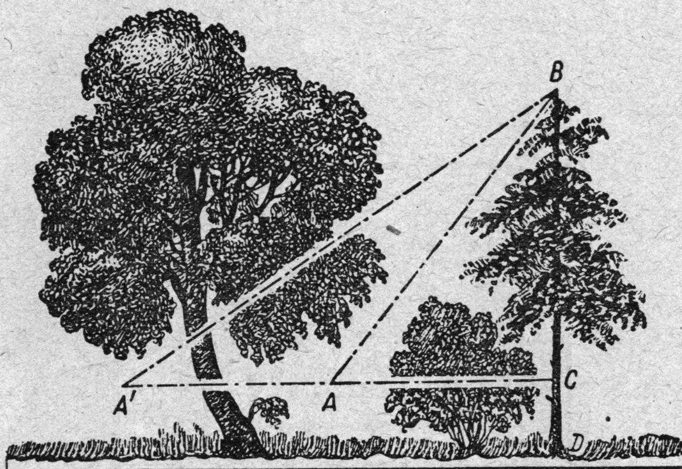
Obr. 12. Lesnický výškoměr.

Druhé zlepšení se týká způsobu pozorování: abychom mohli pohodlně hledět podél čáry *ab*, můžeme v horních rozích lepenkového obdélníku ohnout dva čtverečky a udělat v nich dírku: jednu menší pro oko, druhou větší, pro zamíření na vrcholek stromu (obr. 12).

Dalším zdokonalením je přístroj, zobrazený skoro ve skutečné velikosti na obrázku 12. Vyrobit jej v takové formě lze snadno a rychle; není k tomu třeba žádné řemeslné zkušenosti. Takový přístroj nezabírá v kapse mnoho místa a umožní při exkursi rychle stanovit výšku různých předmětů: stromů, sloupů, budov a pod.

Úloha

Lze uvedeným přístrojem měřit výšku stromu, aniž bychom se přiblížili ke kmeni? Lze-li, jak se to dělá?



Obr. 13. Jak se měří výška stromu bez přiblížení k jeho kmenu.

Řešení

Přístroj je třeba zaměřit na vrcholek stromu B ze dvou bodů A a A'. Připusťme, že v A jsme stanovili $BC = 0{,}9\ AC$, a v bodě A', $BC = 0{,}4\ A'C$. Víme, že:

$$AC = \frac{BC}{0{,}9},\quad A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$

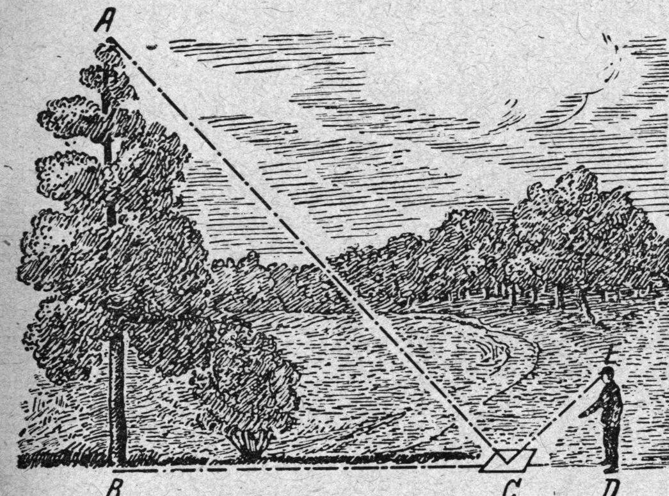
odkud

$$AA' = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{25}{18} BC,$$

takže

$$AA' = \frac{25}{18} BC,\ \text{neboli}\ BC = \frac{18}{25} A'A = 0{,}72\ A'A.$$

Vidíte, že změřením vzdálenosti $A'A$ mezi oběma pozorovacími stanovišti a násobením vzdálenosti jistým zlomkem, stanovíme hledanou nedosažitelnou výšku.



Obr. 14. Měření výšky pomocí zrcadla.

Pomocí zrcadla

Úloha

Uvedeme ještě jeden zajímavý způsob stanovení výšky stromu pomocí zrcadla. V jisté vzdálenosti (obr. 14) od měřeného stromu položíme na rovnou půdu v bodě C horizontálně zrcadlo a odejdeme od něj do takového bodu D, z kterého můžeme ve stoje pozorovat v zrcadle vrcholek stromu A. Pak je strom (AB) tolikrát větší než pozorovatel

(ED), kolikrát je vzdálenost stromu od zrcadla BC větší než vzdálenost pozorovatele od zrcadla CD. Proč?

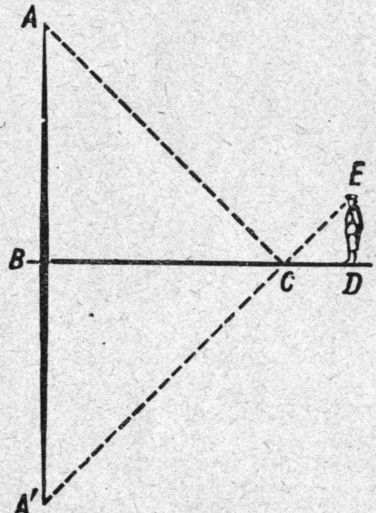
Řešení

Tento způsob měření je založen na zákonu odrazu světla. Vrcholek A (obr. 15) se odráží v bodu A' tak, že $AB = A'B$. Z podobnosti trojúhelníků BCA' a CDE plyne:

$$A'B : ED = BC : CD.$$

V této úměře stačí nahradit $A'B$ stejně velkým AB, abychom zdůvodnili poměry uvedené v úkolu.

Tohoto pohodlného a snadného způsobu lze použít za každého počasí, avšak pouze v případě osamělého stromu. Těžko bychom jej úspěšně použili v hustém lese.



Obr. 15. Geometrická konstrukce k methodě měření výšky pomocí zrcadla.

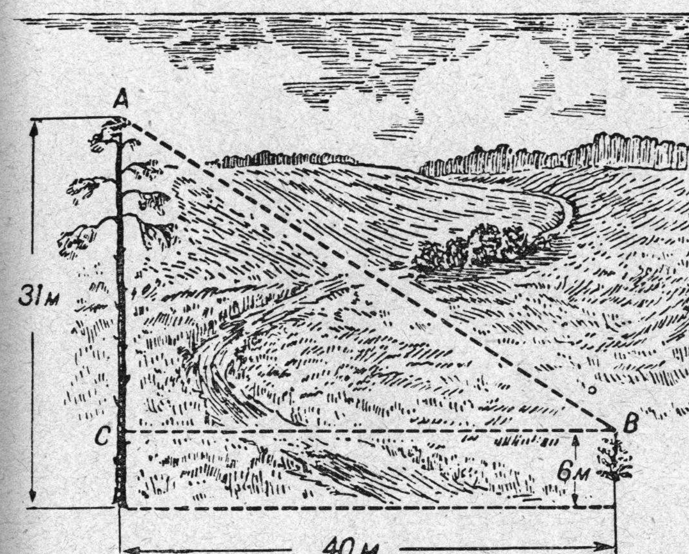
Úloha

Jak je třeba postupovat ve výše uvedeném případě, nemůžeme-li se z nějakých důvodů přiblížit až ke stromu?

Řešení

Je to starý problém, který se vyskytl před více než 500 lety. Řešil jej už středověký matematik Antonius de Cremona v díle „O praktickém zeměměřičství“ roku 1400.

Úkol se řeší dvojnásobným použitím právě popsaného způsobu – umístěním zrcadla na dvou místech. Když narýsujeme příslušný náčrtek, můžeme z podobnosti trojúhelníků snadno odvodit, že hledaná výška stromu je rovna výšce pozorovatelových očí nad zemí, násobené poměrem vzdáleností poloh zrcadla k rozdílu vzdáleností pozorovatele od zrcadla.



Obr. 16. Jak velká je vzdálenost mezi vrcholky sosen?

Dvě sosny

Úloha

Dvě sosny rostou 40 m od sebe. Změřili jsme je; jedna je vysoká 31 m, druhá je ještě mladá, měří 6 m. Vypočtěte vzájemnou vzdálenost jejich špiček.

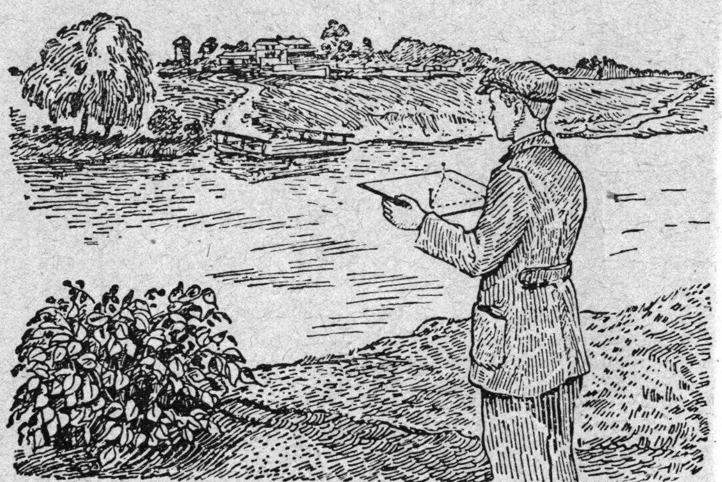
Řešení

Hledaná vzdálenost špiček sosen (obr. 16) je podle Pythagorovy věty $\sqrt{40^2 + 25^2} = 47$ m.

II. GEOMETRIE U ŘEKY

Šířka řeky

Ten, kdo zná geometrii, může změřit šířku řeky aniž ji překročí stejně snadno, jako stanovit výšku stromu bez toho, že by se šplhal na jeho vrcholek. Nedostupné vzdálenosti se měří stejnými způsoby, jakými jsme měřili nedostupné výšky. V obou případech se stanovení hledané vzdá-



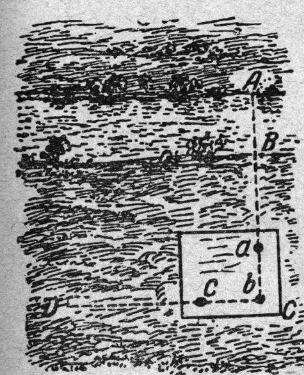
Obr. 17. Měření šířky řeky špendlíkovým přístrojem.

lenosti převádí na měření jiné vzdálenosti, kterou můžeme snadno změřit.

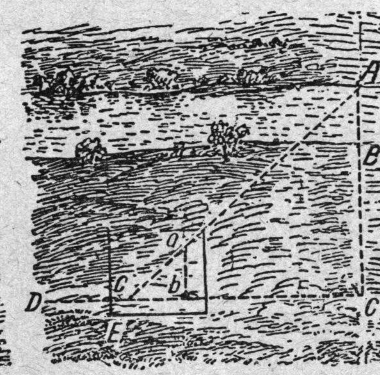
Z mnoha způsobů řešení uvedeného úkolu uvedeme několik nejjednodušších:

1. Při prvním způsobu je třeba mít k disposici známý už

„přístroj" se třemi špendlíky ve vrcholech rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka (obr. 17). Máme na příklad stanovit šířku řeky AB (obr. 18), stojíce na břehu v bodě B, aniž bychom se přemístili na druhý. Postavíme se někam do bodu C a držíme špendlíkový přístroj u očí tak, abychom při pohledu jedním okem ve směru dvou špendlíků viděli, že



Obr. 18. První použití špendlíkového přístroje.

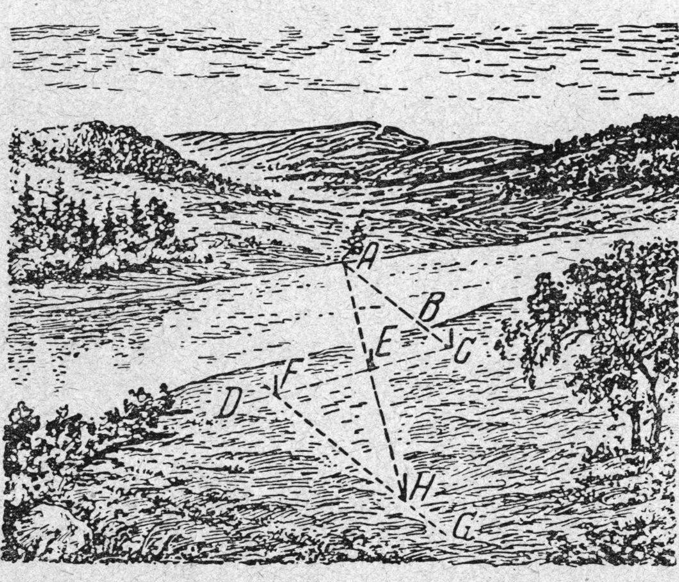


Obr. 19. Druhé použití špendlíkového přístroje.

se oba kryjí s body B a A. Je zřejmé, že když toho dosáhneme, budeme se nalézat v prodloužení přímky AB. Nyní, aniž bychom pohnuli destičkou, hledíme ve směru druhých dvou špendlíků (kolmo k předešlému směru) a zapamatujeme si nějaký bod C, který se kryje se špendlíky, t. j. leží na přímce kolmé k AC.

Potom v místě C zarazíme do země tyčku a jdeme s přístrojem ve směru přímky CD, až dojdeme do takového bodu E (obr. 19), odkud lze současně zakrýt špendlíkem b tyč v bodu C a špendlíkem a bod A. To znamená, že jsme na břehu stanovili třetí vrchol trojúhelníku ADE, ve kterém je úhel u C pravý a úhel u E roven ostrému úhlu špendlíkového přístroje, t. j. $\frac{1}{2}$ pravého. Je zřejmé, že také úhel A je roven $\frac{1}{2}$ pravého, tedy také $AC = CE$. Změříme-li vzdálenost CE třeba kroky, stanovíme vzdálenost AC, a když odečteme vzdálenost BC, kterou lze snadno přímo změřit, určíme hledanou šířku řeky.

Je dost nepohodlné a nesnadné držet v ruce špendlíkový přístroj nehybně; proto je nejlépe upevnit destičku na špičatou hůl, kterou zabodneme kolmo do země.

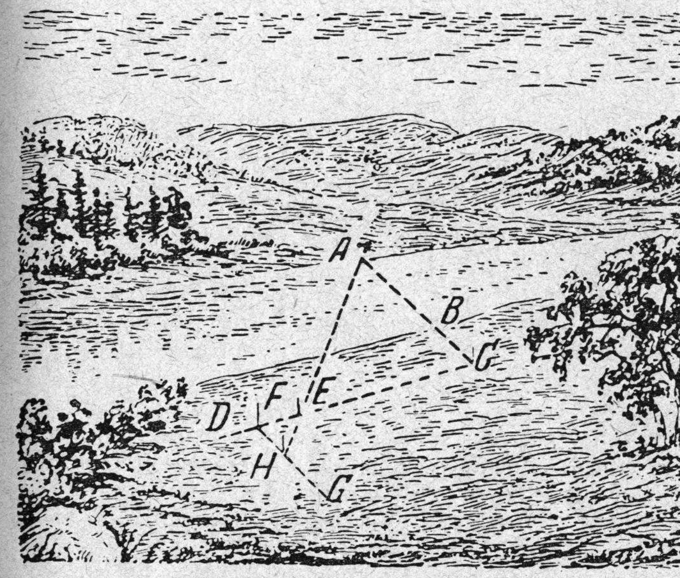


Obr. 20. Měření šířky užitím totožnosti trojúhelníků.

2. Druhý způsob se podobá prvému. V tomto případě se rovněž nalezne bod C v prodloužení AB a pomocí špendlíkového přístroje se stanoví přímka CD kolmá k CA. Avšak další postup je jiný (obr. 20). Na přímce CD se stanoví stejné vzdálenosti CE a EF libovolné délky a v bodech E a F se zabodnou tyče. Když se postavíme do bodu F se špendlíkovým přístrojem, stanovíme směr FG kolmý na FC. Nyní, když jdeme podél FG, nalezneme na této přímce

takový bod H, z kterého tyč zakrývá bod A. To znamená, že body G, E a A leží v jedné přímce.

Úkol je vyřešen. Vzdálenost FH se rovná vzdálenosti AD, od které již stačí odečíst vzdálenost BC, abychom stanovili hledanou šířku řeky (čtenář se jistě sám dovtípí, proč se FH rovná AC).



Obr. 21. Měření šířky užitím podobnosti trojúhelníků.

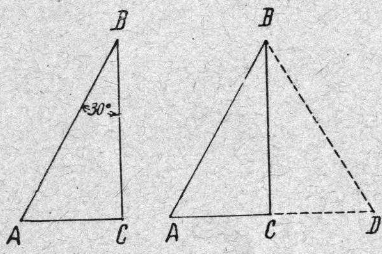
Tento způsob vyžaduje více místa než předchozí; dovoluje-li terén použít obou způsobů, je užitečné kontrolovat jeden druhým.

3. Právě uvedený způsob lze poněkud pozměnit: na přímku CF nenaneseme celou vzdálenost EC, nýbrž několikráte menší. Na obrázku 21 je případ, kdy je FE čtyřikrát menší než EC. Potom postupujeme jako dříve: ve směru FG, kolmém k FC, vyhledáme bod H, z kterého tyč

zakrývá bod A. V tomto případě však FH není rovno AC, nýbrž je čtyřikrát menší: trojúhelníky ACE nejsou shodné, nýbrž pouze podobné (mají stejné úhly, avšak nestejné strany). Z podobnosti trojúhelníků plyne úměra:

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1$$

To znamená, že když změříme FH a násobíme výsledek čtyřmi, dostaneme vzdálenost AC, a když odečteme BC, zjistíme hledanou šířku řeky.



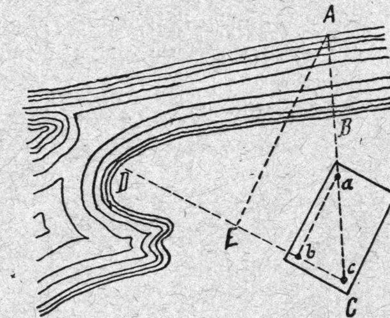
Obr. 22. Kdy je odvěsna rovna polovině přepony.

Při tomto způsobu vystačíme s menší plochou a proto jej lze snadněji provést.

4. Čtvrtý způsob je založen na následující vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku: když je jeden z jeho ostrých úhlů roven 30^0, je protilehlá odvěsna rovna polovině přepony. O správnosti tohoto tvrzení se lze přesvědčit velmi snadno. Budiž úhel B pravoúhlého trojúhelníku ABC roven 30^0 (obr. 22); dokážeme, že v tomto případě je $AC = \frac{1}{2} AB$. Trojúhelník ABC překlopíme kolem BC tak, aby byl položen symetricky vůči své původní poloze (obr. 22 vpravo). Vznikne trojúhelník ABD. Rameno ACD je kolmé na CB, neboť oba úhly u C jsou pravé. V trojúhelníku ABD je úhel $A = 60^0$, úhel ABC, vzniklý složením dvou úhlů po 30^0 je rovněž 60^0. Tedy $AD = BC$, protože to jsou strany ležící proti stejným úhlům. Avšak $AC = \frac{1}{2} AD$, tedy $AC = \frac{1}{2} AB$.

Chceme-li použít této vlastnosti trojúhelníku, musíme rozmístit špendlíky na destičce tak, aby tvořily vrcholy pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je rovna polovině druhé. S tímto přístrojem se postavíme do bodu C (obr. 23) tak, aby se směr AC ztotožnil s odvěsnou špend-

líkového přístroje trojúhelníku. Když hledíme podél kratší odvěsny tohoto trojúhelníku, naznačíme směr CD a vyhledáme na něm takový bod, aby směr AE byl kolmý k CD (což se provede rovněž špendlíkovým přístrojem). Lze snadno odvodit, že vzdálenost CE – odvěsna ležící proti úhlu 30^0 – je rovna polovině AC. To znamená, že změřením CE a odečtením vzdálenosti BC od jeho dvojnásobku dostaneme hledanou šířku řeky AB.



Obr. 23. Schema použití špendlíkového přístroje s úhlem 30^0.

To jsou čtyři jednoduché způsoby, pomocí nichž lze vždy změřit šířku řeky se zcela vyhovující přesností, aniž bychom se museli přepravovat na druhý břeh. Způsoby, které vyžadují přístroje složitější, byť rovněž takové, že je lze sestrojit vlastními prostředky, zde uvádět nebudeme.

Štítkem čepice

Uvedeme, jak se jednou podobný způsob měření hodil desátníku Kuprjanovovi na frontě. Jeho družstvo dostalo rozkaz změřit šířku řeky, přes kterou se měl připravit přechod.

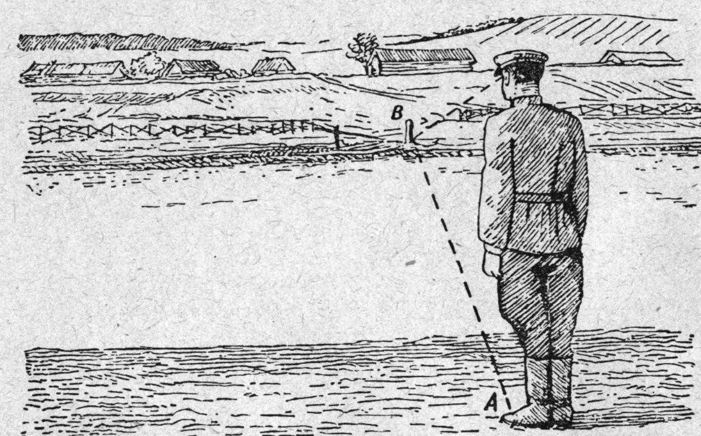
Kuprjanovovo družstvo se připlížilo k řece a zalehlo v křoví. Velitel spolu s vojínem Karpovem postoupili až k řece, odkud byl dobrý rozhled na druhý břeh, obsazený fašisty. Za těchto podmínek bylo ovšem nutno odhadnout šířku řeky od oka.

„Nu, Karpove, kolik?“

„Podle mne ne více než 100 až 110 metrů,“ odpověděl Karpov.

Kuprjanov souhlasil s Karpovem, avšak rozhodl se změřit šířku řeky ještě pomocí štítku své čepice.

Tento způsob je velmi jednoduchý. Postavíme se k řece tváří a nadzdvihneme čepici tak, aby se spodní okraj štítku ztotožnil s protějším břehem (obr. 24). Štítek lze po případě nahradit dlaní nebo zápisníkem, který přiložíme k čelu. Potom, aniž bychom změnili polohu hlavy, otočíme se vpravo nebo vlevo, případně dozadu (na tu stranu, kde



Obr. 24. Zpod štítku je třeba zahlédnout bod na protilehlém břehu.

je nejrovnější plocha přístupná přímému měření), a zapamatujeme si vzdálenější bod, který vidíme zpod štítku, dlaně nebo zápisníku.

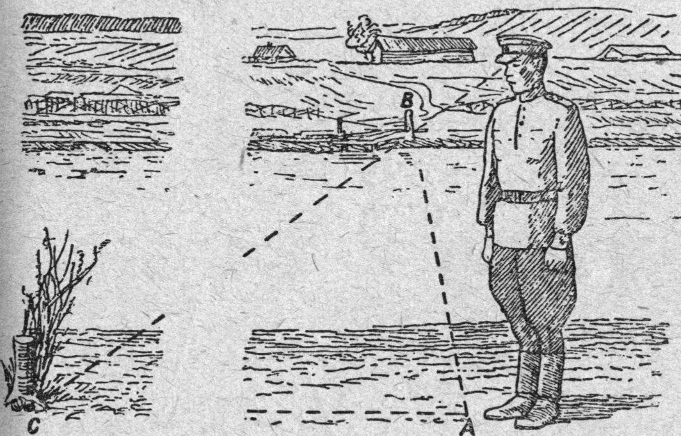
Vzdálenost tohoto bodu bude přibližně rovna šířce řeky.

Tohoto způsobu užil Kuprjanov. Postavil se rychle v křoví, přiložil k čelu zápisník, stejně rychle se otočil a zapamatoval si nejvzdálenější bod. Potom se spolu s Karpovem připlížili k tomuto bodu a provázkem změřili jeho vzdálenost od svého původního stanoviště. Naměřili tak 105 metrů.

Kuprjanov ohlásil výsledek veliteli.

Úloha

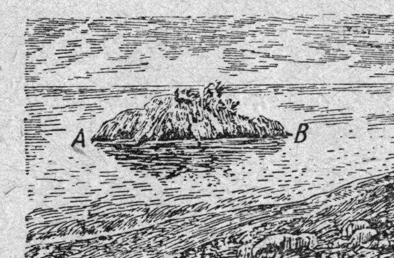
Podejte geometrické zdůvodnění methody „štítkem čepice“.



Obr. 25. Stejným způsobem vyznačíme bod na svém břehu.

Řešení

Zorný paprsek, dotýkající se konce štítku (dlaně, zápisníku), má nejdříve směr k protilehlému břehu (obr. 24). Když se otočíme, opíše zorný paprsek podobně jako rameno kružítka kružnici o poloměru $AC = AB$ (obr. 25).



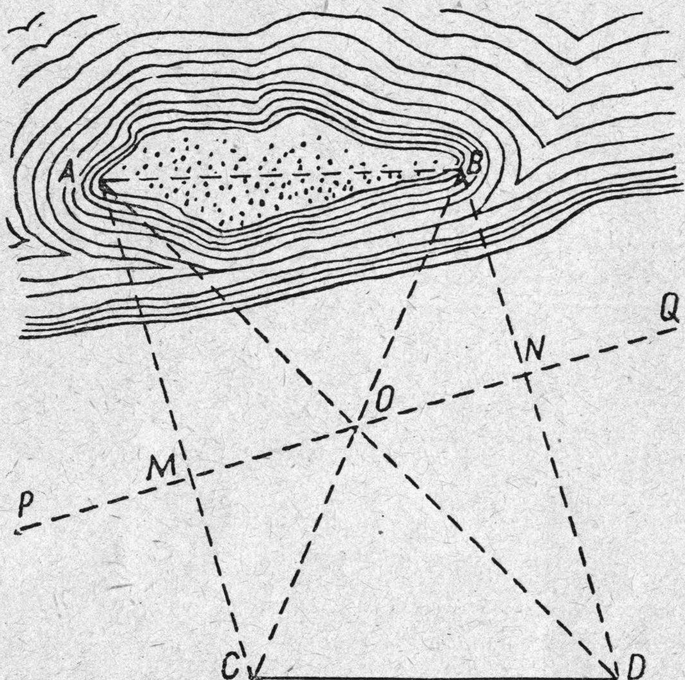
Obr. 26. Jak se určí délka ostrova.

