Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAk02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Vlastnosti binárních operací I.

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAk02 (jaro 2020)

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Prezentace č. 3

Vlastnosti binárních operací

Následující materiál nás seznámí s vlastnostmi binárních operací školské matematiky v číselných množinách. Připomeňme označení pro číselné množiny:

$\mathbb{N}$ - {1, 2, 3, 4, …} - množina všech přirozených čísel

$\mathbb{N}_0$ - {0, 1, 2, 3, 4, …} - množina všech přirozených čísel s nulou (množina všech nezáporných celých čísel)

$\mathbb{C}$ - {…, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …} - množina všech celých čísel

$\mathbb{Q}$ - množina všech racionálních čísel

$\mathbb{R}$ - množina všech reálných čísel

Vlastnosti binárních operací

- *Definice 2*: Binární operace ○ v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in M \times M$, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná na** množině M). Značíme **ND**.

  symbolicky: $\boxed{(\forall\, x,y \in M)(\exists\, z \in M)[x \circ y = z]}$

- *Příklad 2:*
  - operace sčítání (**+**)……..v množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ je **ND** $(\forall\, x,y \in \mathbb{N})(\exists\, z \in \mathbb{N})[x + y = z]$ ✓
  - operace odčítání (**-**)……v množině $\mathbb{N}$ není **ND** $(\forall\, x,y \in \mathbb{N})(\exists\, z \in \mathbb{N})[x - y = z]$ ✗

    v množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ je **ND** $(\forall\, x,y \in \mathbb{C})(\exists\, z \in \mathbb{C})[x - y = z]$ ✓
  - operace násobení (**•**)…..v množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ je **ND** $(\forall\, x,y \in \mathbb{N})(\exists\, z \in \mathbb{N})[x \bullet y = z]$ ✓

MUNI

Vlastnosti binárních operací

- *Definice 2*: Binární relace $\circ$ v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in M \times M$, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná na** množině M). Značíme **ND**.

    symbolicky: $(\forall\, x,y \in M)(\exists\, z \in M)[x \circ y = z]$

- *Příklad 2:*
    - operace dělení (**:**).........v množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ není **ND** $(\forall\, x,y \in \mathbb{N})(\exists\, z \in \mathbb{N})[x : y = z]$ ✗

      v množině $\mathbb{Q}$ - {0}, $\mathbb{R}$ - {0} je **ND** $(\forall\, x,y \in \mathbb{Q} - \{0\})(\exists\, z \in \mathbb{Q} - \{0\})[x : y = z]$ ✓

MUNI

Vlastnosti binárních operací

- *Definice 3*: Binární operace ○ definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

  symbolicky: $(\forall\, x,y \in M)[x \circ y = y \circ x]$ Značíme **K.**

- *Příklad 3:*
  - operace sčítání (**+**)……na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ je **K** $(\forall\, x,y \in \mathbb{N})[x + y = y + x]$ ✓
  - operace odčítání (**-**)….na množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ není **K** $(\forall\, x,y \in \mathbb{C})[x - y = y - x]$ ✗
  - operace násobení (**•**)…na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ je **K** $(\forall\, x,y \in \mathbb{N}\ [x \bullet y = y \bullet x]$ ✓
  - operace dělení (**:**)……na množině $\mathbb{Q}$ - {0}, $\mathbb{R}$ - {0} není **K** $(\forall\, x,y \in \mathbb{Q} - \{0\})[x : y = y : x]$ ✗

MUNI

Vlastnosti binárních operací

- *Definice 4*: Binární operace ○ definovaná na množině M (je ND), se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

  symbolicky: $\boxed{(\forall\, x, y, z \in M)[(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)]}$ Značíme **A**.

- *Příklad 4:*
  - operace sčítání (**+**)……na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ je **A** $(\forall\, x,y, z \in \mathbb{N})[(x + y) + z = x + (y + z)]$ √
    - $(3+2)+4=3+(2+4)$
  - operace odčítání (**-**)….na množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ není **A** $(\forall\, x,y, z \in \mathbb{C})[(x - y) - z = x - (y - z)]$ X
    - $(8-4)-3 = 8-(4-3)$
  - operace násobení (**•**)…na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ je **A** $(\forall\, x,y, z \in \mathbb{N})[(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)]$ √
  - operace dělení (**:**)……na množině $\mathbb{Q}$ - {0}, $\mathbb{R}$ - {0} není **A** $(\forall\, x,y, z \in \mathbb{Q} - \{0\})\ [(x : y) : z = x : (y : z)]$ X

M U N I

- *Definice 5*: Nechť je v množině M (!) definována binární operace ○. Jestliže existuje prvek $e \in$ M, pro který platí:

$$(\forall\, x \in M)[x \circ e = e \circ x = x],$$

pak prvek nazýváme **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci ○. Tuto vlastnost nazýváme existence neutrálního prvku množiny M vzhledem k operaci ○. Značíme **EN**.

symbolicky: $\boxed{(\exists e \in M)(\forall\, x \in M)[x \circ e = e \circ x = x]}$

- *Příklad 5:*
  - operace sčítání (**+**)…na množině $\mathbb{N}$ nemá vlastnost **EN** (neexistuje přirozené číslo $e \in \mathbb{N}$, takové, aby pro všechna přirozená čísla $x \in \mathbb{N}$ platilo $x + e = e + x = x$). ✗
  - operace sčítání (**+**)…na množině $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ má vlastnost **EN** (existuje přirozené číslo $e \in \mathbb{N}$, takové, že pro všechna přirozená čísla $x \in \mathbb{N}$ platí $x + e = e + x = x$. Toto číslo je $e = 0$, *tedy* $x + 0 = 0 + x = x$) ✓
  - operace odčítání (**-**)….na množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nemá vlastnost **EN** (neexistuje např. celé číslo $e \in \mathbb{C}$, takové, aby pro všechna celá čísla $x \in \mathbb{C}$ platilo $x - e = e - x = x$). ✗
  - operace násobení (**•**)…na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ má vlastnost **EN** (existuje např. přirozené číslo $e \in \mathbb{N}$, takové, že pro všechna přirozená čísla $x \in \mathbb{N}$ platí $x \bullet e = e \bullet x = x$. Toto číslo je $e = 1$, *tedy* $x \bullet 1 = 1 \bullet x = x$) ✓

MUNI