Délka ostrova

Úloha

Máme řešit těžší úkol. Stojíme u řeky nebo jezera a vidíme ostrov (obr. 26), jehož délku máme změřit, aniž bychom opustili břeh. Je možné rozřešit tento úkol?

Ačkoli jsou v tomto případě nepřístupny oba konce měřené čáry, lze úkol rozřešit dokonce i bez složitých přístrojů.



Obr. 27. Použijeme totožnosti pravoúhlých trojúhelníků.

Řešení

Máme změřit délku ostrova AB (obr. 27) a zůstat přitom stále na břehu. Vybereme na břehu dva libovolné body P a Q, zapíchneme v nich tyče, a na přímce PQ najdeme body M a N tak, aby směry AM a BN svíraly se směrem PQ

pravé úhly (k tomu použijeme špendlíkového přístroje). V polovině vzdálenosti MN, kterou označíme O, zapíchneme tyč a v prodloužení čáry AM vyhledáme takový bod C, odkud tyč O zakrývá bod B. Podobně na prodloužení BN vyhledáme bod C, odkud tyč O zakrývá konec ostrova A. Vzdálenost CD je potom hledanou délkou ostrova.

Obr. 28. Stanovení vzdálenosti chodce jdoucího po druhém břehu řeky.

Důkaz je snadný. Podívejte se na pravoúhlé trojúhelníky AMO a OND. Odvěsny MO a NO jsou si rovny a kromě toho jsou si navzájem rovny také úhly AOM a NOD – čili trojúhelníky jsou shodné a $AO = OD$. Stejně dokážeme, že $BO = OC$. Když srovnáme trojúhelníky ABO a COD, přesvědčíme se o jejich rovnosti a tím také o rovnosti AB a CD.

Chodec na druhém břehu

Úloha

Po břehu podél řeky jde člověk. S druhého břehu pozorujete dobře jeho kroky. Můžete stanovit aspoň přibližně jeho vzdálenost od vás, aniž byste se pohnuli s místa? Nemáte po ruce žádný přístroj.

Řešení

Nemáte sice přístroj, avšak máte oči a ruce – to stačí. Natáhněte ruku směrem k chodci a podívejte se na konec palce levým okem jde-li směrem vlevo, a pravým okem jde-li chodec směrem vaší pravé ruky. V okamžiku, kdy palec zakryje chodce (obr. 28), zavřete oko, kterým jste se dosud dívali, a otevřete druhé: chodec bude posunut poněkud dozadu. Dávejte pozor kolik kroků udělá, než se bude znovu krýt s vaším palcem. Tím získáte všechny údaje, které jsou potřebné k přibližnému určení vzdálenosti.

Teď objasníme, jak použijeme těchto údajů k stanovení vzdálenosti. Na obr. 28 znázorňují body a a b vaše oči, bod M konec palce natažené ruky, bod A první polohu chodce, B – jeho druhou polohu. Trojúhelníky abM a ABM jsou podobné (musíte se otočit k chodci tak, aby aB bylo přibližně rovnoběžné se směrem jeho chůze). Potom v úměře $BM : bM = AB : ab$ neznáme pouze jeden člen, totiž BM. Všechny ostatní můžeme bezprostředně určit. Opravdu, bM je délka natažené ruky, ab – vzdálenost mezi zřítelnicemi vašich očí. AB jsme změřili kroky chodce (krok lze považovat přibližně za $^3/_4$ metru). A tak hledaná vzdálenost chodce na protějším břehu řeky je

$$MB = AB \cdot \frac{bM}{ab}.$$

Jestliže je vzdálenost zřítelnic vašich očí (ab) rovna 6 cm, délka bM od palce natažené ruky k očím 60 cm a chodec udělal na příklad 14 kroků, je jeho vzdálenost od vás

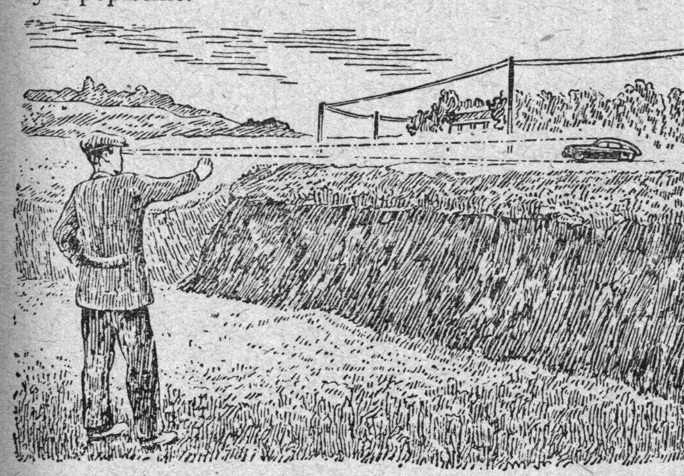
$$MB = 14\,\frac{60}{6} = 140 \text{ kroků, tedy 105 metrů.}$$

Stačí, když si předem změříte vzdálenost mezi zřítelnicemi a vzdálenost očí od konce natažené ruky, abyste mohli rychle změřit vzdálenost nedostupných předmětů pouze tím, že si zapamatujete poměr $\frac{bM}{ab}$, neboť potom stačí násobit vzdálenost AB tímto poměrem. U většiny lidí je tento poměr roven s malými odchylkami 10. Nesnáze vznikají

pouze v tom, jak stanovit vzdálenost AB. V našem případě jsme použili kroků chodce. Avšak lze použít i jiných údajů. Měříte-li na příklad vzdálenost k nákladnímu vlaku, lze odhadnout vzdálenost AB srovnáním s délkou nákladního vagonu, která je obvykle známá (7,6 m). Určujete-li vzdálenost od domu, odhadnete AB srovnáním s šířkou okna, s délkou cihly a pod.

Této methody lze použít k určení rozměru vzdáleného předmětu, je-li známa jeho vzdálenost od pozorovatele. K tomuto účelu lze použít také jiných „dálkoměrů“, které nyní popíšeme.

Obr. 29. Zápalkový dálkoměr.

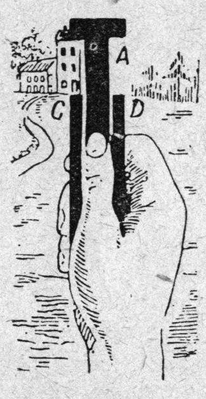


Obr. 30. Použití zápalkového dálkoměru ke stanovení nedostupných vzdáleností.

Nejjednodušší dálkoměry

V první kapitole jsme popsali nejjednodušší přístroj k měření výšek – výškoměr. Nyní popíšeme nejjednodušší zařízení k měření nepřístupných vzdáleností – „dálkoměr“. – Nejobyčejnější „dálkoměr“ lze vyrobit z obyčejné zápalky. K tomu stačí nanést na jednu její stranu milimetrové značky, nejlépe černé a světlé (obr. 29).

Tohoto přístroje lze použít k odhadu vzdálených předmětů pouze v těch případech, kdy jsou vám známy rozměry předmětu (obr. 30). Ostatně tento požadavek je nutno splnit také u všech dokonalejších přístrojů. Předpokládejme, že v dálce vidíte člověka a kladete si za úkol stanovit jeho vzdálenost. Zde může pomoci zápalkový dálkoměr. Držíte jej v natažené ruce a pozorujíce jedním okem, ztotožníte její horní konec s horní částí vzdálené postavy. Potom pomalu posouváte po zápalce nehet palce a zastavíte jej v tom bodě, který se promítá k nohám postavy. Nyní stačí, když zjistíte, u které značky jste zastavili palec – tím získáte všechny potřebné údaje.



Obr. 31. Výsuvný dálkoměr v praxi.

Snadno se lze přesvědčit o správnosti úměry

$$\frac{\text{hledaná vzdálenost}}{\text{vzdálenost oka od zápalky}} = \frac{\text{střední výška člověka}}{\text{naměřená část zápalky}}$$

Odtud lze snadno vyčíslit hledanou vzdálenost. Je-li na příklad vzdálenost zápalky od očí 60 cm, výška člověka 1,7 m a změřená část zápalky 12 mm, pak hledaná vzdálenost je:

$$60 \, \frac{1700}{12} = 8500 \text{ cm} = 85 \text{ m}.$$

Abychom nabyli jistého cviku v zacházení s tímto dálkoměrem, změřme výšku některého ze svých přátel a požádejme ho, aby odstoupil do jisté vzdálenosti. Nyní se pokusíme zjistit, kolik kroků od nás odešel.

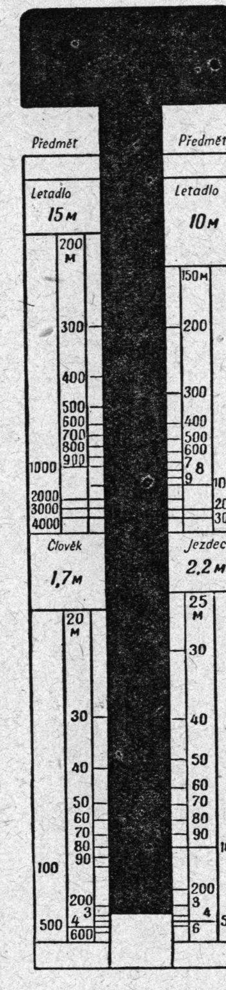
Touto methodou můžeme stanovit vzdálenost jezdce na koni (střední výška 2,2 m), cyklisty (průměr kola 75 cm)

telegrafního sloupu vedle trati (výška 8 m), vlaku, cihlové budovy a podobných předmětů, jejichž rozměry můžeme snadno zjistit odhadem s dostatečnou přesností. S podobnými předměty se při exkursi setkáme velmi často.

Pro ty, kteří nabyli zručnosti v ručních pracích, bude snadné zhotovit si vhodnější přístroj stejného typu, určený k odhadu vzdálenosti pomocí velikosti lidské postavy.

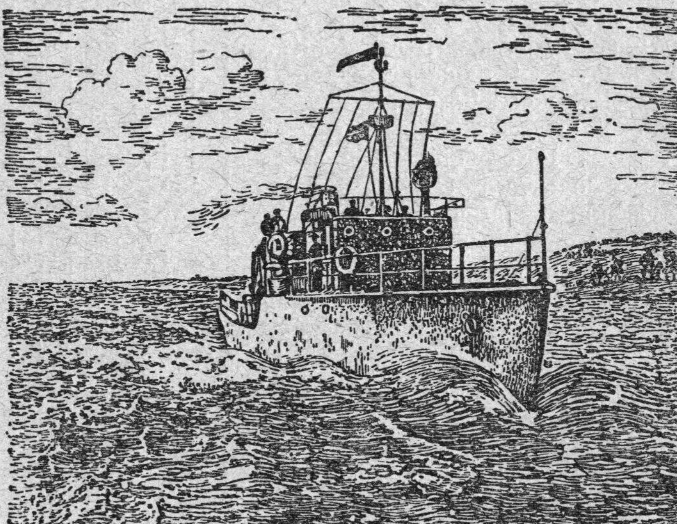
Podstata zařízení je jasná z obr. 31 a 32. Pozorovaný předmět se umístí do otvoru *A* vzniklého vyzdvižením šoupátka. Velikost vysunutí se doporučuje označit na částech *C* a *D* destičky. Abychom odstranili nutnost provádět výpočty, lze na pásu *C* nanést přímo u dílků odpovídající vzdálenosti, je-li pozorovaným předmětem lidská postava (přístroj se drží stále ve vzdálenosti natažené ruky). Na pravém pásu *D* lze nanést označení vzdálenosti, předem vypočtené pro případy, kdy se pozoruje jezdec na koni (2,2 m). Pro použití velikosti telegrafních sloupů (8 m), letadla s rozpětím křídel 15 m a podobných velkých předmětů, lze použít horní volné části pásů *C* a *D*. Přístroj potom nabude podoby zobrazené na obr. 32.

Přirozeně, že přesnost takového odhadu není velká. Je to pouze odhad a nikoli měření. V příkladu uvedeném dříve, kdy byla vzdálenost k lidské postavě odhadnuta na 85 m,



Obr. 32. Zařízení výsuvného dálkoměru.

by chyba 1 mm při měření zápalky způsobila odchylku 7 m (1/12 z 85). Ale je-li člověk čtyřikrát dále, nezměřili bychom na zápalce 12, nýbrž pouze 3 mm a potom by chyba $\frac{1}{2}$ dílku na zápalce způsobila odchylku výsledku o 57 metrů. Proto je náš přístroj pro měření lidské postavy spolehlivý pouze do vzdálenosti 100 až 200 metrů. Při odhadu větší vzdálenosti je třeba zvolit větší předměty.



Obr. 33. Kýlová vlna.

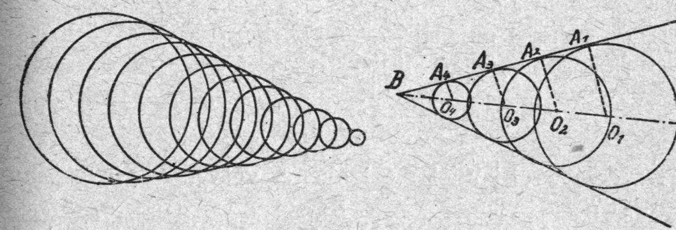
Kýlová vlna

Vrátíme se k řece. Stojíte na mostě a pozorujete stopu, kterou zanechává za sebou rychle plující loď. Zpozorujete, že se od přídi táhnou dva hřebeny vln, které svírají jistý úhel (obr. 33).

Jak vznikají? Proč svírají tím menší úhel, čím rychleji pluje loď?

Abychom si objasnili příčinu vzniku vln, musíme se vrátit k všeobecně známému zjevu vzniku rostoucích kruhů na hladině, způsobených kamenem vhozeným do vody.

Když házíme do vody kamínek za kamínkem v přesných časových intervalech, vytvářejí se na hladině kruhy. Čím později byl kamínek vržen, tím menší je kruh, který vyvolal. Budeme-li házet kamínky v přímce, vzniklé kruhy vytvoří dohromady vlnu podobnou té, která vzniká u přídi lodi. Čím jsou kamínky menší a čím častěji je budeme házet, tím větší bude podobnost mezi oběma vlnami. Když ponoříme do vody hůl a jedeme jí po povrchu vody, nahrazujeme neustálé házení kamínků spojitým pohybem a vytvoříme stejnou vlnu, jaká vzniká u přídi lodi.



Obr. 34. Jak vzniká kýlová vlna.

Abychom si vše dobře objasnili, stačí k tomuto názornému obrazu připojit jen několik podrobností. Když se příď lodi zařezává do vody, vytváří každým okamžikem stejnou kruhovou vlnu, jakou vytvoří vržený kámen. Kruh se rozšiřuje na všechny strany, avšak za tuto dobu se stačí loď posunout vpřed a vyvolat další kruhovou vlnu, kterou okamžitě následuje třetí, atd. Přerývaný vznik kruhů, vyvolávaný kamínky, je nahrazován spojitým pohybem, takže vznikne obraz znázorněný na obr. 34. Hřebeny vln, které se setkají, se navzájem ruší, takže nezasaženy zůstanou pouze dvě malé části plné kružnice, nalézající se ve vnějších částech. Tyto vnější části se spojí a vytvoří dva hřebeny, které mají polohu vnějších tečen ke všem kruhovým vlnám (obr. 34 vpravo).

Takový je původ vodních hřebenů, které vidíme za lodí a vůbec za každým tělesem, které se pohybuje dostatečnou rychlostí po vodním povrchu.

Odtud přímo plyne, že tento zjev může nastat pouze v případě, kdy se těleso pohybuje rychleji než vlny na povrchu. Pojedeme-li holí po vodě pomalu, nevznikne přímá vlna: kruhové vlny se umístí jedna do druhé, takže nebude možno sestrojit jejich společnou tečnu.

Rozbíhající se hřebeny lze pozorovat také v tom případě, je-li předmět v klidu a voda teče kolem něj. Je-li proudění dostatečně rychlé, vzniknou vlny na vodě, tekoucí kolem mostních sloupů. Tvar vln bude ještě výraznější než u parníku, neboť jejich pravidelnost nebude rušena vlnami, které způsobuje lodní šroub.

Když jsme si objasnili geometrickou stránku věci, pokusíme se rozřešit následující úlohu.

Úloha

Na čem závisí úhel mezi oběma větvemi kýlové vlny parníku?

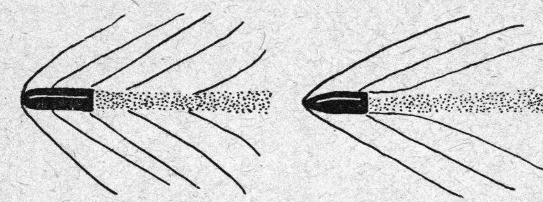
Řešení

Ze středu kruhových vln (obr. 34) narýsujeme poloměry k příslušným částem vln, které tvoří přímočarou vlnu, t. j. k bodům společné tečny. Lze snadno odvodit, že OB je dráha, kterou urazí příď lodi za jistou dobu a OA je vzdálenost, na kterou se za tuto dobu rozšíří vlnění. Poměr OB je sinus úhlu OBA a současně je to poměr rychlosti vlnění a rychlosti lodi. To znamená, že úhel B mezi hřebeny kýlové vlny závisí především na rychlosti lodi: sinus poloviny úhlu je úměrný této rychlosti. A naopak, z velikosti úhlu lze usuzovat na to, kolikrát je rychlost parníku větší než rychlost vln. Je-li na příklad úhel mezi oběma větvemi kýlové vlny 30^0, jak je tomu u většiny námořních dopravních lodí, je sinus jeho poloviny (sin 15 stupňů) roven 0,26; to znamená, že rychlost parníku je větší než rychlost šíření kruhových vln 1/0,26krát, t. j. přibližně čtyřnásobně.

Rychlost dělových střel

Podobné vlny, jaké jsme právě popisovali, vznikají také ve vzduchu, kde jsou způsobovány dělovými střelami.

Existují methody, kterými lze fotografovat letící střelu; na obr. 35 jsou reprodukovány dva obrazy střel letících



Obr. 35. Rázová vlna vytvořená ve vzduchu letící střelou.

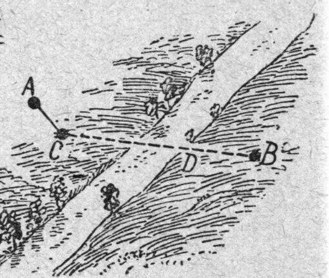
různou rychlostí. Na obou obrázcích je jasně patrna „rázová vlna“ (jak se jí v tom případě říká), která nás zajímá. Její původ je stejný jako původ kýlové vlny parníku. Také zde lze užít stejných geometrických poměrů, totiž, že sinus poloviny úhlu rázových vln je roven poměru rychlosti šíření vlnění ve vzduchu k rychlosti samotné střely. Ale ve vzduchu se vlnění šíří rychlostí blízkou rychlosti zvuku, t. j. 330 m za vteřinu. Proto máme-li k disposici snímek letící střely, můžeme přibližně stanovit její rychlost. Jak to lze provést na základě zde uvedených představ?

Řešení

Změříme úhel obou větví rázové vlny na obr. 35. V prvním případě má kolem 80^0, v druhém přibližně 55^0. Polovina je 40^0 a $27^1/_2{}^0$. Sinus 40^0 je 0,64, sin 27 $\frac{1}{2}^0$ je 0,46. Tedy rychlost šíření zvukové vlny, t. j. 330 m/sec, je v prvním případě 0,64 rychlosti střely, v druhém 0,46. Z toho je rychlost první střely rovna $\frac{330}{0{,}64} = 520$ m/sec, druhé $\frac{330}{0{,}46} = 720$ m/sec.

Vidíte, že zcela jednoduché geometrické úvahy nám pomohou pomocí fysiky rozřešit úkol, na první pohled velmi složitý, totiž stanovit rychlost střely z fotografie (výpočet je však pouze přibližný, neboť jsme nebrali v úvahu některé druhořadé okolnosti).

Obr. 36. Kde je třeba postavit most kolmý ke břehům, aby cesta z A do B byla nejkratší.



Obr. 37. Místo pro stavbu mostu je určeno.

Cesta přes řeku

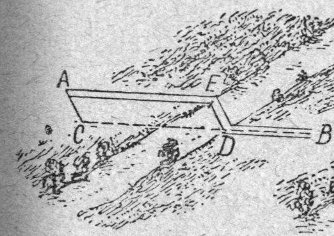
Úloha

Mezi body A a B teče řeka (nebo kanál) s přibližně rovnoběžnými břehy (obr. 36). Je třeba postavit přes řeku most, kolmý ke břehům. Kde je třeba vybrat místo pro stavbu mostu, aby cesta z A do B byla nejkratší?

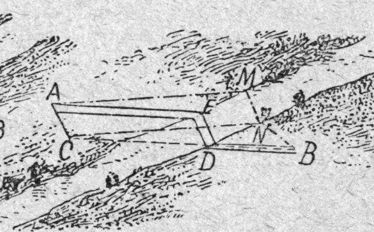
Řešení

Bodem A (obr. 37) vedeme přímku kolmou ke směru řeky a naneseme na ni úsečku AC rovnou šířce řeky; potom spojíme C s B. Bod D pak určuje místo, kde je potřeba postavit most, aby dráha do B byla nejkratší.

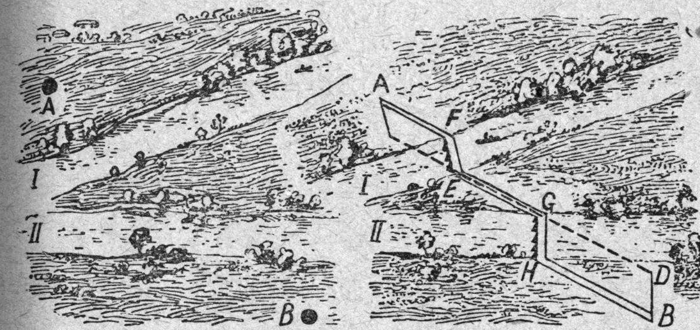
Opravdu, když postavíme most DE (obr. 38) a spojíme E s A, dostaneme dráhu $AEDB$, v které je část AE rovnoběžná s CD ($AEDC$ je kosodélník, neboť protější strany AC a ED jsou stejně velké a rovnoběžné). Proto dráha $AEDB$ je délkou rovna ACB. Lze snadno ukázat, že každá



Obr. 38. Most je postaven.



Obr. 39. Cesta AEDB je opravdu nejkratší.



Obr. 40. Oba mosty postaveny.

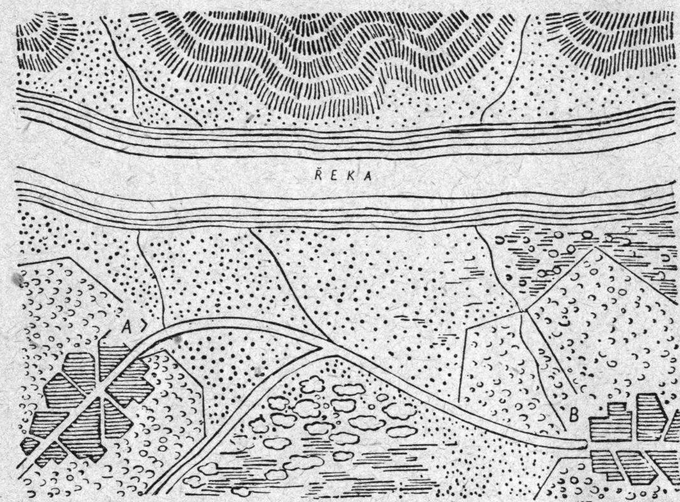
jiná dráha je delší. Připusťme, že jsme pojali podezření, že některá jiná dráha $AMNB$ (obr. 39) je kratší než $AEDB$, t. j. kratší než ACB. Když spojíme C s N, vidíme, že CN se rovná AM. To znamená, že $AMNB = ACNB$. Avšak CNB je zřejmě větší než CB, čili $ACNB$ je větší než ACB

a tedy větší než *AEDB*. Dráha *AMNB* není kratší, nýbrž delší než *AEDB*.

Kde postavit dva mosty

Úloha

Můžeme dostat ještě složitější úkol: nalézt nejkratší cestu z *A* do *B* přes řeku, kterou je třeba překlenout dvěma



Obr. 41. K úkolu o vodní nádrži.

mosty, postavenými kolmo ke břehům (obr. 40). V kterých místech je třeba postavit mosty?

Řešení

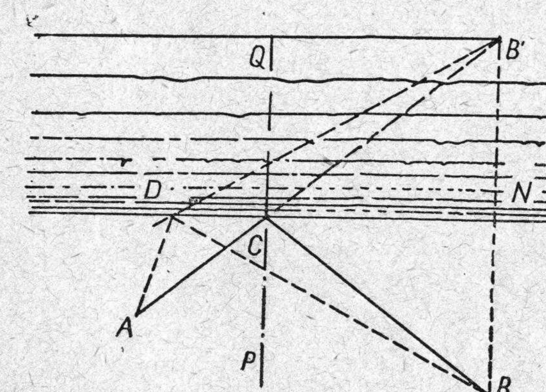
Z bodu *A* je třeba nanést úsečku *AC* (obr. 40 vpravo) rovnou šířce řeky v části *I* a kolmou k jejím břehům. Z bodu *B* je třeba nanést úsečku *BD,* rovnou šířce řeky v části *II* a rovněž kolmou ke břehům. Body *C* a *D* spojíme přímkou.

V bodě *E* postavíme most *EF* a v bodě *G* most *GH*. Dráha *AFEGHB* je nejkratší hledaná cesta z *A* do *B*.

Důkaz provede čtenář sám obdobnou úvahou, kterou jsme uvedli v předchozím případě.

Nejkratší vzdálenost

Uvedeme ještě jednu úlohu na nejkratší dráhu, která se dá řešit velmi jednoduchou, ale vtipnou konstrukcí.



Obr. 42. Geometrická řešení úkolu o volbě nejkratší dráhy.

Úloha

U břehu řeky je třeba postavit vodovodní nádrž, z níž by se voda vedla potrubím k vesnicím *A* a *B* (obr. 41). Ve kterém bodě je třeba nádrž postavit, aby potrubí od nádrže do obou vesnic bylo nejkratší?

Řešení

Úkol se redukuje na nalezení nejkratší vzdálenosti od *A* ke břehu a odtud k *B*.

Připusťme, že hledaná dráha je *ACB* (obr. 42). Překlopíme nákres kolem CN. Dostaneme tak bod B'. Jestliže je ACB nejkratší vzdálenost, pak, jelikož $CB' = CB$, musí dráha $AB'C$ být kratší než kterákoli jiná (na příklad ADB'). K nalezení nejkratší dráhy je třeba nalézt pouze bod C, t. j. průsečík přímky AB' s břehem řeky. Potom, když spojíme C s B, dostaneme druhou nejkratší část dráhy z A do B.

Když vztyčíme v bodě C kolmici k CN, snadno zjistíme, že úhly ACP a BCP tvořené oběma částmi nejkratší dráhy s těmito body, jsou si navzájem rovny ($\sphericalangle ACP = \sphericalangle B'CQ = \sphericalangle BCP$).

Takový je, jak známo, zákon šíření světelného paprsku, který se odráží od zrcadla: úhel dopadu je roven úhlu odrazu. Z toho plyne, že světelný paprsek při odrazu volí nejkratší dráhu – tento závěr byl už znám starověkému fysikovi a geometrovi Heronu Alexandrijskému před dvěma tisíci lety.

III. GEOMETRIE V KRAJINĚ

Živý úhloměr

Není obtížné zhotovit si jednoduchý úhloměr, avšak ani takový úhloměr nemíváme obvykle s sebou, když jsme na procházce někde za městem. V takových případech můžeme použít služeb t. zv. „živého úhloměru“, který nosíme stále s sebou. Jsou to naše vlastní prsty. Abychom jich mohli použít k přibližnému odhadu zorných úhlů, stačí provest několik předběžných výpočtů a měření.

Především je třeba stanovit, pod jakým zorným úhlem vidíme nehet ukazováčku na natažené ruce. Obvyklá šířka nehtu je jeden centimetr a jeho vzdálenost v této poloze přibližně 60 cm, proto jej vidíme přibližně v poloze pod úhlem 1^0 (o něco menším, neboť úhel 1^0 získáme ve vzdálenosti 57 cm). Mládež má kratší ruku, ale také menší nehet, takže zorný úhel zůstává přibližně stejný. Čtenář udělá dobře, když se nespolehne na knižní údaje a přesvědčí se, zda u něj nenastává podstatná odchylka: v takovém případě je třeba vyzkoušet jiný prst.

Když tyto údaje známe, máme k disposici způsob odhadování malých úhlů doslova holýma rukama. Každý vzdálený předmět, který se kryje s nehtem ukazováčku natažené ruky, vidíme pod úhlem 1^0, je umístěn ve vzdálenosti 57 krát větší než je jeho šířka. Jestliže nehet pokryje pouze polovinu předmětu, je jeho úhlová velikost rovna 2^0 a jeho vzdálenost 28 šířkám předmětu.

Úplněk měsíce pokrývá pouze polovinu nehtu, t. j. vidíme jej pod úhlem půl stupně. Je od nás proto vzdálen 114krát více než je jeho průměr.

Pro měření větších úhlů použijeme posledního článku palce, který držíme ohnutý na natažené ruce. U dorostlého člověka je délka (pozor: délka, nikoli šířka!) posledního článku kolem $3\frac{1}{2}$ cm a vzdálenost při natažené ruce kolem

55 cm. Lze snadno vypočítat, že úhlová délka se za těchto podmínek rovná 4°. To nám umožňuje odhadnout zorný úhel 4° (a také 8°).

K tomu je třeba připojit ještě dva úhly, které mohou být změřeny „na prstech", totiž ty, pod kterými se nám jeví na natažené ruce vzdálenosti:

1. mezi prostředníkem a ukazováčkem, když je co nejšířeji roztáhneme,

2. mezi palcem a ukazováčkem rovněž co možná nejvíce roztaženými.

Není nesnadné vypočítat, že první úhel je přibližně 7–8° a druhý 15–16° velký.

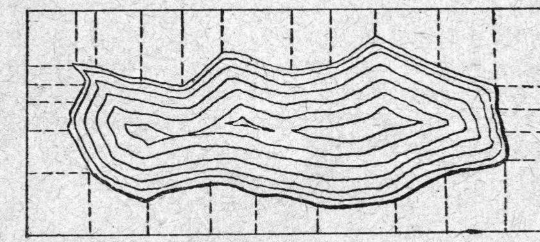
Případů, kdy můžete při procházce v otevřeném terénu použít „živého úhloměru", je mnoho. V dálce třeba vidíte nákladní vagon, který se zakryje polovinou článku palce vaší natažené ruky, t. j. vidíte jej pod úhlem asi 2°. Jelikož je délka nákladního vagonu známa (přibližně 6 m), snadno zjistíte, že vás od něho dělí vzdálenost 6×28, přibližně 170 m. Měření je přirozeně hrubé, ale stále spolehlivější než ničím nepodložený odhad od oka.

Současně uvedeme způsob, jak v terénu určovat pravé úhly použitím vlastního těla.

Máte-li vést některým bodem kolmici k danému směru, postavte se tváří k tomuto směru a aniž byste otáčeli hlavou, natáhněte volně ruku v tom směru, kterým máte vést kolmici. Když to uděláte, zvedněte palec natažené ruky, otočte k němu hlavu a zapamatujte si nějaký předmět – kamínek, keř a pod. – který se kryje s placem, když na něj hledíte příslušným okem (t. j. pravým, je-li natažena pravá ruka, a levým, je-li to levá ruka).

Pak zbývá pouze naznačit na zemi čáru od místa, kde jste stáli, k předmětu, abyste dostali hledanou kolmici. Je to způsob, který zdánlivě neslibuje nějaké skvělé výsledky, ale po několika cvičeních si začnete cenit služeb tohoto „živého příložníku", který není skoro o nic horší než rýsovací příložník.

„Živého úhloměru" můžete používat bez jakýchkoli zařízení k měření úhlové výšky hvězd nad horizontem, k stanovení vzájemné vzdálenosti hvězd v úhlové míře, zdánlivých rozměrů dráhy meteoru a pod. Na konec, když umíte bez přístrojů určovat kolmici v terénu, můžete přenést na papír jistou část terénu způsobem jasným z obr. 43, na příklad při mapování jezera změřit obdélník $ABCE$ a rovněž délky kolmic spuštěných z významných bodů jezera a vzdálenosti jejich základen od vrcholů obdélníků. V postavení Robinsona by se umění používat vlastních rukou k měření (a nohou k měření vzdáleností) mohlo hodit v nejrůznějších případech.



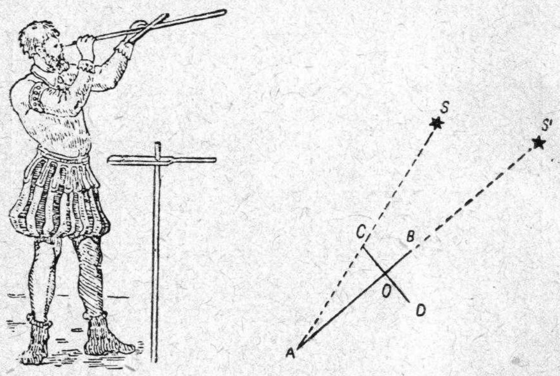
Obr. 43. Přenesení jezera na plán.

Jakovův kříž

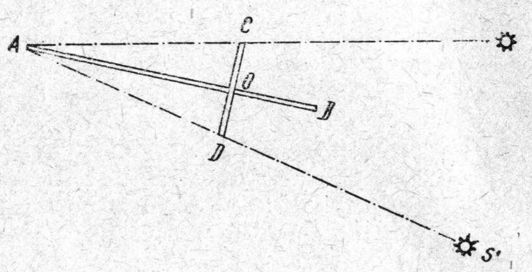
Chceme-li mít přesnější měřicí přístroj k měření úhlů než právě popsaný „živý úhloměr", můžeme si sestrojit jednoduchý a praktický přístroj, kterého kdysi používali naši předkové. Je to přístroj, nazývaný po svém vynálezci „Jakovův kříž", kterého se používalo v mořeplavectví do XVIII. století (obr. 44), dříve než byl postupně vytlačen vhodnějšími, pohodlnějšími a přesnějšími přístroji (sextanty).

Zmíněný přístroj se skládá z laťky AB dlouhé 70–100 cm, po které klouže kolmo nasazené rameno CD; obě části CO a OD posuvného ramene jsou stejné. Chceme-li tímto přístrojem určit úhlovou vzdálenost mezi hvězdami S a S'

(obr. 44), přiložíme k oku konec pravítka (A), (kde je pro pohodlnější pozorování upevněna provrtaná destička) a zamíříme laťku tak, aby hvězda S' byla u konce laťky B (obr. 44). Nyní zbývá změřit pouze vzdálenost AO, abychom, když známe délku CO, mohli vypočítat velikost úhlu



Obr. 44. Jakobův kříž a schema jeho použití.



Obr. 45. Stanovení úhlové vzdálenosti dvou hvězd pomocí Jakobova kříže.

SAS'. Ti, kdo znají trigonometrii, si odvodí, že tangenta hledaného úhlu je rovna poměru $\frac{CO}{AO}$; naše „trigonometrie v krajině", vyložená v této kapitole, rovněž stačí k provedení

tohoto výpočtu; z Pythagorovy věty vypočteme délku AC a potom nalezneme úhel, jehož sinus je roven $\frac{CO}{AC}$.

Hledaný úhel můžeme zjistit také graficky; narýsujeme na papír trojúhelník ACO v libovolném měřítku a změříme úhel A úhloměrem. Nemáme-li jej k disposici, měříme způsobem popsaným na str. 49.

K čemu je dobrá druhá polovina posuvného ramene? Té se používá v tom případě, kdy je měřený úhel příliš veliký, takže jej nelze změřit právě uvedeným způsobem. V tom případě se na hvězdu S' nezamíří rameno AB, nýbrž přímka AD, a příčné rameno se posune tak, aby se jeho konec C ztotožnil s hvězdou S (obr. 45). Není nic nesnadného nalézt velikost úhlu výpočtem nebo graficky.

Abychom nemuseli při každém měření provádět výpočty nebo kreslit výkresy, můžeme je provést předem při výrobě přístroje a poznamenat si výsledky na rameni AB; potom, když zamíříme přístroj na hvězdy, odečteme pouze údaj nanesený na bodě O, kam jsme předem poznamenali velikost měřeného úhlu.

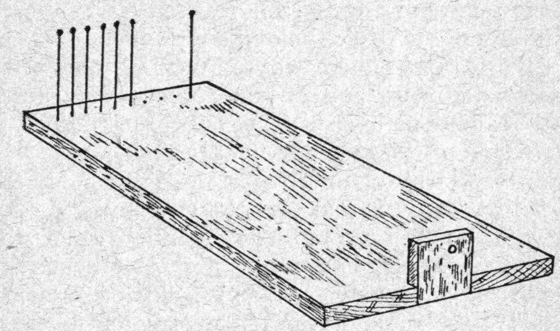
Hřebenový úhloměr

Ještě snadněji lze vyrobit jiný přístroj k měření úhlových délek, zvaný „hřebenový úhloměr", jehož tvar nám z povzdálí opravdu připomíná hřeben (obr. 46). Základnu přístroje tvoří destička libovolného tvaru, u jejíž jedné hrany je upevněn čtvereček s otvorem, který si pozorovatel přikládá k oku. Na protější straně destičky, ve vzdálenosti rovné 57. části jejich vzdálenosti od otvoru ve čtverečku se napíchá řada špendlíků s hlavičkami. Víme už, že v tom případě vidíme každou mezeru mezi špendlíky pod úhlem jednoho stupně. Špendlíky lze rozmístit také následujícím způsobem, který umožňuje přesnější výsledky: na stěně se narýsují dvě rovnoběžné čáry ve vzájemné vzdálenosti jed-

[1] Místo špendlíků lze použít také rámu s nataženými nitěmi.

noho metru, odstoupíme od ní do vzdálenosti 57 metrů a pozorujeme tyto čáry otvorem ve čtvercové destičce. Špendlíky zapíchneme do desky tak, aby každá dvojice sousedních špendlíků zakrývala čáry na stěně.

Při konečné úpravě přístroje můžeme některé ze zapí-



Obr. 46. Hřebenový úhloměr.

chaných špendlíků vyjmout, abychom mohli pohodlně měřit také úhly 2^0, 3^0 a 5^0. Způsob používání přístroje je zřejmý i bez výkladu. Tímto přístrojem lze měřit zorné úhly s přesností větší než $^1/_4{}^0$.

Dělostřelecký úhel

Dělostřelci nestřílí „na slepo", jak by se snad mohlo na první pohled zdát. Když znají výšku cíle, určí jeho úhlovou velikost a vypočtou vzdálenost od cíle: v jiném případě určují o jaký úhel je třeba zvýšit nebo snížit hlaveň, aby přenesli palbu z jednoho cíle na druhý. Dělostřelci řeší takové úkoly snadno a rychle nazpaměť. Jak to dělají?

Podívejme se na obr. 47. AB je oblouk kružnice o poloměru $AO = D$; ab je oblouk kružnice o poloměru $Oa = r$.

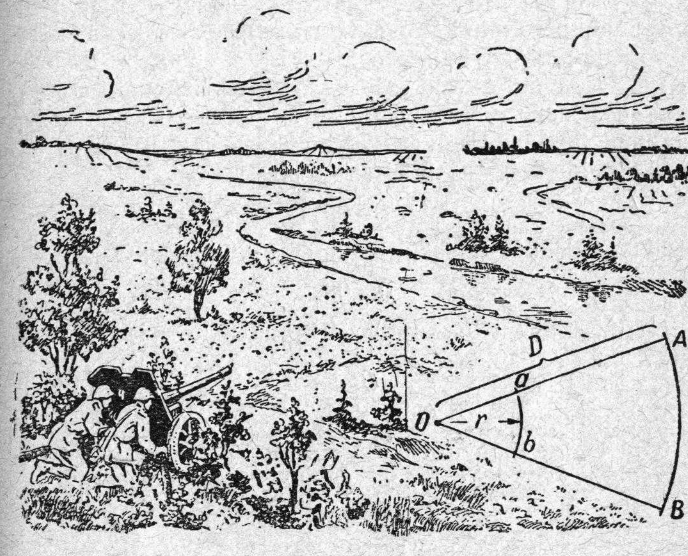
Z podobnosti obou výsečí AOB a aOb plyne

$$\frac{AB}{D} = \frac{ab}{r},$$

neboli

$$AB = \frac{ab}{r} D.$$

Poměr $\frac{ab}{r}$ charekterisuje velikost úhlu AOB.



Obr. 47. Schema dělostřeleckého úhloměru.

Když známe tento poměr, můžeme ze známé délky D snadno vypočíst AB, nebo ze známé délky AB hodnotu D.

Dělostřelci si usnadňují výpočet tím, že kružnici nedělí na 360 dílků, jak se to děje při dělení na stupeň, nýbrž na 6000 stejných částí, takže potom délka každého oblouku je rovna přibližně 1/1000 poloměru kružnice.

Nechť na příklad oblouk ab úhloměrového kruhu O

(obr. 47) representuje jednotku dělení. Potom délka celé kružnice je

$$2\pi r = 6\,r \text{ a délka oblouku } ab \text{ je } 6\,r/6000 = \frac{1}{1000}\,r.$$

U dělostřelců ji také nazývají „tisícinou“. Potom je

$$AB = \frac{0{,}001\,r}{r}\,D = 0{,}001\,D,$$

čili abychom zjistili jaká vzdálenost AB odpovídá jednomu dílku úhloměru (úhlu jedné „tisíciny“), stačí ve vzdálenosti D oddělit čárkou tři místa odzadu.

Při předávání povelů nebo výsledků pozorování polním telefonem nebo radiotelegraficky se počet „tisícin“ udává podobně jako telefonní číslo. Na příklad úhel 105 v „tisícinách“ se hlásí „jedna nula pět“ a píše:

$$1-05;$$

úhel 8 „tisícin“ se hlásí „nula nula osm“ a píše:

$$0-08.$$

Nyní snadno rozřešíme následující dělostřelecký úkol.

Úloha

Výška tanku se jeví od protitankového děla pod úhlem 0–05. Určete vzdálenost tanku, bereme-li výšku tanku rovnou 2 m.

Řešení

5 dílků úhloměru 2 m

$$1 \text{ dílek úhloměru } \frac{2\text{ m}}{5} = 0{,}4\text{ m}.$$

Jelikož je jeden dílek úhloměru tisícina vzdálenosti, je celková vzdálenost tisíckrát větší, t. j.

$$D = 0{,}4 \times 1000 = 400\,m.$$

Nemá-li průzkumník nebo velitel při ruce úhloměr, použije dlaně, prstů nebo jiných prostředků tak, jak jsme se o tom

zmínili dříve (viz oddíl „živý úhloměr“). Tentokráte je třeba znát jejich „hodnotu“ dělostřelecky, t. j. nikoli ve stupních, nýbrž v „tisícinách“.

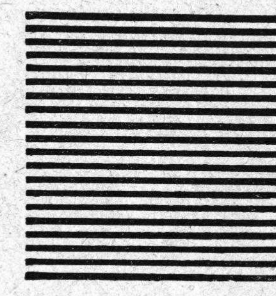
Uvádíme některé přibližné „hodnoty“ některých předmětů v „tisícinách“:

dlaň ruky	1–20
středník, ukazováček nebo prsteník	0–30
kulatá tužka (tloušťka)	0–12
tloušťka zápalky	0–03
délka zápalky	0–75

Zraková ostrost

Když jsme si osvojili pojem úhlové velikosti předmětu, můžeme nyní pochopit, jak se změří zraková ostrost a sami provést její měření.

Na listu papíru nakresleme 20 stejných černých čar asi délky zápalky (5 cm) a tlustých jeden milimetr tak, aby vyplnily čtverec (obr. 48). Potom upevněme tento obrázek na dobře osvětlenou stěnu a ustupujme od něho pozpátku tak dlouho, až zpozorujeme, že nevidíme jednotlivé čáry, nýbrž stejnobarevný šedý čtverec. Změřme vzdálenost a vypočtěme zorný úhel, pod kterým přestáváme rozlišovat pásy tlusté 1 mm. Je-li tento úhel roven 1′ (jedné minutě), je naše zraková ostrost normální; je-li roven 3 minutám, je zraková ostrost rovná 1/3 zrakové ostrosti atd.



Obr. 48. Zraková ostrost.

Úkol

Čáry na obr. 48 splynou ve vzdálenosti 2 m. Je to normální zraková ostrost?

Řešení

Víme, že ze vzdálenosti 57 mm vidíme pás o šířce 1 mm pod úhlem 1°, t. j. 60′. Tedy ze vzdálenosti 2000 m jej vidíme pod úhlem x, který stanovíme z úměry

$$x : 60 = 57 : 2000$$

$$x = 1{,}7'.$$

Zraková ostrost je tedy menší než normální, totiž:

$$1 : 1{,}7 = \text{přibližně } 0{,}6.$$

Mezní minuta

Právě jsme se zmínili o tom, že pásy pozorované pod zorným úhlem menším než jedna minuta přestáváme vnímat normálním zrakem odděleně. To platí pro každý předmět, ať jsou obrysy pozorovaného předmětu jakékoli; přestáváme je vnímat jednotlivě normálním zrakem, jestliže je vidíme pod úhlem menším než 1′. Každý předmět se při tom přeměňuje v sotva rozeznatelnou tečku „příliš malou k vidění" (Shakespeare), mění se v prášek bez rozměrů a tvaru. To je vlastnost normálního lidského oka; úhlová minuta je průměrnou mezí jeho ostrosti. Čím je to způsobeno je otázka širší, dotýkající se fysiky a fysiologie vidění. Zde mluvíme pouze o geometrické stránce zjevu.

To, co jsme uvedli výše, platí stejně i pro předměty velké, avšak velmi vzdálené, stejně jako pro předměty blízké, ale velice malé. Pouhým okem nemůžeme rozeznat tvar prášků, vířících ve vzduchu; ozářené slunečními paprsky se nám jeví jako drobné body, ačkoli ve skutečnosti mají nejrůznější tvary. Proto také nerozlišujeme podrobnosti těla hmyzu, neboť je vidíme pod úhlem menším než 1′. Z téhož důvodu nevidíme bez dalekohledu podrobnosti na povrchu Měsíce, planet a ostatních nebeských těles.

Svět by byl zcela jiný, kdybychom mohli posunout hranici zrakové ostrosti k menším rozměrům. Člověk, jehož

mez zrakové ostrosti by nebyla 1′, nýbrž na příklad půl minuty, viděl by okolní svět hlouběji a dále než my. Neobyčejně barvitě popisuje přednosti bystrého zraku Čechov v povídce „Step":

„Vasja měl neobyčejně bystrý zrak. Viděl tak dobře, že hnědá, pustá step byla pro něho stále plna života a dění. Stačilo mu, aby se jen zahleděl do dáli a hned uviděl lišku, zajíce, dropa nebo nějaké jiné zvíře, držící se opodál lidí. Není těžko zahlédnout prchajícího zajíce nebo letícího dropa – ty viděl každý, kdo projížděl stepí – ale ne každému je dáno vidět divoká zvířata v jejich domácím životě, kdy neutíkají, neschovávají se a nerozhlížejí se polekaně na všechny strany. Ale Vasja viděl, jak si lišky hrají, zajíce, jak se umývají pacičkami, dropy, jak si dávají křídla do pořádku, dropíky, jak si vybírají svá místa k tokání.

Díky tomuto bystrozraku měl Vasja kromě světa, jejž viděli všichni, ještě jiný svět, svůj vlastní, nikomu nedostupný a patrně velmi pěkný, neboť když se s nadšením do něho díval, těžko bylo mu nezávidět."[1]

Těžko věřit, že by k takové obdivuhodné přeměně stačilo snížit mez zrakové ostrosti z jedné na půl minuty.

Kouzelný účinek mikroskopu a dalekohledu je způsoben toutéž příčinou. Účelem těchto přístrojů je tak změnit chod paprsků odražených od pozorovaného předmětu, aby dopadly do našeho oka v silně se rozcházejícím svazku. Vlivem toho pozorujeme objekt pod větším zorným úhlem. Když se říká, že mikroskop nebo dalekohled zvětšuje 100násobně, znamená to, že pomocí těchto přístrojů vidíme předměty pod úhlem 100krát větším než bez nich. Potom podrobnosti, které se skrývají prostému oku za mezí zrakové ostrosti, stanou se dostupnými našemu zraku. Plný Měsíc vidíme pod úhlem 30′ a jelikož průměr Měsíce je 3500 km, každá část Měsíce o průměru $\frac{3500}{30}$, t. j. kolem 120 km, splývá prostému oku v sotva rozlišitelný bod. V dalekohledu zvětšujícím 100násobně budou rozeznatelné

[1] Použito překladu Petra Křičky.

menší plochy o průměru $\frac{120}{100} = 1{,}2$ km a v dalekohledu s 1000násobným zvětšením plocha o šířce 120 m. Z toho plyne mimo jiné, že kdyby byly na Měsíci takové stavby, jako jsou naše velké závody nebo zaoceánské parníky, mohli bychom je v dokonalých dalekohledech spatřit.[1]

Pravidlo mezní minuty má velký význam také pro naše obvyklá denní pozorování. Vlivem této zvláštnosti našeho zraku přestáváme na každém předmětu vzdáleném 3400 svých průměrů (t. j. 57 krát 60) rozlišovat podrobnosti a předmět nám splývá v bod. Proto nevěřte člověku, který nás bude přesvědčovat, že pouhým okem poznal člověka ve vzdálenosti čtvrt kilometru; ledaže by vládl pohádkovou bystrozrakostí. Vždyť vzdálenost mezi lidskýma očima je pouhé 3 cm: oči splývají už ve vzdálenosti 3×3400 cm, t. j. 100 m. Dělostřelci toho používají k odhadování vzdáleností okem. Jeví-li se oči člověka z dálky jako dva oddělené body, není podle jejich pravidel vzdálen více než 100 kroků (t. j. 60–70 m). My jsme dostali větší vzdálenost – 100 m: to svědčí o tom, že údaje vojáků berou v patrnost o něco sníženou zrakovou ostrost (o 30%).

Úkol

Může člověk s normální zrakovou ostrostí rozeznat jezdce na koni ve vzdálenosti 10 km, použije-li dalekohledu zvětšujícího trojnásobně?

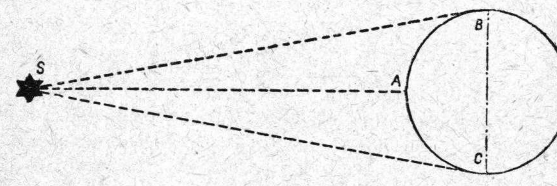
Řešení

Výška jezdce je 2,2 m. Jeho postava se promění v bod ve vzdálenosti $2{,}2 \times 3400 = 7$ km. V dalekohledu, zvětšujícím trojnásobně, ve vzdálenosti 21 km. Lze jej tedy ve vzdálenosti 10 km rozeznat (ovšem je-li vzduch dostatečně průzračný).

[1] Za předpokladu dokonalé průzračnosti a stejnorodosti naší atmosféry. Ve skutečnosti je vzduch nestejnorodý a není dokonale průhledný; proto se při velkém zvětšení obraz zamlží a deformuje. To klade meze použití velmi velkých zvětšení a nutí astronomy, aby stavěli hvězdárny v čistém vzduchu a ve velkých výškách na horách.

Měsíc a hvězdy u horizontu

I nejnepozornější pozorovatel ví, že plný Měsíc, stojící nízko u horizontu, je podstatně větší, než když visí vysoko na obloze. Rozdíl je tak výrazný, že musí padnout každému do oka. Totéž platí také pro Slunce; je známo, oč větší je sluneční kotouč při západu či východu ve srovnání s jeho rozměry vysoko na nebi, na příklad když prozařuje oblaka (hledět přímo do Slunce zraku velmi škodí).

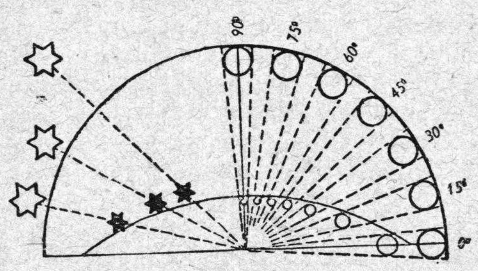


Obr. 49. Proč je Slunce u horizontu dále od pozorovatele než když je vysoko na nebi.

U hvězd se tato zvláštnost projevuje tím, že se vzdálenost mezi nimi zvětšuje, když se přibližují horizontu. Kdo viděl v zimě krásné souhvězdí Orionu (nebo Labutě v létě) vysoko na nebi a nízko u horizontu, ten se jistě podivil podstatnému rozdílu rozměrů těchto souhvězdí v obou polohách.

To je vše tím záhadnější, že když hledíme na nebeská tělesa při východu nebo západu, nejenom že nejsou blíže, nýbrž naopak, jsou dále (o hodnotu zemského poloměru), jak vyplývá z obr. 49: v zenitu pozorujeme nebeské těleso z bodu A a u horizontu z bodu B nebo C. Proč se tedy rozměry Měsíce, Slunce a souhvězdí zvětšují u horizontu?

Proto, že to není pravda, dalo by se odpovědět. Je to zrakový klam. Pomocí hřebenového nebo jiného úhloměru se můžeme snadno přesvědčit, že měsíční kotouč vidíme v obou případech pod stejným zorným úhlem půl stupně.[1] Použitím „Jakovova kříže" se lze přesvědčit, že se úhlové vzdálenosti mezi hvězdami nemění ať stojí kdekoli, u zenitu nebo u horizontu. Zvětšení je tedy optický klam, kterému podléhají všichni lidé bez výjimky.



Obr. 50. Vliv ploskosti nebeské klenby na zdánlivé rozměry nebeských těles.

Čím lze vysvětlit tak výrazný a všeobecný optický klam? Nespornou odpověď na tuto otázku, pokud je nám známo, věda ještě nedala, ačkoli se ji snaží rozřešit už od doby Ptolemaiovy, tedy přes 2000 let. Klam souvisí s tím, že celá nebeská klenba se nám nejeví jako polokoule v geometrickém slova smyslu, nýbrž jako kulová úseč, jejíž výška je 2–3krát menší než poloměr základny. To je způsobeno tím, že při obvyklé poloze hlavy a očí, vzdálenosti v horizontálním a jemu blízkému směru považujeme za větší než vzdálenosti ve směru vertikálním: v horizontálním směru pozorujeme předmět „přímým pohledem", a v každém jiném směru, očima zvednutýma vzhůru nebo spuštěnýma dolů. Když se díváme na Měsíc, ležíce na zádech, jeví se nám naopak větší v zenitu, než když stojí nízko nad horizontem. Psychologové a fysiologové stojí před úkolem objasnit, proč viditelný rozměr předmětu závisí na orientaci našich očí.

[1] Měření provedená přesnými přístroji ukázala, že zdánlivý viditelný průměr Měsíce je dokonce menší, když je Měsíc blízko horizontu, vlivem toho, že refrakce světelného paprsku ve vzdušném obalu země trochu zploští kotouč.

Pokud jde o vliv zdánlivé ploskosti nebeské klenby na velikost nebeských těles v různých polohách, je zcela pochopitelný ze schematu zobrazeného na obr. 50. Na nebeské klenbě vidíme měsíční kotouč vždy pod úhlem půl stupně, ať je u horizontu (ve výšce 0°) nebo u zenitu (ve výšce 90°). Ale naše oko neklade tento kotouč vždy do téže vzdálenosti: Měsíc v zenitu klademe do menší vzdálenosti než u horizontu a proto se nám jeho velikost nezdá stejná; ve stejném úhlu se u vrcholu umístí menší kroužek než dále od něho. Na levé straně téhož obrázku je znázorněno, jak se ze stejného důvodu protahují vzdálenosti hvězd s přibližením k horizontu; stejná úhlová vzdálenost mezi nimi se nám jeví jako různé skutečné vzdálenosti.

Zjev má ještě jinou poučnou stránku. Zpozorovali jste na obrovském měsíčním kotouči u horizontu byť jen jeden nový rys, který by se nám nepodařilo shlédnout na Měsíci stojícím vysoko na nebi? Nikoli. Ale vždyť máte před sebou zvětšený kotouč, jak to, že nevidíte nové podrobnosti? Proto, že zde není to zvětšení, které nám skýtá na příklad dalekohled; zde se nezvětšuje zorný úhel, pod kterým pozorujete předmět. A pouze zvětšení tohoto úhlu nám může odkrýt nové podrobnosti – každé jiné „zvětšení" je pouze zrakovým klamem a proto pro nás neužitečné.[1]

Jak dlouhý je stín Měsíce a stratostatu

Dosti neočekávané použití zorného úhlu jsem nalezl v úkolech výpočtu délky stínu vytvořeného různými předměty v prostoru. Tak na příklad Měsíc vrhá do světového prostoru kužel stínu, který jej neustále provází.

Až kam se prostírá tento stín?

K provedení tohoto výpočtu není nutno používat podobnosti trojúhelníků, vytvářet úměru, v které jsou poloměry Slunce a Měsíce a vzdálenost mezi nimi. Výpočet lze

[1] Podrobnosti viz v knize téhož autora „Zajímavá fysika", kniha druhá, kapitola IX. Vydala Mladá fronta.

provést podstatně snadněji. Představte si, že naše oko je v tom bodě, kde končí kužel měsíčního stínu, ve vrcholu tohoto kužele, a vy hledíte odtud na Měsíc. Co spatříte? Černý kruh Měsíce, který zakrývá Slunce. Zorný úhel, pod kterým vidíte kotouč Měsíce (nebo Slunce), je znám, je roven polovině stupně. My však víme, že předmět, který vidíme pod úhlem půl stupně, je vzdálen od pozorovatele $2 \times 57 = 114$ svých průměrů. Vrcholek kužele stínu Měsíce je od Měsíce vzdálen 114 jeho poloměrů. Z toho plyne délka stínu Měsíce:

$$3500 \times 114 \doteq 400\,000 \text{ km}.$$

Je tedy větší než vzdálenost Země od Měsíce: proto mohou nastat úplná zatmění Slunce (v těch místech na zemském povrchu, která padnou do tohoto stínu).

Není nesnadné vypočítat ani délku stínu Země v prostoru; je tolikrát delší než stín Měsíce, kolikrát je průměr Země větší než průměr Měsíce, t. j. přibližně čtyřnásobně.

Tentýž způsob se hodí k výpočtu délky stínů menších předmětů. Nalezneme na příklad jak daleko se rozkládal kužel stínu vytvořený stratostatem „COAX-I“ v okamžiku, kdy se jeho obal rozepnul v kouli. Jelikož poloměr koule stratostatu je 36 m, délka jeho stínu (úhel při vrcholu kužele je stejný, totiž půl stupně) je

$$36 \times 114 \doteq 4100 \text{ m}$$

neboli kolem 4 km.

Ve všech případech šlo o délku plného stínu, nikoli polostínu.

Jak vysoko je mrak nad zemí

Vzpomeňte, jak vás překvapila dlouhá bělavá pentle, kterou jste viděli po prvé na jasné modré obloze. Dnes už ovšem víte, že to je mlžný pás, který zanechává letadlo v prostoru „na paměť“ svého pobytu.

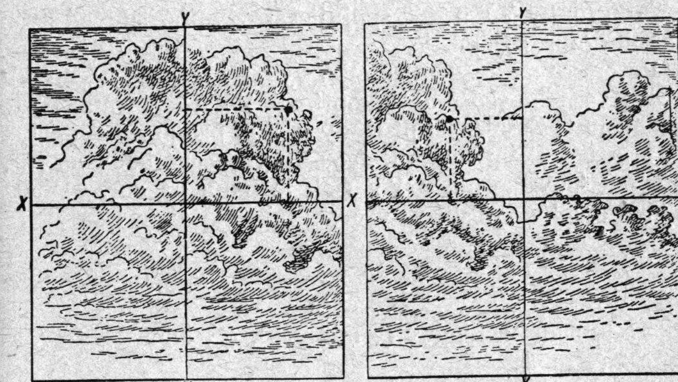
V ochlazeném vlhkém vzduchu a bohatém na prach se snadno vytvoří mlha.

Letící letadlo vymršťuje neustále drobné částice – spalné produkty, na nichž se zhušťují vodní páry a vzniká mlha.

Když určíme výšku mlžného pásu dříve než se rozplyne, můžeme stanovit, jak vysoko vyletěl pilot se svým letadlem.

Úkol

Jak určíme výšku mraku nad zemí, je-li právě nad naší hlavou?



Obr. 51. Obraz dvou fotografických snímků mraku.

Řešení

K určení velkých výšek je třeba vzít na pomoc obyčejný fotografický přístroj – přístroj sice značně složitý, avšak v naší době velmi rozšířený a oblíbený mezi mládeží.

V daném případě potřebujeme dva aparáty se stejnými ohniskovými vzdálenostmi. (Ohniskové vzdálenosti bývají obvykle udány na objímce objektivu aparátu.)

Oba přístroje se umístí do dvou stejně vysoko položených bodů.

V terénu to mohou být stativy, v městě věžičky na střechách domů. Vzdálenost mezi stanovišti musí být taková, aby se pozorovatelé mohli vidět přímo nebo dalekohledy.

Tato vzdálenost (základna) se změří nebo určí podle plánu, případně mapy. Fotografické přístroje se postaví tak, aby jejich optické osy byly rovnoběžné. Lze je na příklad zamířit na zenit.

Když se fotografovaný objekt octne v zorném poli objektivu, dá jeden pozorovatel signál druhému, na příklad mávnutím šátkem, a potom zmáčknou oba pozorovatelé současně spouště svých fotoaparátů.

Na positivech přesně stejných, jako byly desky, se narýsují přímky YY a XX, spojující středy protilehlých stran snímků (obr. 51).

Potom se na každém snímku vyznačí stejný bod mraku a změří se jeho vzdálenost od přímek YY a XX v mm. Tyto vzdálenosti se vyznačí písmeny x_1 a y_1 pro první snímek a x_2 a y_2 v druhém snímku. Jsou-li vyznačené body na různých stranách přímky YY (jak je tomu na obr. 51), lze výšku oblaku vyčíslit ze vzorce

$$H = b\,\frac{F}{x_1 + x_2},$$

kde b je délka základny (v metrech), F – ohnisková vzdálenost (v mm).

Jsou-li vyznačené body na stejné straně přímky YY, lze výšku mraku určit ze vzorce

$$H = b\,\frac{F}{x_1 - x_2}.$$

Pokud jde o vzdálenosti y_1 a y_2, nejsou k výpočtu výšky H potřebné, avšak jejich vzájemným srovnáním lze stanovit správnost snímku.

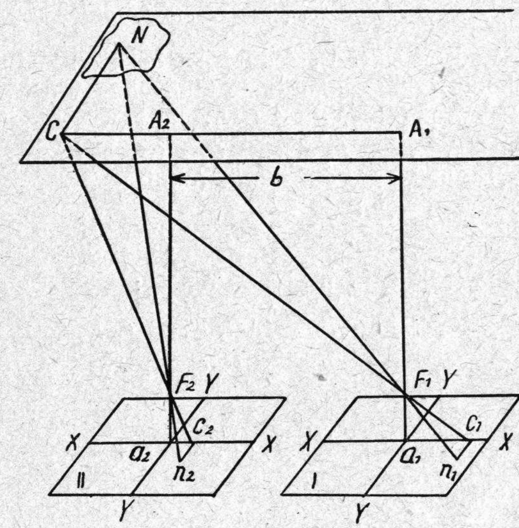
Jestliže desky ležely v kasetách rovnoběžně, bude y_1 rovno y_2. Prakticky se ovšem budou trochu lišit.

Mějme na příklad vzdálenosti od přímek YY a XX k vyznačenému bodu mraku na originálu fotografických snímků:

$$x_1 = 32 \text{ mm} \qquad y_1 = 29 \text{ mm}$$
$$x_2 = 23 \text{ mm} \qquad y_2 = 25 \text{ mm}$$

Ohniskové vzdálenosti objektivů $F = 135$ mm a vzdálenosti mezi fotoaparáty (základna) $b = 937$ m.

Z fotografií plyne, že k stanovení výšky mraku je třeba užít vzorce:



Obr. 52. Schema zobrazení bodu mraku na fotografických deskách zamířených k zenitu.

$$H = b\,\frac{F}{x_1 + x_2},$$

$$H = 937 \text{ m} \times \frac{135}{32 + 23} \doteq 2300 \text{ m},$$

t. j. fotografovaný oblak je ve výšce kolem 2,3 km od země.

Ti, kteří se chtějí vyznat v odvození vzorce pro stanovení výšky mraku, použijí schematu zobrazeného na obr. 52.

Nákres zobrazený na obr. 52 je třeba si představit v prostoru (prostorová představivost se získává při studiu té části geometrie, které se říká stereometrie).

Kosodélníky I a II znázorňují fotografické desky; F_1 a F_2 jsou optické středy objektivů fotografických přístrojů, N je pozorovaný bod mraku, n_1 a n_2 jsou obrazy bodů N na fotografických deskách; A_1, a_1 a a_2, A_2 jsou kolmice vztyčené ve středu každé desky do výše mraku; $A_1 A_2 = a_1 a_2 = b$ rozměr základny.

Jdeme-li od optického středu F_1 nahoru do bodu A_1 a potom z bodu A_1 po základně do takového bodu C, který bude vrcholem prvého úhlu A_1CN, a na konec z bodu C do bodu N, pak úsečkám $\overline{F_1 A_1}$, $\overline{A_1 C_1}$ a CN budou ve fotoaparátu odpovídat úsečky $F_1a_1 = F$ (ohnisková vzdálenost), $a_1 c_1 = x_1$ a $c_1 n_1 = y_1$.

Obdobné úvahy platí také pro druhý fotoaparát.

Z každého trojúhelníku plynou úměry:

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_1 F_1}{F} = \frac{C_1 F_1}{F_1 c_1} = \frac{CN}{y_1}$$

$$\frac{A_2 C}{x_2} = \frac{A_2 F_2}{F} = \frac{CF_2}{F_2 c_2} = \frac{CN}{y_2}$$

Když srovnáme tyto úměry a máme v patrnosti zřejmou rovnost $A_2F_2 = A_1F_1$, dostaneme za prvé, že $y_1 = y_2$ (znak správnosti měření), za druhé:

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_2 C}{x_2},$$

ale z obrázku $A_2 C = A_1 C - b_1$, tedy

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_1 C - b}{x_2},$$

odkud
$$A_1 C = b \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

a nakonec
$$A_1 F_1 \doteq H = b \frac{F}{x_1 - x_2}.$$

Kdyby obrazy n_1 a n_2 bodu N byly na různých stranách přímky YY, svědčilo by to o tom, že bod C se nalézal mezi body A_1 a A_2, a tedy $A_2 C = b - A_1 C_1$, takže hledaná výška

$$H = b \frac{F}{x_1 + x_2}.$$

Tyto vzorce platí pouze pro ten případ, kdy jsou optické osy zamířeny k zenitu. Je-li oblak daleko od zenitu, takže nespadá do zorného pole aparátů, můžete dát aparáty do jiné polohy (zachovávajíce jejich optické osy rovnoběžné), na příklad postavit je horizontálně a při tom kolmo k základně nebo ve směru základny.

Pro každou polohu aparátů je třeba předem narýsovat příslušný nákres a odvodit vzorce pro výšku mraku.

*

Stalo se vám, že se za „bílého dne“ na bělavém nebi zjevily bílé, peří podobné mraky. Stanovili jste jejich výšku několikrát po sobě a zjistili jste, že mraky klesají. To je příznak zhoršení počasí; za několik hodin můžete očekávat déšť.

Výška věže podle fotografického snímku

Úkol

Pomocí fotografického aparátu lze určit nejenom výšku mraku nebo letadla, ale také výšku pozemní stavby: věže stožáru, rozhledny a pod.

Na obr. 53 je fotografie větrného motoru CVEI, postaveného na Krymu u Balaklavy. Základnou věže je čtverec, jehož délka strany je známa z bezprostředního měření, totiž 6 m.

Proveďte potřebné měření na snímku a stanovte výšku celého zařízení větrného motoru.

Řešení

Fotografie věže a její skutečné rozměry jsou si podobny. Čili kolikanásobně je výška obrazu větší než výška základny, tolikrát je výška věže větší také ve skutečnosti.

Rozměry obrazu: délka nejméně deformované úhlopříčky je rovna 23 mm, výška celého zařízení je 71 mm.

Jelikož délka strany čtvercové základny je 6 m, je úhlopříčka rovna $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} = 8{,}48$ m.

Tedy $$\frac{71}{23} = \frac{h}{8{,}48},$$

odkud $$h = \frac{71 \cdot 8{,}48}{23} \doteq 26 \text{ m}.$$

Samozřejmě, že se nehodí každý snímek, nýbrž pouze takový, ve kterém nejsou velikosti zkresleny, jak se to často stává nezkušeným fotografům.

Pro samostatná cvičení

Čtenář nechť nyní použije samostatně údajů uvedených v této kapitole k řešení následujících úkolů.

Člověka průměrného vzrůstu (1,7 m) vidíte pod zorným úhlem 12′. Určete jeho vzdálenost!

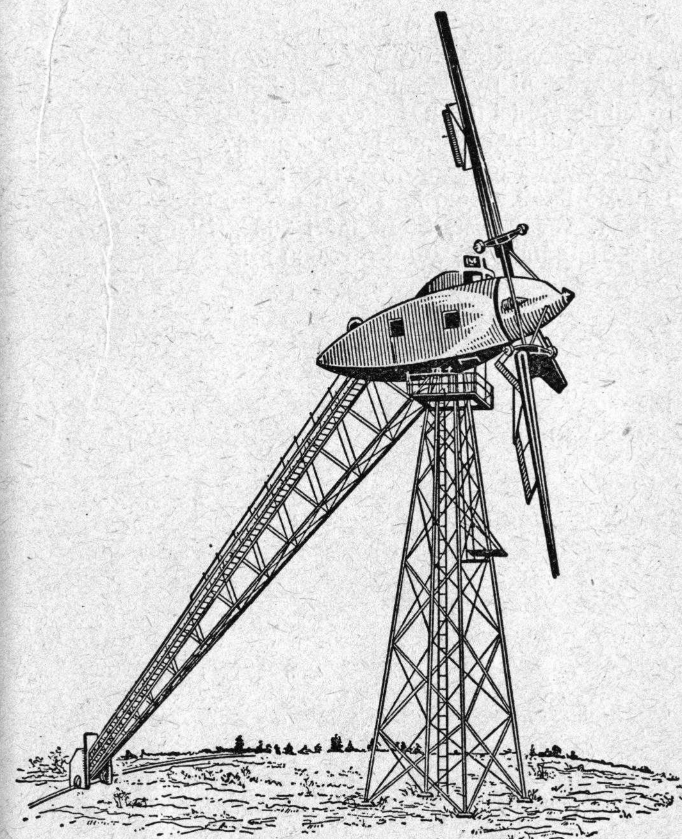
Jezdce na koni (2,2 m) vidíte pod úhlem 9′. Udejte jeho vzdálenost!

Telegrafní sloup (8 m) je vidět pod úhlem 22′. Udejte jeho vzdálenost!

Maják vysoký 42 m je vidět s lodi pod úhlem 1° 10′. Jak daleko je loď od majáku?

Zeměkoule je vidět s Měsíce pod úhlem 1° 54′. Stanovte vzdálenost mezi Zemí a Měsícem!

Ze vzdálenosti 2 km vidíme budovu pod úhlem 12′. Jaká je výška budovy?



Obr. 53. Větrný motor CVEI na Krymu.

Měsíc vidíme se Země pod úhlem 30′. Stanovte jeho průměr, víte-li, že vzdálenost Měsíce je 380 000 km!

Jak velké musí být písmo na tabuli, aby žáci sedící v lavicích je viděli stejně zřetelně, jako písmena ve svých knihách (ze vzdálenosti 25 cm)? Vzdálenost lavic od tabule je 5 m.

Mikroskop zvětšuje 50násobně. Lze v něm pozorovat lidské krvinky, jejichž průměr je 0,007 mm?

Jaké zvětšení by musel mít dalekohled, abychom zpozorovali na Měsíci lidi našeho vzrůstu?

Kolik „tisícin“ obsahuje jeden stupeň?

Kolik stupňů je jedna „tisícina“?

Letadlo letící kolmo ke směru našeho pozorování urazí za 10 vt. vzdálenost, která měří 300 „tisícin“. Stanovte rychlost letadla, je-li vzdáleno 2000 m!

IV. GEOMETRIE NA CESTÁCH

Umění měřit kroky

Ocitnete-li se při procházce u železniční trati nebo na silnici, můžete provést řadu zajímavých geometrických cvičení.

Především můžete změřit délku svého kroku a rychlost chůze. To vám poskytne možnost měřit vzdálenost kroky – umění, kterého lze snadno nabýt několikanásobným cvičením. Hlavní je naučit se dělat stále stejné kroky, t. j. osvojit si jistý „normální chod“.

Na silnici stojí každých sto metrů bílý kámen. Projdeme tuto stometrovou vzdálenost svým „obvyklým normálním krokem“ a spočítáme počet kroků. Z toho snadno vypočteme délku kroku. Toto měření je třeba provést každým rokem, na příklad každé jaro, neboť délka kroku se podstatně mění zejména u mladých lidí.

Zmíníme se o zajímavém vztahu, který byl objeven četnými měřeními: střední délka kroku dospělého člověka je rovna průměrně polovině jeho výšky očí. Jestliže je výška očí člověka 1 m 40 cm, je délka jeho kroku 70 cm. Je zajímavé potvrdit toto pravidlo při vhodné příležitosti.

Mimo velikosti kroku je záhodno znát také rychlost chůze, nejlépe počet kilometrů, které urazíme za hodinu. Někdy se k tomu užívá následujícího pravidla: za hodinu ujdeme tolik kilometrů, kolik kroků uděláme za tři vteřiny. Jestliže za tři vteřiny uděláme čtyři kroky, pak ujdeme za hodinu 4 km. Nicméně tohoto pravidla lze použít při pevné délce kroků. Není nesnadno určit při jaké: když označíme délku kroku v metrech jako x a počet kroků za tři vteřiny n, máme rovnici

$$\frac{3600}{3} \cdot n\,x = n \cdot 1000,$$

odkud $1200\,x = 1000$ tedy $x = 5/6$ m, t. j. kolem 80–85 cm.

To je poměrně velký krok: takový krok mají jen vzrostlí lidé. Liší-li se váš krok podstatně od 80–85 cm, musíte provést měření rychlosti chůze jiným způsobem; stanovit, jak dlouho vám trvá chůze od jednoho kamene na silnici k druhému.

Okoměr

Je příjemné a užitečné měřit vzdálenosti nejen bez metrového pásu, kroky, nýbrž také odhadovat je přímo od oka. Tohoto umění lze dosáhnout pouze cvikem. Když jsem chodil do školy, účastnil jsem se se skupinou přátel letních exkursí za město, kde byla podobná cvičení na denním pořádku. Prováděli jsme je ve formě zvláštního sportu, námi vymyšleného, totiž soutěžení v přesnosti odhadu. Vyšli jsme na cestu a jeden z nás označil některý strom při cestě nebo jiný vzdálený předmět a závody začaly.

„Jak daleko je strom?" otázal se někdo z účastníků hry.

Ostatní vyslovili svůj odhad v krocích a potom spolu sečtli kroky, aby stanovili, čí odhad byl správnější. Vítěz získal právo vybrat předmět pro další závody v odhadování vzdálenosti.

Vzpomínám si, že z počátku byly naše odhady velmi nepřesné. Avšak velmi brzy, mnohem dříve než byste očekávali, nabyli jsme takové zkušenosti v odhadu, že se naše odhady jen málo lišily od skutečné vzdálenosti. Pouze při rychlé výměně okolí, na příklad při přechodu z otevřeného pole do řídkého lesa nebo na lesní mýtinu zarostlou křovím, při návratu do zaprášených a těsných ulic města a rovněž v noci při klamném osvětlení Měsíce jsme se navzájem usvědčovali z velkých chyb. Avšak později jsme se naučili přizpůsobovat se všem okolnostem a počítat s nimi při odhadech. Nakonec naše skupina dosáhla takové dokonalosti v odhadu vzdáleností, že jsme se museli vzdát tohoto sportu, neboť všichni odhadli vždy přesně vzdálenost, takže jsme ztratili zájem o závody. Zato jsme nabyli zkušeností v odhadování, které nám skvěle sloužily při našich toulkách za městem.

Je zajímavé, že odhad nezávisí na zrakové ostrosti. V naší skupině byl krátkozraký chlapec, avšak nezůstával za ostatními pozadu v přesnosti odhadu, ba býval velmi často vítězem závodu. Naopak jinému chlapci, se zcela normálním zrakem, se umění odhadovat od oka nikterak nedařilo. Později jsem totéž zpozoroval při odhadu výšek stromů, když jsem se v tom cvičil se studenty, tentokráte již nikoli pro zábavu, nýbrž pro potřebu svého budoucího povolání, a zpozoroval jsem, že krátkozrací nikterak nezůstávali v tomto umění za ostatními. To je potěšujícím faktem pro krátkozraké; i když nemají bystrý zrak, přesto si mohou vypěstovat schopnost správného odhadování.

Cvičení v odhadování vzdáleností lze provádět v každém ročním období a za každých podmínek. Když jdete po ulici, můžete si klást úkoly a snažit se odhadnout kolik kroků je k nejbližší svítilně, k tomu nebo onomu předmětu. Při špatném počasí tak nepozorovaně zaplníte dobu chůze vylidněnými ulicemi.

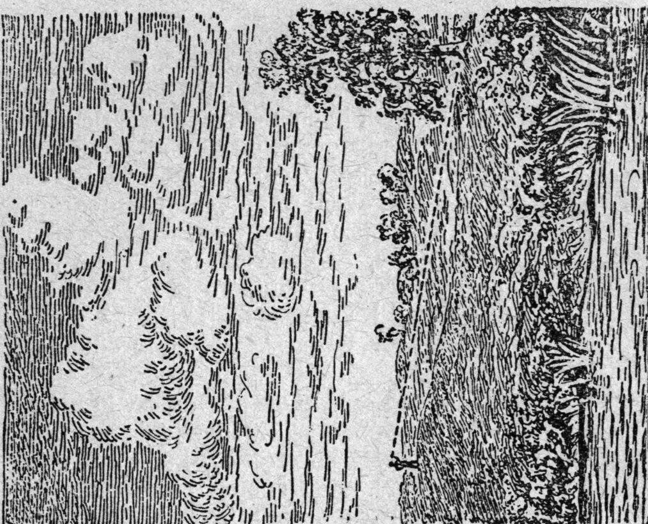
Mnoho pozornosti odhadování vzdáleností se věnuje v armádě: dobrý odhad je užitečný každému průzkumníku, střelci a dělostřelci. Je zajímavé seznámit se s methodami, kterých se používá v praxi při odhadu. Uvádíme několik poznámek z učebnice dělostřelců.

„Odhad vzdálenosti provádíme na základě různého stupně ostrosti předmětů, která se mění podle jejich vzdálenosti od pozorovatele, nebo odhadem vzdálenosti podle zdánlivé velikosti předmětů, které se nám jeví tím menší, čím jsou vzdálenější.

Při odhadu vzdáleností podle viditelnosti předmětů je třeba mít na paměti, že zdánlivě bližší se jeví osvětlené předměty, předměty výrazněji se lišící barvou od okolí, předměty ve vodě, předměty položené výše než ostatní, skupiny oddělených jednotlivých předmětů a vůbec předměty větší.

Za vodítko při odhadu vzdálenosti lze použít následujících pokynů: ze 100 kroků se oči zdají být tečkami; do 200 kroků lze ještě rozeznat knoflíky a podrobnosti výstroje;

Obr. 54. Strom za pahorkem se zdá být blíže.



Obr. 55. Když vystoupíme na pahorek, zjistíme, že strom byl ještě jednou tak vzdálen.

do 300 m je vidět tvář; do 400 m lze rozeznat pohyb nohou; na 500 m lze určit barvu stejnokroje.

Při tomto odhadu může i bystré oko udělat chybu až 10% na obě strany odhadované vzdálenosti.

Bývají však případy, kdy chyby při odhadu jsou podstatně větší. Za prvé při stanovení vzdálenosti na rovném, úplně jednobarevném povrchu, na vodní hladině nebo jezeře, na čisté písčité rovině nebo na hustě zarostlém poli. V těchto případech se vždy zdá být vzdálenost menší než skutečně je. Při odhadu od oka se můžete zmýlit až o dvojnásobek i více. Za druhé vznikají chyby při určování vzdálenosti předmětu, jehož základna je zacloněna železničním náspem, pahorkem, budovou nebo jakoukoliv vyvýšeninou. V takových případech podvědomě klademe předmět nikoli za, nýbrž na vyvýšeninu, takže se dopouštíme chyby tím, že zmenšujeme vzdálenost (obr. 54 a 55).

V takových případech je nebezpečné spolehnout se na odhad a je třeba použít jiných způsobů, o kterých jsme už mluvili nebo o nich budeme mluvit.

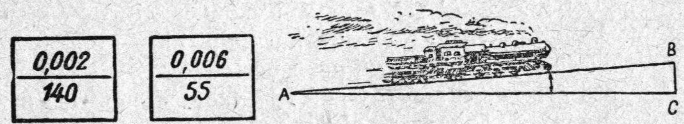
Sklony

Kolem železniční trati jsou vedle kilometrových značek i jiné sloupy s mnohými nepochopitelnými nápisy na šikmo připevněných deskách, nebo takové, jaké jsou znázorněny na obr. 56.

Je to označení sklonu. Tak na příklad v prvním znaku horní číslo 0,002 označuje, že sklon dráhy je zde roven 0,002 (kterým směrem, ukazuje poloha desky); dráha stoupá nebo klesá o 2 mm na každých 1000 mm. Spodní číslo ukazuje, že tento sklon je na délce 140 m, kde stojí druhý znak s údajem nového sklonu. Druhá destička s nadpisem $\frac{0{,}006}{55}$ označuje, že na nejbližších 55 m dráha klesá nebo stoupá o 6 mm na každém metru.

Když znáte smysl znaků, můžete snadno vypočítat rozdíl výšek dvou sousedních bodů dráhy, oddělených těmito značkami. V prvním případě je rozdíl výšky 0,002 $\times$ 140 = = 0,28 m; v druhém 0,006 $\times$ 55 = 0,33 m.

Jak patrno, v železniční praxi se neurčuje velikost sklonu v úhlové míře. Nicméně lze tyto údaje sklonu snadno převést na stupně. Je-li (obr. 56) AB – délka dráhy, BC – roz-



Obr. 56. Znaky sklonu.

díl výšek bodů A a B, je sklon dráhy $\frac{BC}{AB}$ k horizontální rovině AC na sloupu označen poměrem AB. Jelikož úhel A je velmi malý, lze AB a AC považovat za poloměr kružnice, jejíž oblouk je BC[1]. Potom výpočet úhlu A, je-li znám poměr $BC : AB$, nečiní žádných potíží. Při sklonu označeném na příklad 0,002 uvažujeme následovně: při délce oblouku rovné 1/57 délky poloměru je úhel 1^0 : jaký úhel odpovídá oblouku rovnému 0,002 poloměru? Nalezneme jej jako veličinu x v úměře:

$$x : 1^0 = 0{,}002 : \frac{1}{57}, \quad \text{odkud } x = 0{,}002 \cdot 57 = 0{,}11^0$$

t. j. kolem 7′.

U železničních tratí jsou dovoleny jen velmi malé sklony. V SSSR je stanoven největší sklon 0,008, t. j. v úhlové míře 0,008 . 57, méně než $\frac{1}{2}^0$; to je největší sklon. Pouze na za-

[1] Snad se čtenáři zdá, že je nepřípustné považovat přeponu AB za rovnou odvěsně AC. Je užitečné přesvědčit se, jak malý je rozdíl v délce AC a AB, když BC je na příklad 0,01 AB. Z Pythagorovy věty plyne

$$AC = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0{,}9999\ AB^2} = 0{,}99995\ AB.$$

Rozdíl délek je pouhých 0,00005. Pro přibližné výpočty je zřejmě dovoleno tuto chybu zanedbat.

kavkazských železničních tratích jsou výjimečně přípustny sklony až 0, 025, kterým odpovídá $1\frac{1}{2}^0$. Tak mizivé sklony nemůžeme vůbec postřehnout. Chodec pocítí sklon půdy pod svýma nohama, když přesáhne 1/24, což odpovídá v úhlové míře 57/24, t. j. asi $2\frac{1}{2}$ stupně.

Když projdete po železniční trati několik kilometrů a zapíšete si při tom sklony, můžete vypočítat, o co jste celkově vystoupili nebo poklesli, t. j. jaký je rozdíl výšek mezi počátečním a konečným bodem.

Úkol

Začali jste procházku podél trati u sloupu se znakem $\frac{0{,}004}{153}$ a dále jste míjeli znaky:

rovinka	vzestup	vzestup	rovinka	pokles
$\frac{0{,}000}{60}$	$\frac{0{,}0017}{84}$	$\frac{0{,}0032}{121}$	$\frac{0{,}000}{45}$	$\frac{0{,}004}{210}$.

Procházku jste ukončili u poslední značky. Jakou cestu jste ušli a jaký je rozdíl výšek mezi první a poslední značkou?

Řešení

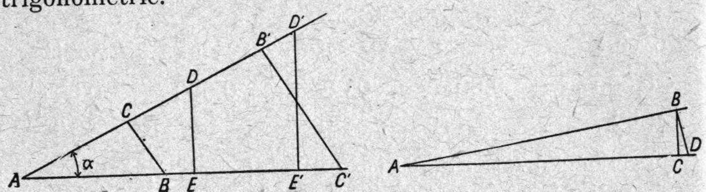
Celkem jste ušli: 153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = = 673 m. Vystoupili jste o 0,004 $\times$ 153 + 0,0017 $\times$ 84 + + 0,0032 $\times$ 121 = 1,15 m. Poklesli jste o 0,004 $\times$ 210 = = 0,84 m.

Tedy celkem jste nad počátečním bodem o 1,15 — 0,84 = = 0,31 m = 31 cm.

V. TRIGONOMETRIE BEZ VZORCŮ A TABULEK

Výpočet sinu

V této kapitole ukážeme, jak lze vypočítat délku strany trojúhelníka s přesností větší než 2% a úhly s přesností 1^0 bez použití vzorců a tabulek. Taková zjednodušená trigonometrie se může hodit při procházce za městem, když nemáme při ruce tabulky, a vzorečky jsme už zapomněli. Robinson na svém ostrově by mohl úspěšně použít takovéto trigonometrie.



Obr. 57. Co je to sinus ostrého úhlu?

Představte si tedy, že jste se ve škole trigonometrii neučili nebo že jste ji dokonale zapomněli, případ, který si lze nepochybně představit velmi snadno. Začneme se s ní seznamovat znovu. Co je to sinus ostrého úhlu? Je to poměr protilehlé odvěsny k přeponě v trojúhelníku, který je vytvořen z úhlu kolmicí k jednomu z jeho ramen. Na příklad sinus úhlu A (obr. 57) je $\frac{BC}{AB}$ nebo $\frac{ED}{AD}$ nebo $\frac{D'E'}{AD'}$ nebo $\frac{B'C'}{AC'}$.
Je jasné, že v důsledku podobnosti vzniklých trojúhelníků jsou si tyto poměry navzájem rovny.

Čemu jsou rovny siny ostrých úhlů od 1 do 90^0? Jak to zjistíme, nemáme-li k disposici tabulky? Velice jednoduše: sestavíme si sami tabulky hodnot sinů. Tím se budeme nyní zabývat.

Začneme úhly, jejichž sinus je znám z geometrie. Je to především úhel 90^0, jehož sinus je zřejmě roven 1. Potom úhel 45^0, jehož sinus lze snadno vypočítat pomocí Pythagorovy věty; je roven $\frac{\sqrt{2}}{2}$, t. j. 0,707. Dále známe sinus 30^0, neboť jeho odvěsna proti tomuto úhlu je rovna polovině přepony; sinus $30^0 = \frac{1}{2}$.

Známe tedy siny (označení sin) těchto tří úhlů:

$$\sin 30^0 = 0{,}5$$
$$\sin 45^0 = 0{,}707$$
$$\sin 90^0 = 1$$

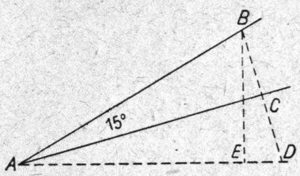
To ovšem nestačí: je třeba znát siny všech ostatních úhlů alespoň po jednom stupni. Pro velmi malé úhly lze při výpočtu sinů místo poměru přepony a odvěsny k přeponě, vzít bez velké chyby poměr oblouku k poloměru: z obr. 57 (vpravo) je patrno, že poměr $\frac{BC}{AB}$ se jen málo liší od poměru $\frac{BD}{AB}$, který lze snadno vypočítat. Na příklad pro úhel 1^0 je oblouk $BD = 2\pi r/360$ a tedy také sin 1^0 můžeme napsat jako

$$\frac{2\pi r}{360\,r} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175.$$

Tímto způsobem dostaneme

$$\sin 2^0 = 0{,}0349$$
$$\sin 3^0 = 0{,}0524$$
$$\sin 4^0 = 0{,}0698$$
$$\sin 5^0 = 0{,}0873.$$

Musíme se však přesvědčit, jak daleko lze pokračovat v tabulce, aniž bychom udělali velkou chybu. Kdybychom vypočetli tímto způsobem sin 30^0, dostali bychom 0,524 místo 0,500: rozdíl by byl tedy už ve druhém místě a chyba by byla $\frac{24}{500}$, t. j. skoro 5%. To je příliš velká chyba. Mez, do které smíme provádět výpočet sinu uvedeným přibližným způsobem, pokusíme se nalézt tím, že určíme přesně sinus 15°. K tomu použijeme následující důvtipné konstrukce (obr. 58). Budiž sin $15^0 = \frac{BC}{AB}$. BC prodloužíme o stejnou vzdálenost do bodu D; spojíme A s D a dostaneme dva stejné trojúhelníky ADC a ABC a úhel BAD, který je roven 30°. Na AD spustíme kolmici BE, která vytvoří pravoúhlý trojúhelník BAE s úhlem 30° (úhel BAE) potom $BE = \frac{AB}{2}$. Dále vypočteme AE z trojúhelníku ABE pomocí Pythagorovy věty:



Obr. 58. Jak vypočteme sin 15°.

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} AB^2,$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ AB.$$

Tedy $ED = AD - AE = AB - 0{,}866\ AB = 0{,}134\ AB$.

Nyní z trojúhelníku BED vypočteme BD:

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134\ AB)^2 = 0{,}268\ AB^2;$$

$$BD = \sqrt{0{,}268\ AB^2} = 0{,}518\ AB.$$

Polovina BD, t. j. BC je rovna 0,259 AB a hledaný sinus je:

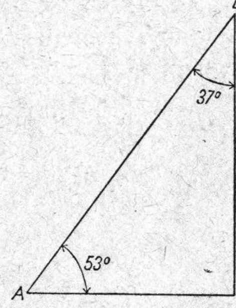
$$\sin 15^0 = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}259\ AB}{AB} = 0{,}259.$$

To je hodnota sin 15°, udávaná v trojmístných tabulkách. Přibližná hodnota, kterou jsme nalezli v předcházejícím způsobu, je 0,262. Srovnáním hodnot 0,259 a 0,262 vidíme, že když se omezíme na dvě desetinná místa, do-

stáváme 0,26 a 0,26, t. j. totožné výsledky. Chyba, které se dopustíme, když nahradíme přesnou hodnotu (0,259) přibližnou (0,26), je 1 tisícina, t. j. asi 0,4%. Je to chyba přípustná pro naše potřeby a tedy sinus úhlu od 1—15° jsme oprávněni vypočítat naším přibližným způsobem. Od 15° do 30° můžeme vypočítat sinus pomocí úměry.

Usuzujeme následovně: rozdíl mezi sin 30° a sin 15° je roven 0,50—0,26 = = 0,24. Můžeme tedy připustit, že při zvětšení úhlu o stupeň se sinus změní přibližně o jednu patnáctinu tohoto rozdílu, t. j. o $\frac{0{,}24}{15} = 0{,}016$.

Přesně vzato není to pravda, avšak odchylky od uvedeného pravidla se projevují teprve na třetím desetinném místě, které zanedbáváme. Když postupně připojujeme 0,016 k sin 15°, dostaneme siny úhlů 16°, 17°, 18° atd.



Obr. 59. K výpočtu sinu úhlu většího než 45°.

$$\begin{aligned}\sin 16^0 &= 0{,}26 + 0{,}016 = 0{,}28,\\ \sin 17^0 &= 0{,}25 + 0{,}032 = 0{,}29,\\ \sin 18^0 &= 0{,}26 + 0{,}048 = 0{,}31,\\ \sin 25^0 &= 0{,}26 + 0{,}16 \ \ = 0{,}42 \text{ atd.}\end{aligned}$$

Všechny tyto hodnoty sinu jsou správné v prvních dvou desetinných místech, t. j. jejich přesnost stačí pro naše účely: od skutečných hodnot sinu se liší méně než o polovinu jednotky posledního místa. Stejným způsobem postupujeme při výpočtech sinu úhlů od 30° do 45°. Rozdíl sin 45° - sin 30° = 0,707 — 0,500 = 0,207. Dělíme tuto hodnotu 15 a dostáváme 0,014. Tuto hodnotu potom připočítáváme k sinu 30° a dostáváme:

$$\begin{aligned}\sin 31^0 &= 0{,}5 + 0{,}014 = 0{,}51,\\ \sin 32^0 &= 0{,}5 + 0{,}028 = 0{,}53,\\ \sin 40^0 &= 0{,}5 + 0{,}14 \ \ = 0{,}64 \text{ atd.}\end{aligned}$$

Zbývá nalézt sinus úhlů větších než 45°. Při tom nám pomůže Pythagorova věta. Stanovme na příklad sin 53°, t. j.

(obr. 59) poměr $\frac{BC}{AB}$. Jelikož úhel B rovná se 37^0 můžeme jeho sinus vypočítat z předešlého: je roven $0{,}5 + 7 \times \times 0{,}014 = 0{,}6$. Na druhé straně víme, že $\sin B = \frac{AC}{AB}$.

Tedy $\frac{AC}{AB}$ je 0,6, odkud $AC = 0{,}6\ AB$. Když známe AC, snadno vypočteme BC.

Tato odvěsna je rovna:

$$\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{AB^2 - (0{,}6AB)^2} - AB\sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8\,AB.$$

Výpočet v obecném případě je snadný, stačí, umíme-li vypočítat druhou odmocninu.

Druhá odmocnina

Způsob odmocňování, který se přednáší v hodinách algebry, se velmi snadno zapomíná, avšak lze se obejít i bez něho. V mých učebnicích geometrie jsem uvedl starý zjednodušený způsob druhého odmocňování pomocí dělení. Zde uvedu druhý prastarý způsob podstatně jednodušší než ten, kterému se učí v hodinách algebry.

Mějme vypočítat třeba druhou odmocninu z třinácti. Odmocnina je mezi 3 a 4 a je tedy rovna 3 + jistý zlomek, který označíme x. Tedy

$$\sqrt{13} = 3 + x, \text{ odkud } 13 = 9 + 6x + x^2.$$

Druhá mocnina x je malý zlomek, který můžeme v prvním přiblížení zanedbat; potom dostáváme:

$$13 = 9 + 6x, \text{ odkud } 6x = 4 \text{ a } x = \frac{2}{3} = 0{,}67.$$

Tedy přibližně platí: odmocnina z třinácti = 3,67. Chceme-li stanovit hodnotu odmocniny ještě přesněji, napíšeme rovnici $\sqrt{13} = 3\frac{2}{3} + y$, kde y je malý kladný nebo záporný zlomek. Z rovnice plyne $13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$.

Zanedbáme y^2 a dostáváme, že y je přibližně roven $-\frac{2}{33} = -0{,}06$. Tedy při druhém přiblížení je $13 = 3{,}67 - 0{,}06 = 3{,}61$. Třetí přiblížení provedeme stejným způsobem, atd.

Obvyklým způsobem uváděným v učebnicích algebry bychom našli $\sqrt{13}$ s přesností 0,01, rovněž 3,61.

Jak stanovit úhel ze sinu

Nyní již dovedeme vypočítat sinus libovolného úhlu od nuly do 90^0 s přesností na dvě desetinná místa. Odpadá nutnost nosit s sebou tabulky; při přibližných výpočtech můžeme si jej vždy podle potřeby vypočítat.

Avšak k řešení trigonometrických úkolů je třeba umět postupovat také opačným směrem, vypočítat úhel ze sinů. Ani to není složité. Máme třeba stanovit úhel, jehož sinus je roven 0,38. Jelikož daný sinus je menší než 0,5, je hledaný úhel menší než 30^0, ale větší než 15^0, neboť $\sin 15^0$, jak víme, je roven 0,26. Abychom nalezli tento úhel, který se nachází mezi 15^0 a 30^0, postupujeme jak je naznačeno na straně 83:

$$0{,}38 - 0{,}26 = 0{,}12,$$

$$\frac{0{,}12}{0{,}016} = 7{,}5^0,$$

$$15^0 + 7{,}5^0 = 22{,}5^0.$$

Hledaný úhel je tedy přibližně roven 22,5 stupně. Jiný příklad: stanovte úhel, jehož sinus je roven 0,62.

$$0{,}62 - 0{,}50 = 0{,}12,$$

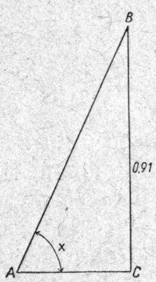
$$\frac{0{,}12}{0{,}014} = 8{,}6^0,$$

$$30^0 + 8{,}6^0 = 38{,}6^0.$$

Na konec třetí příklad: Určete úhel, jehož sinus je 0,91. Jelikož daný sinus leží mezi 0,71 a 1, leží hledaný úhel mezi 45^0 a 90^0. Na obr. 60 je BC sinus úhlu A, jestliže BA je rovno jednotce. Když známe BC, lze snadno nalézt sinus úhlu B.

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 1 - 0{,}91^2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17,$$

$$AC = \sqrt{0{,}17} = 0{,}42.$$



Obr. 60. K výpočtu ostrého úhlu ze sinu.

Jakmile nalezneme velikost úhlu B, jehož sinus je roven 0,42, snadno už nalezneme úhel A, rovný 90^0–B. Jelikož 0,42 spadá do rozmezí mezi 0,26 až 0,5, víme, že úhel B najdeme mezi 15^0 až 30^0. Stanoví se následovně:

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16,$$

$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10^0,$$

$$B = 15^0 + 10^0 = 25^0.$$

Tedy úhel $A = 90^0 - B = 90^0 - 25^0 = 65^0$.

Nyní jsme plně vyzbrojeni k přibližnému řešení geometrických úloh, neboť dovedeme nalézt siny úhlů a úhly ze sinů s přesností vyhovující našim potřebám.

Ale stačí k tomu pouze sinus? Nebudeme snad také potřebovat ostatních trigonometrických funkcí, jako kosinů, tangent atd.? Hned ukáži na příkladech, že pro naše potřeby vystačíme se sinem.

Výška Slunce

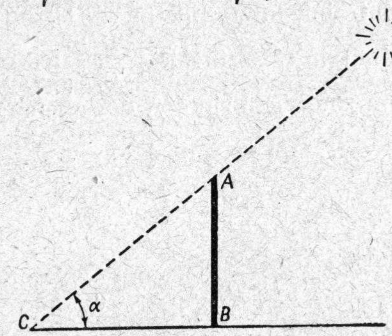
Úkol

Stín BC (obr. 61) kolmé tyče AB o výšce 4,2 m má délku 6,5 m. Jaká je v tom okamžiku výška Slunce nad horizontem, t. j. jak velký je úhel C?

Řešení

Snadno lze odvodit, že sinus úhlu C je roven $\frac{AB}{AC}$. Ale

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74.$$



Obr. 61. K stanovení výšky Slunce nad horizontem.

Hledaný sinus je tedy roven $\frac{4{,}2}{7{,}74} = 0{,}55$. Způsobem uvedeným dříve nalézáme příslušný úhel. Je roven 33^0. Výška Slunce je tedy 33^0 s přesností ½ stupně.

Vzdálenost ostrova

Úkol

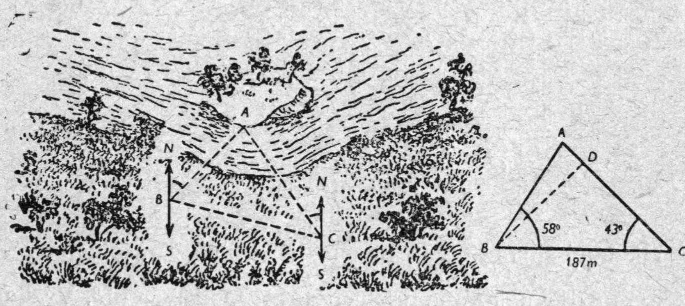
Při procházce kolem řeky s kompasem (busolou) zpozorovali jste v ní ostrůvek (obr. 62) a chcete zjistit jeho vzdálenost od bodu B na břehu. K tomu určíte podle kompasu velikost úhlu ABN, který tvoří přímka BA se směrem severojižním (NS). Nakonec provedete totéž v bodě C pro přímku AC. Připusťme, že jste dostali následující výsledky:

směr AB svírá s NS úhel 52^0 k východu,
směr BC svírá s NS úhel 110^0 k východu,
směr CA svírá s NS úhel 27^0 k západu,
délka $BC = 137$ m.

Jak stanovíme z těchto údajů vzdálenost BA?

V trojúhelníku ABC známe stranu BC. Úhel $ABC = 110^0 - 52^0 = 58^0$; úhel $ACB = 180^0 - 110^0 - 27^0 = 43^0$. V tomto trojúhelníku spustíme z B kolmici BD (obr. 62 vpravo). Máme $\sin C = \sin 43^0 = \frac{BD}{187}$. Když vypočteme dříve uvedeným způsobem sin 43^0, dostaneme 0,68. Tedy:

$$BD = 187 \times 0{,}68 = 127$$



Obr. 62. Jak se vypočte vzdálenost ostrova?

Nyní známe v trojúhelníku kolmici BD; úhel $A = 180^0 - (58^0 + 43^0) = 79^0$ a úhel $ABD = 90^0 - 79^0 = 11^0$. Sinus 11^0 můžeme vypočítat; je roven 0,19. Tedy $\frac{AD}{AB}$ se rovná 0,19. Z Pythagorovy věty:

$$AB^2 \doteq 127^2 + (0{,}19\ AB)^2$$

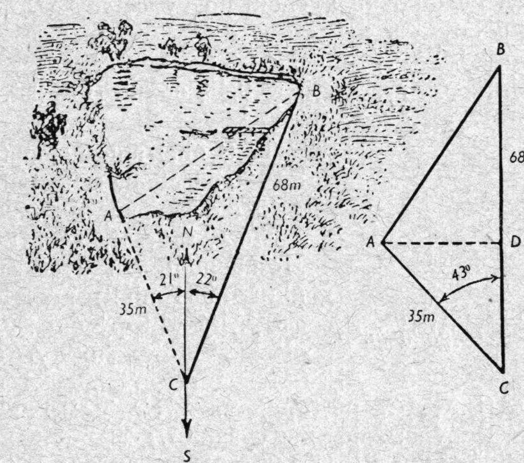
odkud $AB \doteq 128$.

Hledaná vzdálenost ostrova je asi 128 m.

Čtenáři by patrně nečinilo potíží vypočítat také stranu AC.

Úkol

Chceme stanovit šířku AB jezera (obr. 63) a pomocí kompasu jsme stanovili, že přímka AC se odklání o 21^0 k západu a BC o 22^0 k východu. Délka BC je 68 m a AC 35 m. Vypočteme z těchto údajů šířku jezera.



Obr. 63. Výpočet šířky jezera.

Řešení

V trojúhelníku ABC je znám úhel 43^0 a délka jeho ramen 68 m a 35 m. Spustíme výšku AD (obr. 63 vpravo) a máme $\sin 43^0 = \frac{AD}{AC}$. Nezávisle vypočteme sin 43^0 a dostáváme 0,68. Tedy $\frac{AD}{AC} = 0{,}68$, $AD = 0{,}68 \times 35 = 24$. Potom vypočteme CD:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649;\ CD = 25{,}5,$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

Nyní máme z trojúhelníku ABD:

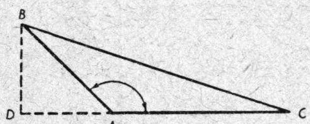
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2380;$$

$$AB \doteq 49.$$

Hledaná šířka jezera je asi 49 m.

Kdybychom měli v trojúhelníku ABC vypočítat zbylé dva úhly, postupovali bychom po vypočtení $AB = 49$ m následovně:

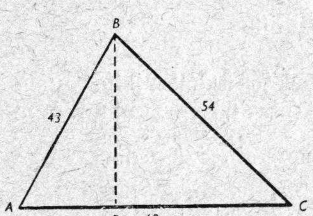
$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} = 0{,}49, \text{ odkud } B = 29^0.$$



Obr. 64. K řešení tupoúhlého trojúhelníku.

Třetí úhel nalezneme tak, že od 180 odečteme součet úhlů 29^0 a 43^0 a dostaneme 108^0.

Může se stát, že při řešení trojúhelníku (ze dvou stran a úhlu mezi nimi) nebude dán ostrý, nýbrž tupý úhel. Je-li na příklad v trojúhelníku ABC (obr. 64) znám tupý úhel A a dvě strany AB a AC, postupujeme při výpočtu zbylých prvků následovně: spustíme výšku BD, stanovíme BD a AD z trojúhelníku BDA; potom známe-li $DA + AC$, nalezneme BC a sinus C tím, že vyčíslíme poměr $\frac{BD}{BC}$.



Obr. 65. Stanovte úhly trojúhelníku: 1. výpočtem, 2. pomocí úhloměru.

Trojúhelníková cesta

Úkol

Při exkursi jsme kroky změřili strany trojúhelníku a zjistili jsme, že jsou rovný 43, 60 a 54 krokům. Jaké jsou úhly trojúhelníku?

Řešení

Máme před sebou nejsložitější případ řešení trojúhelníku. Avšak i s ním se dovedeme vyrovnat, bez použití všech funkcí kromě sinu.

Spustíme (obr. 65) výšku BD na delší stranu AC a máme:

$$BD^2 = 43^2 - AD^2, BD^2 = 54^2 - DC^2,$$

odkud

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DC^2, DC^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1070,$$

ale

$$DC^2 - AD^2 = (DC + AD)(DC - AD) = 60\,(DC - AD).$$

Tedy:

$$60\,(DC - AD) = 1070 \text{ a } DC - AD = 17{,}8.$$

Ze dvou rovnic $DC - AD = 17{,}8$ a $DC + AD = 60$,

dostáváme $2\,DC = 77{,}8$, t. j. $DC = 38{,}9$.

Nyní snadno vyčíslíme výšku: $BD = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4$

odkud dostáváme

$$\sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{37{,}4}{43} = 0{,}87;\ A = \text{asi } 60^0,$$

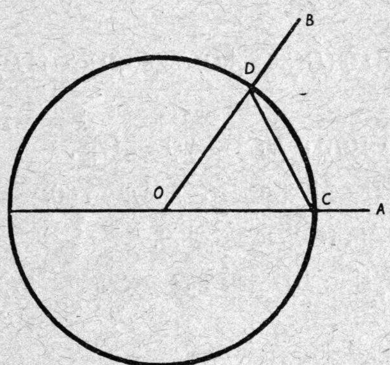
$$\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{37{,}4}{54} = 0{,}69;\ C = \text{asi } 44^0.$$

Třetí úhel $B = 180^0 - (A + C) = 76^0$.

Kdybychom v daném případě počítali pomocí tabulek a všech pravidel „opravdové“ trigonometrie, dostali bychom úhly vyjádřené ve stupních a minutách. Ale údaje v minutách by byly zcela chybné, neboť strany měřené kroky vykazují odchylky neméně než 2—3% Abychom neklamali sami sebe, museli bychom vypočtené „přesné“ hodnoty úhlů zaokrouhlit aspoň na celé stupně. Potom bychom dostali stejný výsledek, ke kterému jsme přišli použitím zjednodušených method. Užitečnost naší „trigonometrie" zde vystupuje zvlášť jasně.

Stanovení velikosti úhlu bez měření

K měření úhlu v terénu musíme mít kompas nebo případně krabičku od zápalek, v nejkrajnějším případě vlastní prsty. Avšak může se stát, že budeme muset změřit úhel nakreslený na papíře, plánu nebo mapě.



Obr. 66. Jak se určí velikost úhlu AOB použitím kružítka?

Samozřejmě, že máme-li k disposici úhloměr, je řešení velmi jednoduché. Ale co když jsme na cestě a úhloměr nemáme? Geometr nesmí ztratit rozvahu ani v takovém případě. Jak byste řešili následující úkol?

Úkol

Úhel AOB zobrazený na obr. 66 je menší než 180^0. Stanovte jeho velikost bez měření.

Řešení

Z libovolného bodu strany BO by bylo možno spustit kolmici na stranu AO a v takto vzniklém trojúhelníku změřit odvěsny a přeponu, nalézt sinus úhlu a potom jeho hodnotu ve stupních (viz str. 83). Ale takové řešení by odporovalo přísnému požadavku nic neměřit.

Použijeme řešení, které navrhl roku 1946 Z. Rupejka z Kaunasu.

Z vrcholu O se opíše libovolným poloměrem kružnice. Body C a D, ve kterých protíná ramena úhlu, spojíme úsečkou.

Nyní budeme na kružnici nanášet z bodu C postupně kružítkem úsečku CD stále v jednom směru, až se rameno kružítka dostane do výchozího bodu C.

Při nanášení úsečky musíme počítat, kolikrát při tom obejdeme kružnici a kolikrát při tom naneseme úsečku.

Připusťme, že jsme kružnici obešli n-krát a při tom jsme S krát nanesli úsečku CD. Potom je hledaný úhel roven

$$\sphericalangle AOB = \frac{360^0 \cdot n}{S}.$$

Opravdu. Nechť daný úhel měří x^0; když jsme nanesli na kružnici úsečku CD S-krát, zvětšili jsme tím úhel S-krát. Jelikož jsme při tom obešli kružnici n-krát, je celý úhel $360\ n$, t. j. $x^0 \times S = 360^0 \times n$.

Odtud:

$$x^0 = \frac{360^0 \cdot n}{S}.$$

Pro úhel zobrazený na nákresu je $n = 3$, $S = 20$ (zkontrolujte), takže $AOB = 54^0$. V případě, že nemáte kružítko, lze opsat kružnici pomocí špendlíku a proužku papíru; úsečku můžeme nanášet pomocí téhož proužku papíru.

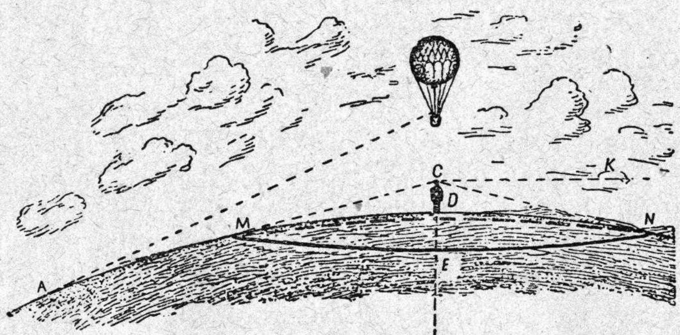
Úkol

Stanovte uvedeným způsobem velikost trojúhelníku na obr. 65.

VI. KDE SE SETKÁVÁ NEBE SE ZEMÍ

Horizont

Ve stepi nebo na rovném poli se nalézáte ve středu kružnice, která omezuje povrch dostupný vašemu zraku. Tato čára se nazývá horizont. Čára horizontu je nedosažitelná; když jdete k ní, vzdaluje se od vás. Ale ačkoli je nedostupná, reálně existuje; není to zrakový klam ani přelud. V každém

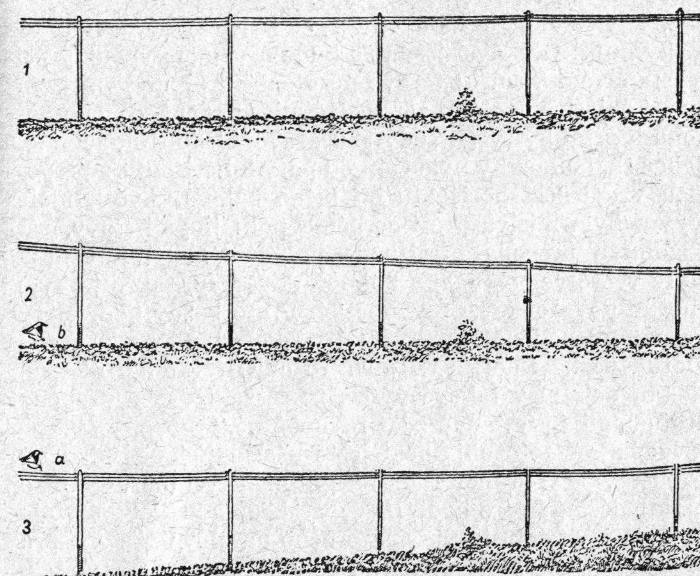


Obr. 67. Horizont.

pozorovacím bodu existuje hranice zemského povrchu, který z něho obhlédneme. Vzdálenost této hranice není nesnadné vypočítat. Abychom si ujasnili geometrické zásady související s horizontem, podívejme se na obr. 67, který zobrazuje část zeměkoule. V bodě *C* je pozorovatelovo oko ve výšce *CD* nad zemským povrchem. Jak daleko vidí kolem sebe pozorovatel nalézající se na rovině? Zřejmě pouze do bodů *M* a *N*, kde se zorný paprsek dotýká zemského povrchu; dále už země leží pod jeho zornými paprsky. Body *M* a *N* (a ostatní, ležící na kružnici *MEN*) tvoří hranici viditelné části zemského povrchu, t. j. tvoří horizont. Pozo-

rovateli se musí zdát, že se nebe opírá o zemi, neboť v těchto bodech vidí současně nebe a zemi.

Snad se vám bude zdát, že obr. 67 nepodává správný obraz skutečnosti: vždyť ve skutečnosti se horizont nalézá ve výši očí, zatím co na obrázku leží kruh pod pozorovatelem. Opravdu, vždyť se nám zdá, že horizont je v jedné ro-



Obr. 68. Jak se nám jeví řada telegrafních tyčí při různých polohách oka.

vině s očima a dokonce, když stoupáme, postupuje s námi. Ale to je zrakový klam; ve skutečnosti je horizont vždy pod námi, jak je to znázorněno na obr. 67. Ale úhel, který tvoří přímky *CN* a *MC* s přímkou *CK*, kolmou k poloměru *C*, je velmi malý, takže jej nelze zjistit bez přesného přístroje.

Uveďme současně jinou zajímavou okolnost. Právě jsme řekli, že při vystoupení pozorovatele nad zemský povrch, na příklad v letadle, se zdá, že horizont zůstává ve výšce očí, t. j. jako by vystupoval spolu s pozorovatelem. Když pozorovatel vystoupí dostatečně vysoko, bude se mu zdát, že půda pod letadlem leží níže než horizont, jinými slovy, že země má tvar promáčklé číše, jejíž okraje tvoří horizont. Tento dojem je skvěle podán Edgarem Poem ve fantastickém románu „Příhody Hanse Pfaleho". Hrdina románu – letec – vypráví:

„Nejvíce mě udivila okolnost, že byl zemský povrch jakoby dutý. Očekával jsem, že bude neustále vypouklý při vystupování vzhůru; teprve po dlouhém přemýšlení jsem našel objasnění tohoto zjevu. Kolmice vedená z mého balonu k zemi by tvořila odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka, jehož základnou by byla čára od paty k horizontu a přeponou vzdálenost horizontu od mého balonu. Avšak moje výška byla mizivá proti zornému poli: jinými slovy, základna a přepona myšleného pravoúhlého trojúhelníka byly velké ve srovnání s kolmou odvěsnou, takže je bylo možno považovat za rovnoběžné. Proto každý bod, který se nalézal pod balonem, se zdál jakoby pod horizontem. Odtud pochází dojem dutosti. To musí trvat tak dlouho, dokud nejsem v takové výšce, že se základna a přepona trojúhelníka přestanou zdát rovnoběžné."

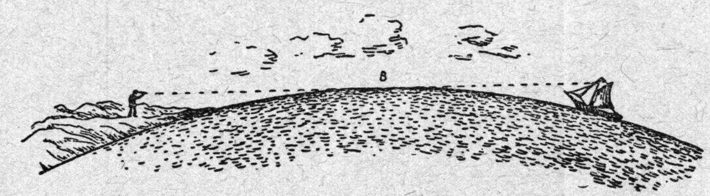
Doplníme toto objasnění ještě následujícím příkladem. Představme si přímou řadu telegrafních tyčí (obr. 68). Pro oko, nalézající se v bodě *B*, ve výši základu sloupů, bude se řada jevit tak, jak je znázorněno na obr. 68/2. Ale pro oko v bodě *A*, ve výši vrcholků sloupů, nabude řada tvaru 3, t. j. bude se zdát, že půda doslova stoupá k horizontu.

Loď na horizontu

Když pozorujeme na břehu moře nebo velkého jezera loď, která se k nám přibližuje zpod horizontu, zdá se nám, že nevidíme loď v bodě, kde je ve skutečnosti (obr. 69), nýbrž podstatně blíže, v bodě *B*, kde se stýká náš zorný paprsek s mořem. Při pozorování neozbrojeným okem je

velmi nesnadné zbavit se dojmu, že loď není v bodě *B*, ale dále za horizontem.

Nicméně v dalekohledu vnímáme tuto vzdálenost podstatně výrazněji. V dalekohledu nevidíme vzdálené a blízké předměty stejně jasně; v dalekohledu nastaveném na velkou vzdálenost jeví se blízké předměty mlhavě a naopak dalekohledem zaostřeným na blízké předměty vidíme



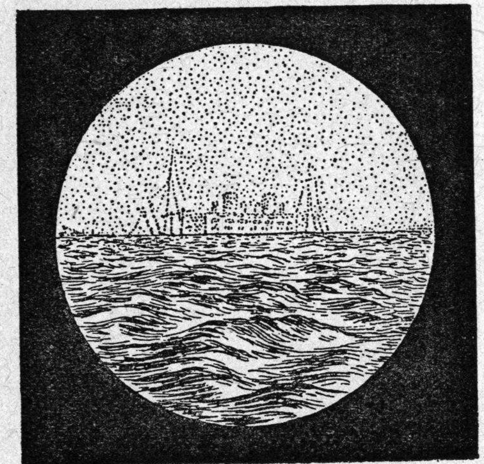
Obr. 69. Loď za horizontem.

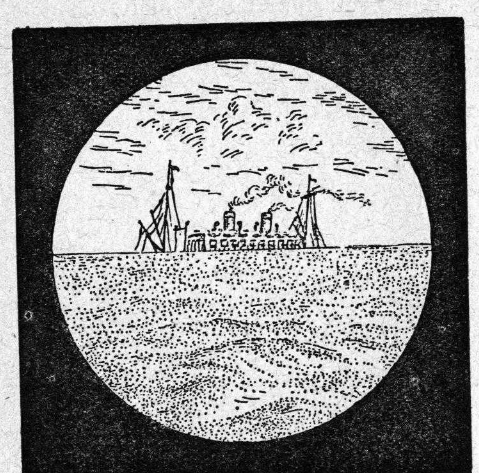
vzdálené předměty neostře. Proto zamíříme-li dalekohled s dostatečným zvětšením na vodní horizont a nastavíme jej tak, abychom ostře viděli vodní povrch, objeví se nám loď v neostrých obrysech, neboť se projeví její větší vzdálenost od pozorovatele (obr. 70 nahoře). Naopak, jestliže nastavíme dalekohled tak, abychom jasně viděli obrysy lodi, zpozorujeme, že vodní hladina u horizontu ztratila svou předešlou ostrost a narýsuje se doslova jako v mlze (obr. 70 dole).

Vzdálenost horizontu

Jak daleko je horizont od pozorovatele? Jinými slovy, jak velký je poloměr kruhu, v jehož středu jsme na rovném povrchu? Jak vypočítat vzdálenost horizontu, známe-li výšku pozorovatele nad zemským povrchem?

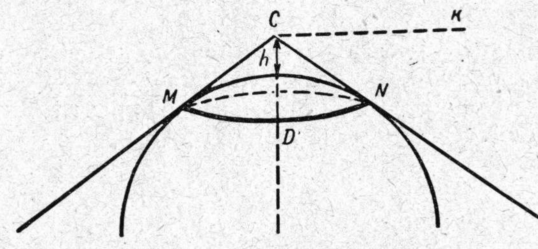
Úkol se redukuje na výpočet délky úsečky *CN* (obr. 71), tečny vedené z pozorovatelova oka k zemskému povrchu. Druhá odmocnina tečny – jak víme z geometrie – je rovna součinu vnějšího úseku *h* sečny a celé délky sečny, t. j.





Obr. 70. Loď za horizontem pozorovaná dalekohledem.

$h + 2R$, kde R je poloměr zeměkoule. Jelikož je výška pozorovatelova oka nad zemí obvykle velmi malá ve srovnání s průměrem ($2R$) zeměkoule, neboť dosahuje pro nejvyšší dosažitelný bod letadla pouze 0,001 jeho hodnoty, můžeme místo $2R + h$ psát pouze $2R$ a potom se vzorce zjednoduší:



Obr. 71. K úkolu o vzdálenosti horizontu.

$$CN^2 = h \times 2R,$$

tedy vzdálenost horizontu vypočteme z velmi jednoduchého vzorce:

$$\text{vzdálenost horizontu} = \sqrt{2Rh},$$

kde R je poloměr zeměkoule (kolem 6400 km)[1] a h výška pozorovatelova oka nad zemským povrchem.

Jelikož $\sqrt{6400} = 80$, můžeme dát vzorci následující tvar:

$$\text{Vzdálenost horizontu} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h},$$

kde h musí být vyjádřeno v kilometrech.

To je čistě geometrický, zjednodušený výpočet. Přejeme-li si jej zpřesnit tím, že vezmeme v patrnost fysikální faktory, které ovlivňují vzdálenost horizontu, musíme vzít v úvahu tak zvanou „atmosférickou refrakci". Refrakce, t. j. lom (a ohyb) světelných paprsků v atmosféře, zvětšuje vzdálenost horizontu přibližně o 1/15 vzdálenosti (o 6 %).

[1] Přesněji 6371 km.

Hodnota 6% je pouze průměrná. Vzdálenost horizontu se poněkud zvětšuje nebo zmenšuje v závislosti na mnoha podmínkách, na příklad:

Zvětšuje se:	*Zmenšuje se:*
při vysokém tlaku	za nízkého tlaku
u zemského povrchu	ve výšce
za chladného počasí	za teplého počasí
ráno a večer	ve dne
za deštivého počasí	za suchého počasí
nad mořem	nad souší

Úkol

Jak daleko přehlédne zemi člověk, stojící na rovině?

Řešení

Je-li výška očí dospělého člověka 1,6 m neboli 0,0016 km, máme vzdálenost horizontu $= 113\sqrt{0{,}0016} = 4{,}52$ km. Vzdušný obal země, jak jsme uvedli dříve, zakřivuje dráhu paprsků, čímž se rozšiřuje horizont přibližně průměrně o 6% hodnoty získané ze vzorce. Abychom provedli opravu, musíme násobit 4,52 km 1,06 a dostáváme

$$4{,}52 \times 1{,}06 \doteq 4{,}8 \text{ km}.$$

Člověk středního vzrůstu vidí tedy na rovině nejdále 4,8 km. Průměr obhlédnutého kruhu je 9,6 a jeho plocha 72 čtverečních kilometrů. To je podstatně méně, než obyčejně soudí lidé, kteří popisují rozsáhlý prostor stepí, který přehlédli okem.

Úkol

Jak daleko obhlédne moře člověk, sedící v loďce?

Řešení

Je-li vzdálenost výšky oka člověka sedícího v loďce nad vodní hladinou jeden metr neboli 0,001 km, pak bude vzdálenost horizontu rovna

$$113 \times \sqrt{0{,}001} = 3{,}58 \text{ km}$$

neboli, s přihlédnutím ke střední atmosférické refrakci, kolem 3,8 km. Z předmětů ležících dále vidí pouze jejich vrchní části; jejich základny jsou pokryty horizontem.

Při ještě nižší poloze oka se horizont zúžuje; na příklad při výšce půl metru je roven 2 a ½ km. Naproti tomu při pozorování s vyvýšených bodů (s rozhledny) vzrůstá vzdálenost horizontu: na příklad pro 4 m je 7 km.

Úkol

Jak daleko viděli zemi vzduchoplavci, kteří se dívali z gondoly stratostatu „COAX-1", když byl v nejvyšším bodě?

Jelikož stratostat byl ve výšce 22 km, vzdálenost horizontu je rovna $113\sqrt{22} = 530$ km, a se započtením refrakce 580 km.

Úkol

Jak vysoko musí vystoupit letec, aby viděl kolem sebe do vzdálenosti 50 km?

Řešení

Ze vzorce pro vzdálenost horizontu máme v daném případě rovnici

$$50 = \sqrt{2Rh},$$

odkud $$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2500}{12\,800} = 0{,}2 \text{ km}.$$

Stačí, aby vystoupil do výše 200 m.

Abychom provedli opravu na refrakci, odečteme 6% od 50 km, dostaneme 47 km; potom $h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2200}{12800} = 0{,}170$ km, t. j. 170 m (místo dřívějších 200 m).

Na nejvyšším bodě Leninových hor v Moskvě se staví dvacetipatrová budova Moskevské university – největší vědecké centrum na světě. Tato budova se bude tyčit 200 metrů nad hladinou řeky Moskvy. Z oken horních poschodí Moskevské university se rozevře panorama o poloměru 50 km.

Úkol

Zajímá nás, co vzrůstá rychleji, zda výška pozorovatele nad zemí nebo vzdálenost horizontu. Mnozí soudí, že se vzrůstem výšky roste vzdálenost horizontu velmi rychle. Tak soudil vedle mnoha jiných také Gogol, který napsal v článku „O architektuře naší doby" toto:

„Ve městě jsou nezbytné obrovské věže. U nás se obvykle omezujeme na výšku, která stačí k obhlédnutí města, zatím co by bylo třeba, aby z hlavního města byl rozhled nejméně na půl druhého sta verst. K tomu snad stačí přidat jedno, dvě poschodí a vše se změní. Velikost obzoru roste s výškou velmi rychle."

Je tomu tak ve skutečnosti?

Řešení

Stačí prozkoumat vzorec:

$$\text{vzdálenost horizontu} = \sqrt{2Rh},$$

abychom okamžitě zjistili nesprávnost tvrzení, že „velikost obzoru" roste s výškou pozorovatele velmi rychle. Naopak, vzdálenost horizontu roste pomaleji než výška výstupu, neboť vzdálenost horizontu je úměrná druhé odmocnině z výšky. Zvětší-li se výška pozorovatele 100krát, posune se horizont pouze desateronásobně; vzrůstá-li výška 1000krát, posune se horizont pouze 31krát dále. Proto je chybné tvrdit, že „stačí přidat" jedno nebo dvě poschodí a vše se změní. Jestliže k osmiposchoďovému domu přistavíme ještě dvě poschodí, vzroste vzdálenost horizontu o $\sqrt{\frac{10}{8}}$, t. j. 1,1krát, všeho všudy o 10%. Takový vzrůst je sotva pozorovatelný.

Pokud jde o stavbu věže, se které by bylo vidět „aspoň na půl druhého sta verst", t. j. 160 km[1], nelze ji vůbec postavit. Gogol neměl ani představu o tom, jak vysoká by musela být.

Opravdu, z rovnice $160 = \sqrt{2Rh}$

dostáváme $$h = \frac{160^2}{2R} = \frac{25\,600}{12\,800} = 2 \text{ km}.$$

To je výška velké hory. Dosud nejvyšší projekt domu v hlavním městě SSSR, 32poschoďová budova, jejíž pozlacená špička má být podle projektu 280 m nad základnou budovy, je sedmkrát nižší než výška budovy projektované Gogolem.

[1] 1 versta je 1,0668 km — 150 verst = 160 km.

Kde se setkávají koleje?

Úkol

Jistě jste nejednou pozorovali, jak se zúžují ubíhající koleje. Avšak podařilo se vám spatřit bod, kde se koleje setkávají? A lze tento bod vůbec spatřit? Máme teď už dost vědomostí, abychom mohli rozřešit tento úkol.

Řešení

Vzpomeňme, že každý předmět se pro normální oko změní v bod, jestliže jej vidíme pod úhlem 1′, t. j. když je od nás vzdálen 3400 svých průměrů. Šířka kolejí je 1,52 m[1]. Tedy vzdálenost mezi kolejemi musí splynout v bod ve vzdálenosti $1{,}52 \times 3400 = 5{,}2$ km. Jestliže bychom mohli pozorovat koleje do vzdálenosti 5,2 km, viděli bychom jak splývají v jeden bod. Ale na rovině leží horizont blíže než 5,2 km, totiž ve vzdálenosti 4,4 km. Člověk s normálním zrakem, když stojí v rovné krajině, nemůže vidět bod splynutí kolejí. Mohl by je zahlédnout pouze za následujících podmínek:

1. když je jeho zraková ostrost snížená,
2. není-li železniční trať horizontální,
3. kdyby jeho oko bylo ve výšce větší než

[1] V SSSR. U nás je šířka kolejí 1,435 m.

$$\frac{5{,}2^2}{2R} = \frac{27}{12800} = 0{,}0021 \text{ km},$$

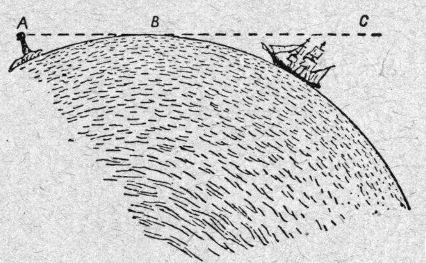
t. j. 210 cm.

Úkoly o majáku

Úkol

Na břehu stojí maják, jehož vrcholek se tyčí 40 m nad vodní hladinou.

V jaké vzdálenosti se zjeví maják lodi, je-li námořník v pozorovacím koši 10 m nad vodní hladinou?



Obr. 72. K úkolu o majáku.

Řešení

Z obr. 72 je patrno, že úkol se redukuje na výpočet vzdálenosti úsečky AC, která se skládá ze dvou částí, AB a BC. Část AB je vzdálenost horizontu majáku při výšce 40 m nad mořem a BC vzdálenost horizontu námořníka ve strážním koši při výšce 10 m. Hledaná vzdálenost je tedy rovna:

$$113\sqrt{0{,}04} + 113\sqrt{0{,}01} = 113\,(0{,}2 + 0{,}1) = 34 \text{ km}.$$

Úkol

Jakou část tohoto majáku uvidí námořník ve strážním koši ze vzdálenosti 30 km?

Řešení

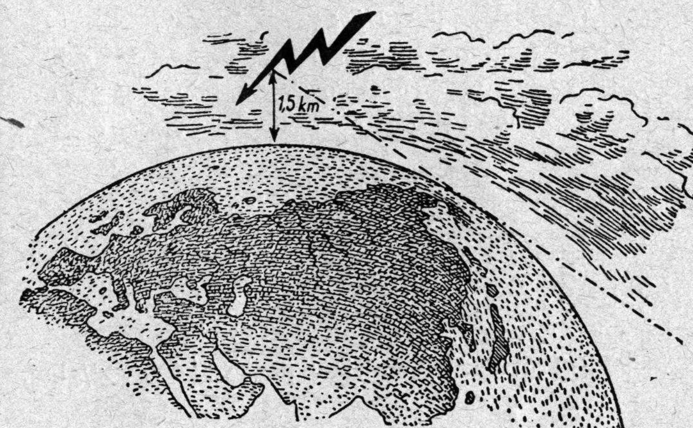
Z obr. 72 je jasný postup řešení tohoto úkolu: především je třeba vypočítat délku BC, potom odečíst získaný výsledek od celkové délky AC, t. j. od 30 km, abychom dostali vzdálenost AB. Když známe AB, vypočteme výšku, pro kterou je vzdálenost horizontu rovna AB. Provedeme všechny tyto výpočty:

$$BC = 113\sqrt{0{,}01} = 11{,}3 \text{ km};$$

$$30 - 11{,}3 = 18{,}7 \text{ km};$$

$$\text{výška} = \frac{18{,}7^2}{2R} = \frac{350}{12800} = 0{,}027 \text{ km}.$$

Ze vzdálenosti 30 km je zacloněno 27 m výšky majáku, t. j. viditelných zůstává pouze 13 metrů.



Obr. 73. K úkolu o blesku.

Blesk

Úkol

Nad vaší hlavou se zablýskalo ve výšce 1,5 km. V jaké vzdálenosti od vašeho stanoviště lze ještě spatřit blesk?

Řešení

Je třeba vypočítat (obr. 73) vzdálenost horizontu pro výšku 1,5 km. Vzdálenost je rovna $113\sqrt{1{,}5} = 138$ km.

Při rovném povrchu by člověk, který by měl oči u země, viděl blesk ze vzdálenosti 138 km (s opravou na 6% prodloužení vlivem difrakce ze vzdálenosti 146 km). V bodech vzdálených 146 km by se jevil na horizontě. Jelikož do takové vzdálenosti zvuk hromu nedolehne, jevil by se pozorovateli jako zornice — blesk bez hromu.

Horizont na Měsíci

Úkol

Dosud se všechny naše výpočty týkaly zeměkoule. Ale jak by se změnila vzdálenost horizontu, kdyby se pozorovatel octl na jiné planetě, na příklad na jedné z rovin Měsíce?

Řešení

Úkol řešíme stejným vzorcem; vzdálenost horizontu je rovna $\sqrt{2Rh}$, avšak v daném případě je třeba místo $2R$ položit průměr Měsíce. Jelikož průměr Měsíce je roven 3500 km, při výšce očí nad zemí 1,5 m, máme vzdálenost horizontu $= \sqrt{3500 \times 0{,}0015} = 2{,}3$ km.
Na měsíční rovině bychom viděli pouze do dálky $2^1/_3$ km.

V měsíčním kráteru

Úkol

Když pozorujeme Měsíc dalekohledem, spatříme i při malém zvětšení množství tak zvaných kruhových hor – útvarů jaké na Zemi nemáme. Jednou z největších kruhových hor je „Koperníkův kráter", který má vnější průměr 124 km, vnitřní 90 km. Nejvyšší body kruhového valu vystupují nad vnitřní prohlubní o 1500 m. Viděli byste kruhový val, kdybyste se ocitli uprostřed kráteru?

Řešení

Abychom mohli odpovědět na tuto otázku, musíme vypočítat vzdálenost horizontu pro hřeben valu, t. j. pro

výšku 1,5 km. Na Měsíci je rovna $\sqrt{3500 \times 1{,}5} = 23$ km. Když připočteme vzdálenost horizontu pro pozorovatele střední velikosti, dostaneme vzdálenost, ve které se kruhový val skryje pod horizontem před zraky pozorovatele

$$23 + 2{,}3 = \text{přibližně } 25 \text{ km}.$$

Jelikož střed kráteru je vzdálen od valu 45 km, vidíme, že ze středu valu jej nezahlédneme, jedině kdybychom se vyškrábali na svah centrální hory, která musí vystupovat nad úroveň kráteru do výše 600 m.

Na Jupiteru

Úkol

Jak velká je vzdálenost horizontu na Jupiteru, jehož průměr je 11krát větší než průměr Země?

Řešení

Kdyby byl Jupiter pokryt tvrdou kůrou a měl rovný povrch, mohl by člověk, který by se dostal na jeho povrch, vidět do vzdálenosti

$$\sqrt{11 \times 12\,800 \times 0{,}0016} = 14{,}4 \text{ km}.$$

Pro samostatná cvičení

Vypočtěte vzdálenost horizontu pro periskop ponorky, vysunutý 30 cm nad hladinu klidného moře.

Jak vysoko musí vystoupit letec nad Ladožským jezerem, aby uviděl současně oba břehy, vzdálené od sebe 210 km?

Jak vysoko musí vystoupit letec mezi Moskvou a Leningradem, aby viděl současně obě města? Vzdálenost Moskva –Leningrad je 640 km.

VII. GEOMETRIE ROBINSONŮ

(Několik stránek z Julia Vernea)

Geometrie hvězdného nebe

Byly doby, kdy se autor této knihy připravoval na trochu neobyčejnou budoucnost. Připravoval se na životní pouť člověka, který přežil ztroskotání lodi. Krátce řečeno, chtěl se stát Robinsonem. Kdyby se to bylo opravdu událo, mohla by tato kniha být zajímavější, ale možná, že by nebyla vůbec napsána. Nestal jsem se Robinsonem a dnes toho nelituji. Nicméně v mládí jsem pevně věřil ve svůj osud Robinsona a zcela vážně jsem se na něj připravoval. Vždyť i zcela prostřední Robinson musí vládnout mnohými znalostmi a zkušenostmi, kterých nepotřebují lidé jiných životních osudů.

Co musí především učinit člověk, který se zachránil po ztroskotání lodi na pustém ostrově? Samozřejmě, že musí stanovit zeměpisnou polohu svého nedobrovolného sídliště – totiž jeho zeměpisnou délku a šířku. O tom se bohužel jen velmi krátce zmiňuje většina knih o starých a nových Robinsonech. V úplném vydání skutečného „Robinsona Crusoe" najdete na toto thema pouze jeden řádek a i to jen v závorkách:

„V šířkách, kde leží můj ostrov (t. j. podle mých výpočtů 9°, 22′ severně od rovníku) . . ."

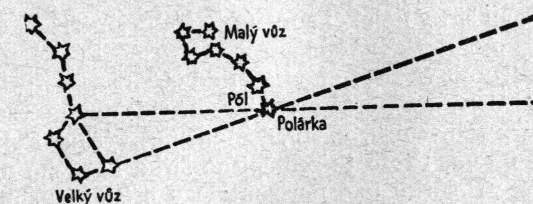
Tato trapná stručnost mě zklamala, když jsem shromažďoval znalosti pro svou vysněnou budoucnost. Byl jsem už dokonce ochoten vzdát se kariéry jediného obyvatele pustého ostrova, když se otevřelo přede mnou tajemství na stránkách Verneova „Tajuplného ostrova".

Nepřipravuji sice své čtenáře na životní dráhu Robinsonů, ale přesto uznávám za vhodné zastavit se u nejjednodušších způsobů stanovení zeměpisné šířky. Toto umění se může hodit i nám. Existuje ještě tolik obývaných míst, které nejsou zaznamenány na mapách (ostatně máme vždy

pohotově podrobnou mapu?), takže úkol stanovit zeměpisnou šířku může vyvstat před mnohými čtenáři. Pravda, nemůžeme sice tvrdit jako kdysi Lermontov, že dokonce

„Tambov na generálce
není kroužkem vždy označen",

ale množství městeček a osad není na přehledných mapách vůbec zaznamenáno. Není třeba se pouštět do námořních



Obr. 74. Nalezení Polárky.

dobrodružství, abychom se octli v úloze Robinsona, který po prvé stanoví zeměpisnou polohu svého bydliště.

Záležitost je poměrně jednoduchá. Když pozorujete nebe za jasné noci, zjistíte, že hvězdy opisují na nebeské klenbě kruhy, doslova jako by se kopule pomalu otáčela kolem šikmo upevněné neviditelné osy. Ve skutečnosti jsme to my sami, kteří se otáčíme se Zemí a opisujeme kruhy kolem její osy na opačnou stranu. Jediný bod hvězdné kopule na naší severní polokouli, který zůstává nehybný, je bod, kudy prochází myšlená zemská osa. Je jím severní „pól světa", který se nalézá nedaleko jasné hvězdy na konci voje Malého vozu – v blízkosti Polárky. Když ji nalezneme na severním nebi, nalezneme tím také polohu severního pólu. Není těžké ji najít, jestliže nalezneme dříve souhvězdí Velkého vozu. Spojíme-li přímkou jeho krajní hvězdy, jak je to znázorněno na obr. 74, a prodloužíme jejich vzdálenost o délku celého souhvězdí, narazíme na Polárku.

Je to jeden z těch bodů na nebeské klenbě, který se hodí k stanovení zeměpisné šířky. Druhým bodem, kterému se říká zenit, je bod, jenž se nalézá na nebi přesně nad naší hlavou. Jinými slovy, zenit je bod na nebi, kde se protíná myšlené prodloužení poloměru Země, který vedeme od středu k místu, kde stojíme, s nebeskou klenbou. Úhlová vzdálenost oblouku mezi naším zenitem a Polárkou je současně úhlovou vzdáleností našeho místa od zemského pólu. Jestliže je náš zenit vzdálen od Polárky 30°, jsme vzdáleni 30° od pólu a tedy 60° od rovníku; jinak řečeno jsme na šedesáté rovnoběžce.

K nalezení šířky nějakého místa je třeba změřit ve stupních (a jeho zlomcích) vzdálenost zenitu od Polárky, pak už zbývá jen odečíst tuto hodnotu od 90° a šířka je stanovena. Prakticky lze postupovat jinak. Odečtením vzdálenosti Polárky od zenitu, od 90°, dostaneme „výšku" Polárky nad horizontem. Proto je zeměpisná šířka každého místa rovna výšce Polárky nad horizontem v příslušném místě.

Nyní je jasné, co je třeba vykonat ke stanovení šířky. Je třeba vyčkat jasné noci, nalézt na nebi Polárku a změřit její úhlovou výšku nad horizontem; výsledek udává přímo hledanou šířku našeho místa. Jestliže chceme být přesní, musíme vzít v patrnost, že Polárka není přesně totožná s pólem, nýbrž je od něho vzdálena $1^1/_4$ stupně. Proto Polárka nezůstává rovněž stále na svém místě: opisuje kolem nehybného pólu maličký kroužek o úhlovém poloměru $1^1/_4$ stupně, takže je jednou vlevo, po druhé vpravo, nahoře nebo dole od pólu. Když stanovíme výšku Polárky v nejvyšší a nejnižší poloze (astronom by řekl v době horní a spodní kulminace), vezmeme střední hodnotu obou měření; ta udává skutečnou výšku pólu a tedy také hledanou šířku místa.

Avšak postupujeme-li tímto způsobem, není nutné volit právě Polárku, můžeme zvolit libovolnou nezapadající hvězdu, změřit její výšky v obou krajních polohách nad horizontem a určit střední hodnotu těchto měření. Jako výsledek dostaneme výšku pólu nad horizontem, t. j. zeměpisnou šířku místa. Avšak přitom je třeba umět stanovit dobu nejvyšší a nejnižší polohy zvolené hvězdy, což znesnadňuje měření, a také se nepodaří pozorovat vše vždy za

jedné noci. Proto pro první přibližné měření je vhodnější pracovat s Polárkou, se zanedbáním malé odchylky od pólu.

Dosud jsme si stále představovali, že se nalézáme na severní polokouli. Jak bychom postupovali, kdybychom se octli na jižní polokouli? Stejně jako dosud, jen s tím rozdílem, že zde neměříme výšku severního, nýbrž jižního pólu. V blízkosti tohoto pólu není bohužel žádná jasná hvězda, jak je tomu na severní polokouli. Proslavený Jižní kříž září dost daleko od jižního pólu a přejeme-li si použít hvězd tohoto souhvězdí k stanovení šířky, musíme vzít střední hodnotu dvou měření – při nejvyšší a nejnižší poloze hvězdy.

Hrdinové Julia Vernea používali při stanovení šíře svého „tajemného ostrova" právě tohoto krásného souhvězdí jižního nebe.

Je poučné přečíst si to místo z románu, kde se popisuje postup při měření. Současně se seznámíme s tím, jak se noví Robinsonové vypořádali s problémem bez úhloměru.

Zeměpisná šířka „tajuplného ostrova"

„Bylo 8 hodin večer. Měsíc ještě nevyšel, ale horizont se leskl jemnými bledými odstíny, které by se daly nazvat měsíční září. V zenitu zářily hvězdy jižní polokoule a mezi nimi souhvězdí Jižního kříže. Inženýr Smith pozoroval chvíli toto souhvězdí.

„Herberte," řekl po krátkém zamyšlení, „je dnes 15. dubna?"

„Ano," odpověděl mladík.

„Nemýlím-li se, je zítra jeden ze čtyř dnů v roce, kdy je skutečný čas roven střednímu času: zítra vystoupí Slunce nad poledník přesně v poledne podle našich hodinek[1]. Bu-

[1] Naše hodiny nejdou zcela souhlasně se slunečními: mezi „skutečným slunečním časem" a „středním časem", který ukazují přesné hodiny, je jistý rozdíl. Rozdíl nulový je pouze čtyři dny v roce: kolem 16. dubna, 14. června, 1. září a 24. prosince.

de-li jasno, podaří se mi přibližně změřit zeměpisnou délku ostrova.“

„Bez přístrojů?“

„Ano. Večer je jasný a proto se dnes pokusím stanovit zeměpisnou šířku našeho ostrova tím, že změřím výšku hvězd Jižního kříže, čili výšku jižního pólu nad horizontem. A zítra v poledne určím také zeměpisnou délku ostrova.“

Kdyby měl inženýr sextant – přístroj, který umožňuje přesně změřit úhlovou vzdálenost předmětů pomocí odrazu světelných paprsků na zrcátku – úkol by byl neskýtal žádné obtíže. Stanovil by toho večera výšku pólu a druhý den v poledne okamžik průchodu Slunce poledníkem a dostal by zeměpisné souřadnice ostrova: jeho šířku a délku. Ale sextant nebyl, musel být nějak nahrazen.

Inženýr vešel do jeskyně. Při světle louče vyřezal dvě pravoúhlé lišty, které spojil v kružítko, takže bylo možno pohybovat jeho rameny. Jako kloubu použil pevného trnu akácie, který nalezl v chrastí u ohně.

Když byl přístroj hotov, vrátil se inženýr na břeh. Měl změřit výšku pólu nad horizontem, který se výrazně rýsoval u mořské hladiny. Za svým pozorováním se odebral na plošinku Dalekého rozhledu, takže musel vzít v patrnost také výšku samotné plošinky nad hladinou moře. Toto měření bude možno provést příští den methodami elementární geometrie.

Horizont ozářený zespodu prvními paprsky Měsíce se jasně rýsoval, což bylo velmi výhodné pro měření. Souhvězdí Jižního kříže zářilo na nebi, jako by bylo převrácené: hvězda alfa, která tvoří jeho základnu, byla ze všech nejblíže k jižnímu světovému pólu.

Toto souhvězdí není tak blízko u jižního pólu jako Polárka u severního pólu. Hvězda alfa je od pólu vzdálena 27°; inženýr to věděl a počítal s tím, že uvede tuto vzdálenost ve svých výpočtech. Vyčkal okamžiku, kdy bude hvězda procházet poledníkem, neboť to usnadňuje operaci.

Smith zamířil jedno rameno svého dřevěného kružítka horizontálně a druhé k hvězdě alfa Jižního kříže, takže rozevření vzniklého úhlu udávalo úhlovou výšku hvězdy nad horizontem. Aby si spolehlivě zajistil tento úhel, přibil trny akácie k oběma laťkám třetí, která je protínala napříč, takže kružítko zachovávalo stále stejný tvar.

Zbývalo stanovit velikost naměřeného úhlu a vztáhnout pozorování na hladinu moře, t. j. vzít v úvahu pokles horizontu, k čemuž je třeba změřit výšku skály[1]. Velikost úhlu dá potom výšku hvězdy alfa Jižního kříže a tím také výšku pólu nad horizontem, t. j. zeměpisnou šířku ostrova, neboť šířka každého místa zeměkoule je rovna výšce pólu nad horizontem tohoto místa. Výpočty měl inženýr provést příštího dne.“

Jak bylo provedeno měření výšky skály, vědí čtenáři již z úryvku uvedeného v první kapitole této knihy. Vynecháme toto místo románu a budeme sledovat další práci inženýra:

„Inženýr vzal kružítko, které si vyrobil včera a pomocí něhož stanovil úhlovou vzdálenost mezi hvězdou alfa Jižního kříže a horizontem. Pozorně proměřil velikost úhlu pomocí kruhu děleného na 360° a zjistil, že úhel je roven 10°. Tak výška pólu nad horizontem, po přičtení 10° k 27°, které oddělují uvedenou hvězdu od pólu, a po zavedení výšky skály nad hladinou moře, s níž bylo provedeno měření[1], byla 37°. Smith učinil závěr, že Lincolnův ostrov se nalézá na 37° jižní šířky, nebo, bereme-li v patrnost nedokonalost měření, mezi 35 a 40 rovnoběžkou.

Zbývá stanovit délku. Inženýr připravoval její stanovení ještě téhož dne v poledne, kdy bude Slunce procházet poledníkem ostrova.“

---

[1] Inženýr neprováděl měření na mořské hladině, nýbrž na vysoké skále, takže přímka vedená jeho okem k horizontu nebyla přesně totožná s kolmicí k zemskému poloměru, nýbrž svírala s ním jistý úhel. Nicméně je tento úhel tak malý, že pro daný případ jej bylo možno klidně zanedbat (při výšce 100 m dosahuje pouze třetiny stupně). Proto Smith, správněji Julius Verne, nemusel komplikovat výpočet zaváděním této opravy.

„Ale jak stanoví inženýr okamžik průchodu Slunce poledníkem ostrova, když nemá žádný přístroj?“ To byla otázka, která zajímala Herberta.

Inženýr si připravil vše, co potřeboval ke svým astronomickým měřením. Na písčitém břehu si vyhledal úplně holé místo vyrovnané mořským odlivem. Zde zarazil kolmo do země tyč dlouhou šest stop.

Herbert pochopil, jak hodlá postupovat inženýr při stanovení okamžiku průchodu Slunce poledníkem ostrova, neboli jinak řečeno, při stanovení místního poledne. Chtěl jej stanovit pozorováním stínu, který vrhala tyč na písek. Tento způsob není sice zcela přesný, ale bez přístrojů skýtal dostatečně uspokojivý výsledek.

V okamžiku, kdy bude stín nejkratší, nastane poledne. Stačí pozorně sledovat pohyb konce stínu, abychom zpozorovali, kdy se stín přestane zkracovat a začíná znova prodlužovat. Stín hraje v daném případě úlohu ručičky na ciferníku.

Když podle inženýrova výpočtu nastala doba pozorování, poklekl, a zapichuje do země malé kolíčky, začal vyznačovat postupný pohyb konce stínu vrhaného tyčí.

Žurnalista, jeden z přátel inženýrových, držel v ruce svůj chronometr (hodinky), aby zjistil okamžik, kdy bude stín nejkratší. Jelikož inženýr prováděl pozorování 16. dubna, t. j. za jednoho z těch dnů, kdy je skutečné poledne totožné se středním, bude okamžik vyznačený žurnalistou podle jeho chronometru stanoven podle času poledníku, na kterém leží Washington (výchozí místo cestovatelů).

Slunce se pomalu posouvalo a stín se postupně zkracoval. Inženýr, který konečně zpozoroval, že se stín začal prodlužovat, otázal se:

„Kolik je hodin?“

„Pět hodin, jedna minuta,“ odpověděl žurnalista.

Pozorování bylo skončeno. Zbývalo provést jednoduchý výpočet. Pozorováním jsme stanovili, že mezi poledníkem Washingtonu a poledníkem Lincolnova ostrova je časový

rozdíl 5 hodin. To znamená, že když je na ostrově poledne, je ve Washingtonu 5 hodin odpoledne. Slunce při svém zdánlivém denním pohybu kolem zeměkoule urazí 1^0 za 4 minuty a za hodinu 15^0; 15^0 násobeno 5 (počet hodin) je 75.

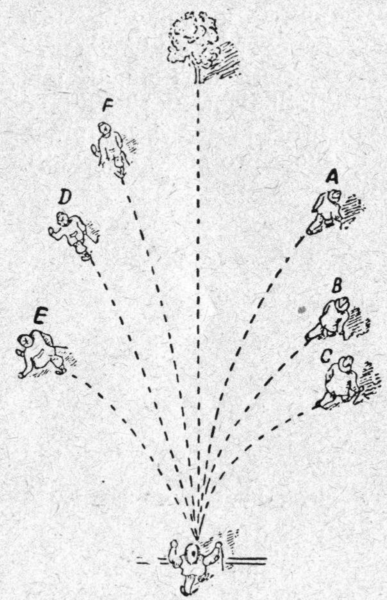
„Washington leží na 77^0 3′11″ poledníku západně od Greenwiche, který Američané a Angličané počítají za nultý. Ostrov ležel přibližně na 152^0 západní délky.

Bereme-li v patrnost nedostatečnou přesnost pozorování, můžeme tvrdit, že ostrov leží mezi 35. a 40. rovnoběžkou jižní šířky a mezi 150. a 155. poledníkem západně od Greenwiche.“

Poznamenejme na závěr, že způsobů k stanovení zeměpisné délky je několik a různorodých; způsob, kterého užili hrdinové Julia Vernea, je pouze jeden z nich (známý pod názvem „přeprava chronometru“). Stejně tak existují také různé jiné způsoby k stanovení šířky, přesnější, než právě popsaný (který se na příklad nehodí pro měření na lodi).

Záhadné kroužení

Nyní prozkoumáme podivuhodný zjev, který pozorujeme u lidí, jež kráčejí se zavřenýma očima; nejsou s to jít přímo, neustále se odchylují na jednu stranu, takže opisují oblouk, ačkoli si myslí, že jdou přímo kupředu (obr. 75).



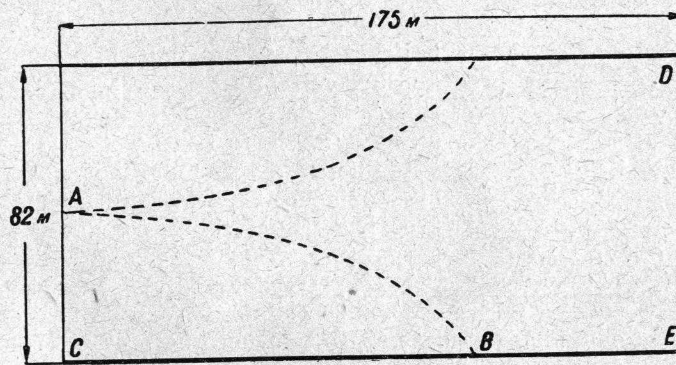
Obr. 75. Chůze se zavázanýma očima.

Už dávno bylo zpozorováno, že také cestovatelé, kteří šli bez kompasu poušti, za bouře nebo za mlhy stepí, odchylují se od přímé dráhy a bloudí v kruhu, takže se několikrát vrátí k výchozímu místu. Poloměr kruhu, který chodec opisuje, měří 60–100 m; čím rychleji jde, tím menší je poloměr kruhu.

Byly rovněž provedeny zvláštní pokusy, aby se prozkoumal sklon lidí odchylovat se od přímé dráhy. Uvádíme zprávu Hrdiny Sovětského svazu I. Spirina:

„Na rovném zeleném letišti stálo sto budoucích letců. Všem zavázali oči a poručili, aby šli vpřed. Letci vykročili . . . Z počátku šli přímo; potom jedni začali zahýbat vpravo a jiní vlevo a postupně opisovali kruhy a vraceli se po starých stopách.“

Známý je analogický pokus provedený v Benátkách na náměstí sv. Marka. Lidé se zavázanýma očima se postavili na jeden konec náměstí, právě proti katedrále, ke které měli dojít. Ačkoli bylo třeba projít pouze 175 m, ani jeden ze zkoušených nedošel k průčelí stavby (jejíž šířka je 83 m). Všichni se odklonili na stranu, opisovali oblouk a zastavili se u jedné z bočních kolonád (obr. 76).



Obr. 76. Schema pokusu na náměstí sv. Marka v Benátkách.

Kdo četl Verneův román „Příhody kapitána Hatterase“, jistě si vzpomene na episodu, jak cestovatelé narazili v neobývané zasněžené pláni na stopy:

„To jsou naše stopy, přátelé,“ prohlásil doktor. „Zabloudili jsme v mlze a vrátili jsme se ke svým vlastním stopám . . .“

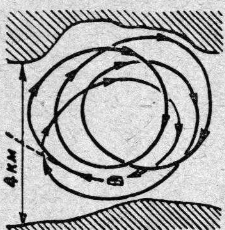
Klasický popis podobného bloudění v kruhu nám zanechal L. N. Tolstoj v „Hospodáři a čeledínu“:

„Vasilij Andrevič hnal koně tam, kde z jakýchsi důvodů očekával les a strážní budku. Sníh mu zaslepil oči a zdálo se, že jej chce vítr zastavit, ale on se nahnul k šíji a neustále koně popoháněl.

Pět minut cválal, jak se mu zdálo, přímo, ale neviděl nic než koně a bílou pláň.

Najednou se před ním něco začernalo. Srdce mu radostí poskočilo a přicválal k tomu, v čem už viděl stěny domů vesnice . . . Ale byl to jen černobýl, klátící se ve vichřici, který přinutil Vasilije Andreviče odchýlit se od původního směru. A začal znovu rychle hnát koně, nepozoruje, že na cestě k černobýlu zcela změnil dřívější směr.

Znovu se před ním něco začernalo. Znovu to byla mez zarostlá černobýlem. A znovu to byla buřeň kolébající se ve větru. Kolem něho vedla koňská, větrem zanešená stopa. Vasilij Andrevič se zastavil, nahnul se a zadíval: byla to koňská stopa zavátá sněhem a větrem. Nemohla být nikoho jiného než jeho vlastní. Zřejmě kroužil kolem dokola po nevelké ploše.“



Obr. 77. Schema bloudění tří chodců.

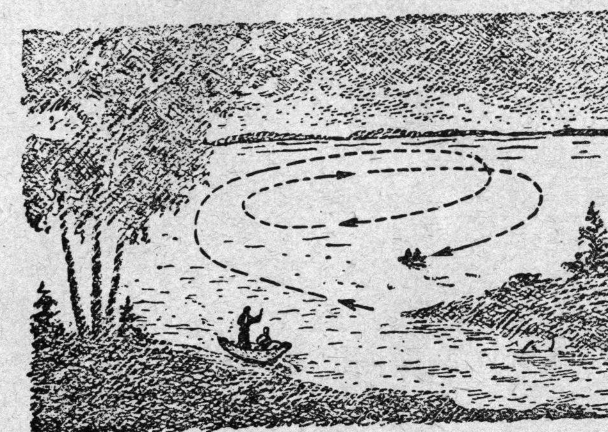
Norský fysiolog Gulberg, který se věnoval speciálnímu výzkumu kroužení (roku 1896), nashromáždil řadu pozorně prozkoumaných údajů o podobných případech. Uvedeme dva příklady.

Tři chodci se rozhodli za noci, kdy padal sníh, opustit útulnu a vyjít z doliny široké 4 km, aby došli k svému domu stojícímu ve směru, který je na přiloženém obrázku vyznačen čárou (obr. 77). Při chůzi se neustále odkláněli vpravo, po křivce označené šipkou. Když prošli jistou vzdálenost, soudili podle času, že došli k cíli, ale ve skutečnosti stáli u útulny, kterou opustili. Vydali se na cestu po druhé, odchýlili se ještě více a znovu se vrátili k výchozímu místu. To se opakovalo po třetí a po čtvrté . . . V beznaději se pokusili učinit pátý pokus, avšak se stejným výsledkem. Po pátém pokusu se vzdali dalších pokusů vyjít z doliny a vyčkali rána.

Ještě nesnadnější je zachovat přímý směr na moři za temné bezhvězdné noci nebo za husté mlhy. Byl zaznamenán případ, jeden z mnoha, kdy veslaři, kteří se rozhodli přeplout za mlhy průliv široký 4 km, byli dvakrát u protějšího břehu, ale nedostali se na něj: nevědomky opsali

dva kruhy a vystoupili nakonec v místě, odkud původně odrazili od břehu (obr. 78).

Totéž se stává také zvířatům. Polární cestovatelé vypravují o kruzích, které opisují v zasněžených pláních zvířata, zapřažená do saní. Psi puštění do vody se zavázanýma očima, plavou rovněž v kruhu. V kruhu letí také oslepení



Obr. 78. Jak pluli veslaři na protilehlý břeh za mlhy.

ptáci. Štvaná zvířata, která ztratila ze strachu schopnost orientace, neutíkají po přímce, nýbrž po kružnici.

Zoologové stanovili, že pulci, krabi, medusy, dokonce i mikroskopičtí prvoci v kapce pohybují se v kruhu.

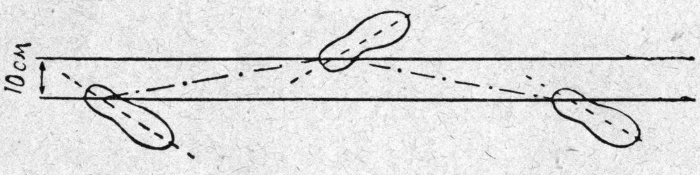
Otázka okamžitě ztratí obklopující ji tajemství, když ji správně rozebereme.

Neotážeme se na to, proč se zvířata pohybují v kruhu, nýbrž na to, co je nutné, aby se pohybovala v přímce.

Vzpomeňme si, jak se pohybuje naložené dětské autíčko. Stává se, že autíčko nejede rovně, ale odchyluje se na stranu.

V tomto pohybu po oblouku nevidí nikdo nic záhadného, každý se dovtípí, čím je to způsobeno; zřejmě tím, že pravá kola nejsou stejně velká jako levá.

Je pochopitelné, že také živý tvor se může pohybovat bez pomoci očí přímo, jestliže svaly pravé strany a levé strany pracují naprosto stejně. Ale jde o to, že symetrie lidského a zvířecího těla není dokonalá. U většiny lidí a zvířat jsou svaly pravé strany těla vyvinuty jinak, než svaly levé strany. Je přirozené, že chodec, který vykročí pravou nohou o trochu dále než levou, musí se zatáčet vlevo. Stejně i veslař za mlhy, zbavený možnosti orientace, bude se nutně zatáčet vlevo, jestliže jeho pravá ruka zabírá silněji než levá. Taková je geometrická nutnost.



Obr. 79. Vzdálenosti stop pravé a levé nohy při chůzi.

Představte si na příklad, že člověk udělá levou nohou krok o milimetr delší než pravou. Když udělal každou nohou tisíc kroků, opíše levou nohou dráhu o 1000 mm, t. j. o celý metr delší než pravou. Na rovnoběžných přímkách toho není možno dosáhnout, ale je to docela snadno uskutečnitelné na soustředných kružnicích.

Když rozebereme dříve popsané kroužení v zasněžené dolině, můžeme vypočíst oč větší krok dělala levá noha než pravá (jelikož se cesta točila doprava, je jasné, že delší kroky dělala levá noha). Vzdálenost mezi čarami stop pravé a levé nohy při chůzi (obr. 79) je rovna přibližně 10 cm, t. j. 0,1 m. Když člověk opisuje plný kruh, jeho pravá noha projde dráhu $2\pi R$ a levá $2\pi R$ $(R + 0{,}1)$, kde R je poloměr tohoto kruhu v metrech. Rozdíl $2\pi(R + 0{,}1) - 2\pi R = 2\pi\, 0{,}1$, t. j. 0,62 m, neboli 622 mm, vznikl z rozdílu mezi délkou levého a pravého kroku, opakovaného tolikoná-

sobně, kolik bylo učiněno kroků. Na obr. 77 lze odůvodnit, proč chodci opisovali kruhy o průměru přibližně 3,5 km, t. j. o délce přibližně 10 000 m. Při střední délce kroku 0,7 m bylo na celé délce cesty učiněno $\frac{10\,000}{0{,}7} = 14\,000$ kroků; z nichž 7000 pravou nohou a stejný počet levou nohou. Zjistili jsme, že 7000 „levých" kroků je o 620 mm delších než „prvých", čili méně než 0,1 mm. Hle, jak mizivý rozdíl v krocích stačí, aby vyvolal tak překvapivý výsledek.

Poloměr kruhu, který chodec opíše, závisí na rozdílu délek „pravého" a „levého" kroku. Tuto závislost lze snadno stanovit. Počet kroků, na dráze celého kruhu, při délce kroku 0,7 m, je roven $\frac{2\pi R}{0{,}7}$, kde R je poloměr kruhu v metrech; z nich je „levých" kroků $\frac{2\pi R}{2 \cdot 0{,}7}$ a stejný počet „pravých". Když znásobíme tento počet velikostí rozdílu x délky kroků, dostaneme rozdíl délek soustředěných kruhů, které opíše levá a pravá noha, t. j.

$$\frac{2\pi Rx}{2 \cdot 0{,}7} = 2\pi \cdot 0{,}1 \text{ čili } Rx = 0{,}14,$$

kde R a x je v metrech.

Z téhož jednoduchého vzorce snadno vypočteme poloměr kruhu, známe-li rozdíl kroků a naopak. Na příklad pro účastníky pokusu na náměstí sv. Marka v Benátkách můžeme stanovit největší velikost poloměru kruhů, které opsali při chůzi. Opravdu, jelikož žádný z nich nedošel k průčelí DE budovy (obr. 76), můžeme z ramen $AC = 41$ m a BC, které nepřesahovalo 175 m, vypočítat maximální poloměr oblouku AB. Stanovíme jej z rovnice:

$$2R = \frac{BC^2}{AC} = \frac{175^2}{41} = 750 \text{ m},$$

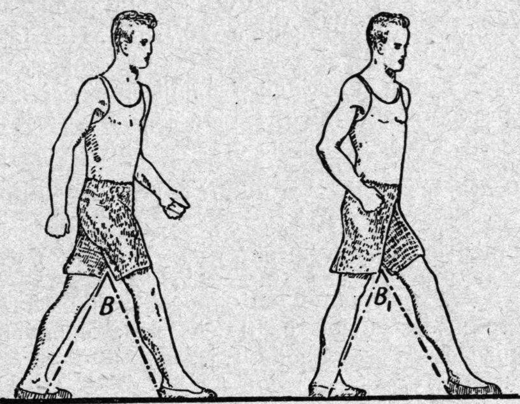
odkud maximální poloměr R bude kolem 370 m.

Nyní můžeme stanovit z dříve odvozeného vzorce $Rx = 0{,}14$ nejmenší velikost rozdílu délky kroků:

$$370\,x = 0{,}14, \text{ odkud } x = 0{,}4 \text{ mm.}$$

Rozdíl v délce pravých a levých kroků u účastníků pokusu byl větší než 0,4 mm.

Někde se můžeme dočíst, že kroužení při chůzi naslepo závisí na rozdílu v délce pravé a levé nohy: jelikož levá noha



Obr. 80. Je-li úhel každého kroku stejný, budou také kroky stejné.

je u většiny lidí delší než pravá, musí se lidé při chůzi nutně odklánět vpravo od přímého směru. Takové objasnění se zakládá na geometrickém omylu. Rozhodující je délka kroků a nikoli nohou. Z obr. 80 je jasné, že při existenci rozdílu v délce nohou můžeme přesto dělat stejné kroky, vysuneme-li při chůzi každou nohu o stejný úhel, t. j. kráčíme-li tak, aby $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$. Jelikož při tom je vždy $A_1 B_1 = AB$ a $B_1 C_1 = BC$, je také $\triangle A_1 B_1 C_1 = \triangle ABC$, tedy také $AC = C_1 A_1$. Naopak, při přesně stejné délce nohou mohou být kroky různě dlouhé, jestliže vysouváme jednu nohu dále než druhou.

Ze stejného důvodu musí veslař, který zabírá levou rukou silněji než pravou, nutně vést loď po kružnici, zahýbaje

doleva. Zvířata, která dělají nestejně dlouhé kroky pravýma a levýma nohama, nebo ptáci, kteří nestejně mávají pravým a levým křídlem, musí se rovněž pohybovat po kruhu vždy, když nemají možnost kontrolovat přímočarý směr zrakem. Také zde stačí nepatrný rozdíl v síle rukou, nohou nebo křídel.

Při takovém pohledu na věc ztrácejí dříve uvedené fakty svou tajemnost a stávají se zcela přirozenými. Bylo by naopak podivné, kdyby lidé a zvířata mohli zachovat přímý směr bez kontroly očima. Vždyť nutnou podmínkou pro to je přísná geometrická symetrie těla, absolutně nemožná v živé přírodě. Nejmenší odchylka od matematicky dokonalé symetrie má za následek nevyhnutelný pohyb po oblouku. Divné není to, čemu se divíme, nýbrž to, že jsme byli schopni považovat to za divné.

Neschopnost udržet přímou dráhu nezpůsobuje člověku žádných podstatných obtíží: kompas, cesty a mapy jej chrání ve většině případů před důsledky tohoto nedostatku.

Avšak u zvířat, zejména takových, která obývají pouště, stepi a nekonečné mořské prostory, je nesymetrie těla, která je nutí opisovat kruhy místo přímek, důležitým životním faktorem. Neviditelným řetězem je doslova přikovává k místu narození a zbavuje je možnosti podstatně se od něho vzdálit. Lev, který se odváží dále do pouště, se nevyhnutelně vrací zpět. Čajky, které opustí rodné skály a odletí do širokého moře, musí se vrátit k hnízdu (tím záhadnější jsou daleké lety ptáků, kteří protínají přímým směrem kontinenty a oceány).

Cesta přes pól

Jistě si vzpomínáte na slavný přelet Hrdiny Sovětského svazu M. M. Gromova a jeho druhů z Moskvy do San Joacinto přes Severní pól, kdy dosáhl časem 62 hod. 17 minut dvou světových rekordů v letu bez přistání: největší přímou vzdálenost (10 200 km) a nejdelší celkovou délku letu (11 500 km).

Co myslíte, otáčelo se letadlo hrdinů, kteří přeletěli pól kolem zemské osy spolu se Zemí? S touto otázkou se často setkáváme, ale zřídka dostaneme správnou odpověď. Každé letadlo, tedy také letadlo prolétající pól, musí se nutně účastnit otáčení zeměkoule, neboť letící letadlo je odděleno pouze od pevné části zeměkoule, avšak zůstává v atmosféře, takže se s ní účastní otáčení.

Letadlo při přeletu z Moskvy do Ameriky přes pól se otáčelo současně se Zemí kolem zemské osy. Jaká byla dráha letu?

Abychom mohli správně odpovědět na tuto otázku, je třeba mít v patrnosti, že když říkáme „těleso se pohybuje", označujeme tím změnu polohy daného tělesa vůči nějakým jiným tělesům. Otázka dráhy a pohybu vůbec nebude mít smyslu, jestliže při tom není udán (nebo se alespoň mlčky nepředpokládá), jak říkají matematikové, jistý souřadný systém neboli jednoduše těleso, vůči kterému vztahujeme pohyb.

Letadlo M. M. Gromova se pohybovalo vůči Zemi podél poledníku Moskvy. Poledník Moskvy, stejně jako každý jiný, se otáčí spolu se Zemí kolem zemské osy; otáčelo se i letadlo, které letělo podél poledníku, ale na tvaru dráhy pozemského pozorovatele se tento pohyb neprojeví, neboť ten probíhá už vůči nějakému jinému tělesu, nikoli Zemi.

Pro nás, kteří jsme pevně připoutáni k Zemi, dráha slavného přeletu přes pól, je oblouk po největší kružnici, počítáme-li, že se letadlo pohybovalo přesně po poledníku a bylo při tom ve stále stejné vzdálenosti od středu Země.

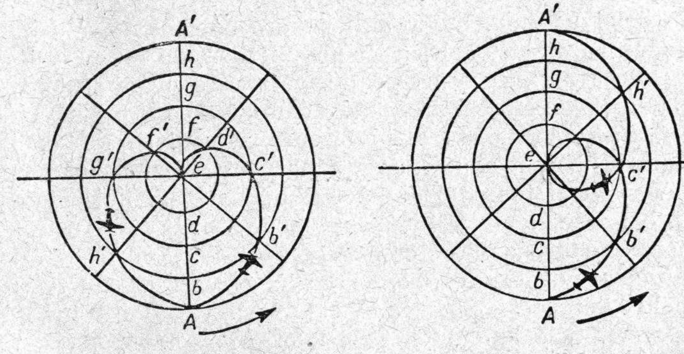
Nyní budeme klást otázku následujícím způsobem: máme letadlo pohybující se vůči Zemi a víme, že se letadlo spolu se Zemí otáčí kolem zemské osy, t. j. máme pohyb letadla a Země vůči nějakému třetímu tělesu; jaká bude dráha přeletu pro pozorovatele na tomto třetím tělesu?

Zjednodušíme tento trochu neobvyklý problém. Polární oblast naší planety si představíme jako plochý kotouč, který leží v rovině kolmé k zemské ose. Tato myšlená plocha bude pro nás oním „tělesem", vůči kterému se otáčí kotouč zemské osy, a podél jednoho průměru kotouče se

rovnoměrně pohybuje dětský automobil, který nám představuje letadlo letící podél poledníku přes pól.

Jakou čáru opíše na naší rovině automobil (přesněji řečeno jeden z jeho bodů, na příklad jeho těžiště)?

Čas, za který automobil projde z jednoho konce průměru na druhý, závisí na rychlosti.



Obr. 81. Křivky, které opíše na nehybné ploše bod, který koná současně dva pohyby.

Budeme uvažovat tyto tři případy:

autíčko urazí dráhu 1. za 12 hodin,
2. za 24 hodin,
3. za 48 hodin.

Kotouč vykoná ve všech případech jednu plnou obrátku za 24 hod.

První případ (obr. 81). Autíčko urazí délku průměru kotouče za 12 hodin. Kotouč vykoná za tuto dobu půl obrátky. t. j. otočí se o 180^0 a body A a A' si vymění místa. Na obr, 81 je průměr rozdělen na osm stejných dílů, z nich každý urazí autíčko za $12 : 8 = 1{,}5$ hod. Prozkoumáme, kde se bude nalézat autíčko za 1,5 hod. po začátku pohybu. Kdyby se kotouč neotáčel, autíčko, které vyrazilo z bodu A, dostalo by se za 1,5 hod. do bodu b. Ale kotouč se otáčí a za 1,5 hod. urazí $360^0 : 8 = 45^0$. Při tom se bod b kotouče dostane do bodu b'. Pozorovatel, který stojí na kotouči a otáčí se spolu s ním, by nezpozoroval jeho otáčení a viděl by pouze, že se autíčko posunulo z bodu A do bodu b. Ale pozorovatel, který se nalézá mimo kotouč a neúčastní se jeho otáčení, viděl by něco jiného: pro něj by se autíčko posunulo po křivce z bodu A do bodu b'. Za další 1,5 hod. by pozorovatel, stojící mimo kotouč, uviděl autíčko v bodě c'. Po další 1,5 hod. by se autíčko pro něj pohybovalo po oblouku c' d', a za dalších 1,5 hod. by dosáhlo středu e.

Pozorovatel, který by pokračoval ve sledování autíčka, spatřil by něco zcela neočekávaného: autíčko opíše křivku e, f', g', h', A', a cesta, ať je to sebe více podivné, neskončí v protilehlém bodě poloměru, nýbrž ve výchozím.

Vysvětlení tohoto neočekávaného zjevu je velmi jednoduché: za šest hodin pohybu autíčka po druhé polovině průměru se stačí poloměr otočit spolu s kotoučem o 180° a zaujmout polohu první poloviny průměru. Autíčko se otáčí spolu s kotoučem, dokonce i v okamžiku, kdy projíždí jeho středem. Celý automobil se nemůže vměstnat do středu kotouče; se středem se ztotožní pouze jeden jeho bod a v příslušném okamžiku se točí celý spolu s kotoučem kolem této osy. Totéž se musí stát také s letadlem v okamžiku, kdy přelétá nad pólem. Dráha autíčka po průměru kotouče z jednoho konce na druhý se jeví různým pozorovatelům různá. Tomu, kdo stojí na kotouči a otáčí se s ním, se cesta zdá být přímkou. Ale nehybný pozorovatel, který se neúčastní otáčení kotouče, vidí pohyb vozíku po křivce, připomínající tvar srdce, zobrazené na obr. 81.

Takovou křivku by viděl také každý z nás, kdyby pozoroval na příklad ze středu Země let letadla vůči myšlené rovině, kolmé k zemské ose, za fantastického předpokladu, že by Země byla průzračná, že bychom se nemuseli účastnit jejího pohybu, a přelet přes pól pozorovaného letadla by trval 12 hod.

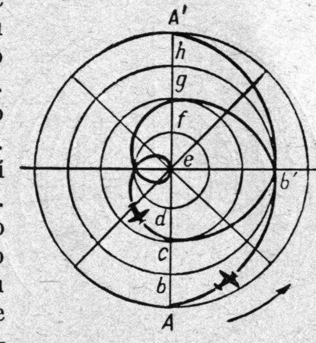
Máme před sebou zajímavý příklad skládání dvou pohybů.

Přelet přes pól z Moskvy do protilehlého bodu poledníku netrval ve skutečnosti 12 hodin, proto se nyní zastavíme

ještě u rozboru dalšího přípravného úkolu stejného druhu.

Druhý případ (obr. 81 vpravo). Autíčko urazí délku průměru za 24 hod. Za tuto dobu vykoná kotouč plnou obrátku. Dráha autíčka nabude pro nehybného pozorovatele tvaru zobrazeného na obr. 81 vpravo.

Třetí případ (obr. 82). Kotouč vykoná stejně jako dříve plnou obrátku za 24 hod., ale autíčko se pohybuje po průměru 48 hod.



Obr. 82. Ještě jedna křivka, která vznikne složením dvou pohybů.

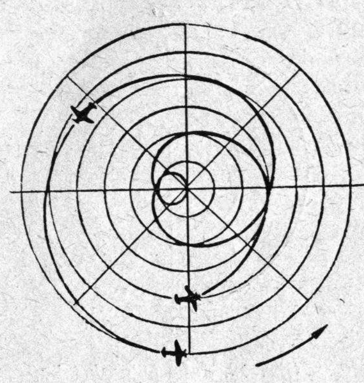
V tomto případě urazí autíčko 1/8 průměru za 48 : 8 = 6 hod. Za šest hodin se kotouč stačí otočit o čtvrtinu obrátky, t. j. o 90°. Proto se za šest hodin po začátku pohybu dostane autíčko na průměru (obr. 82) do bodu b, ale otáčení kotouče jej přenese do bodu b'. Po dalších šesti hodinách dospěje autíčko do bodu g atd. Za 48 hodin urazí autíčko celý průměr a kotouč vykoná dvě plné obrátky. Výsledek skládání těchto dvou pohybů se bude jevit nehybnému pozorovateli jako křivka zobrazená na obr. 82 plnou čarou.

Právě rozebraný případ nás přiblížil ke skutečným podmínkám přeletu pólu. Na přelet z Moskvy na pól potřeboval M. M. Gromov přibližně 24 hodin, proto pozorovatel, který by se nalézal ve středu Země, viděl by tuto část dráhy jako čáru takřka totožnou s první polovinou křivky na obr. 82. Pokud jde o druhou část letu M. M. Gromova, trvala přibližně jedenapůlkrát déle. Mimo to vzdálenost od pólu do San Joacinta je rovněž jedenapůlkrát delší než vzdálenost z Moskvy k pólu. Proto by se dráha druhé části cesty jevila nehybnému pozorovateli jako čára stejného tvaru v první části cesty, avšak jedenapůlkrát delší.

Celkový vzhled dráhy přes pól je znázorněn na obr. 83.

Mnohé čtenáře může snad překvapit okolnost, že počáteční a konečné body na tomto nákresu jsou v tak blízkém sousedství. Nesmí se však pouštět se zřetele, že nárys nepředstavuje současnou polohu Moskvy a San Joacinta, nýbrž polohy oddělené časovým intervalem 2½ dne.

Přibližně takový tvar by měla dráha přeletu M. M. Gromova přes pól, kdyby bylo možno pozorovat let na příklad ze středu zeměkoule. Jste oprávněni nazvat tento složitý závit skutečnou drahou přeletu pólu na rozdíl od relativního obrazu na mapách? Nikoli, tento pohyb je rovněž relativní; vztahuje se k jistému tělesu, které se neúčastní otáčení Země kolem osy, stejně jako obyčejný obraz dráhy přeletu se vztahuje k povrchu otáčející se Země.



Obr. 83. Dráha přeletu Moskva–San Joacinto, jak by se jevila pozorovateli neúčastnícímu se rotace Země.

Kdybychom mohli pozorovat tentýž let s Měsíce nebo se Slunce[1], dostali bychom nové tvary dráhy.

Měsíc sice nesdílí otáčení Země kolem její osy, avšak obíhá kolem naší planety v měsíčním intervalu. Za 62 hodin přeletu z Moskvy do San Joacinta opsal by Měsíc kolem Země oblouk 30°, což by se nutně projevilo na dráze letu pro pozorovatele na Měsíci. Na tvaru dráhy letadla pozorovaném se Slunce by se projevil ještě třetí pohyb – oběh Země kolem Slunce.

„Neexistuje pohyb osamoceného tělesa, existuje pouze relativní pohyb dvou těles vůči sobě“ – říká B. Engels v Dialektice přírody.

Právě probraný případ nás o tom názorně přesvědčuje.

[1] T. j. vztahovat jej na souřadný systém spojený s Měsícem nebo se Sluncem.

OBSAH

UNIVERSITA VOJÁKA

populárně vědecká knižnice

1. *M. F. Subbotin:* VZNIK A STÁŘÍ ZEMĚ. 9 Kčs
2. *A. A. Malinovskij:* STAVBA A ČINNOST LIDSKÉHO TĚLA. Rozebráno
3. *B. A. Voroncov-Veljaminov:* JAK VZNIKL VESMÍR. 8 Kčs
4. *M. Markov:* RADIO V NAŠICH SLUŽBÁCH. Rozebr.
5. *S. M. Iljašenko:* RYCHLEJŠÍ ZVUKU. Rozebráno
6. *G. A. Šmidt:* PODÍL PRÁCE NA VÝVOJI ČLOVĚKA. 9 Kčs
7. *N. V. Kolobkov:* POČASÍ A JEHO PŘEDVÍDÁNÍ. Rozebr.
8. *V. D. Zacharčenko:* OD SAMOHYBU K DNEŠNÍM STROJŮM. Rozebráno
9. *A. I. Oparin:* VZNIK A VÝVOJ ŽIVOTA. 13 Kčs
10. *A. S. Fedorov:* FILM V NAŠICH SLUŽBÁCH. Rozebráno
11. *A. I. Lebedinskij:* VE SVĚTĚ HVĚZD. Rozebráno
12. *N. M. Maksimov:* SUCHA A BOJ PROTI NIM. 9 Kčs
13. *G. A. Zisman:* SVĚT ATOMŮ. 14 Kčs
14. *J. M. Kušnir:* ELEKTRONOVÝ MIKROSKOP. Rozebr.
15. *V. A. Obručev:* JAK VZNIKLY PEVNINY A HORY. Rozebráno
16. *V. A. Mezencev:* ELEKTRICKÝ ZRAK. Rozebráno.
17. *I. S. Stěkolnikov:* BOUŘE, BLESKY A HROM. 12 Kčs
18. *V. D. Ochotnikov:* MAGNETY. 7 Kčs
19. *K. F. Ogorodnikov:* NA ČEM SE DRŽÍ ZEMĚ. 9 Kčs
20. *I. F. Polak:* STAVBA A SLOŽ[illegible]NÍ VESMÍRU. 8 Kčs
21. *B. B. Kudrjavcev:* POHYB MOLEK[illegible]. 7 Kčs
22. *V. G. Bogorov:* PODMOŘSKÝ SV[illegible] 8 Kčs
23. *I. F. Polak:* ČAS A KALENDÁŘ. Rozebráno
24. *G. P. Gorškov:* ZEMĚTŘESENÍ. 9 Kčs
25. *V. Schreiber:* HYGIENA VOJÁKA. 12 Kčs
26. *B. N. Suslov:* ZVUK A SLUCH. 9 Kčs
27. *R. V. Kunickij:* DEN A NOC. ROČNÍ OBDOBÍ. 7 Kčs
28. *A. S. Fedorov:* PROČ REZAVĚJÍ KOVY [illegible] Kčs
29. *G. A. Aristov:* SLUNCE. 9 Kčs
30. *N. G. Novikovová:* NEOBVYKLÉ ÚKAZY NA OBLO[illegible] 9
31. *J. I. Perelman:* GEOMETRIE V PŘÍRODĚ. 25 Kčs
32. *J. Hofman:* O ŽIVOTĚ ROST[illegible]N. V tisku.
33. *O. B. Lepešinská:* CO VÍME O VZNIKU BUNĚK? V tisku
34. *B. B. Kudrjavcev:* NESLYŠITELNÉ ZVUKY. V tisku
35. *V. S. Sukorukich:* MIKROSKOP A DALEKOHLED. V tisku

NAŠE VOJSKO VYDAVATELSTVÍ ČS. BRANNÉ MOCI
Praha II, Na Děkance 3.

30103/2 - Cena šité brožury 25 Kčs.