# Operace dané předpisem

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Prezentace č. 8

# Operace dané předpisem

- V předchozích prezentacích jste pracovali s operacemi zadanými pomocí tabulky, určovali jste vlastnosti těchto operací na množině a následně i typ algebraické struktury.
- To stejné Vás čeká i v této prezentaci, ale operace budou zadané určitým předpisem, například $x * y = 2xy - 3$.
- U operace na množině vždy určíme, zda platí vlastnosti **ND** (neomezeně definovaná operace), **K** (komutativita) , **A** (asociativita) , **EN** (existence neutrálního prvku) , **EI** (existence inverzního prvku pro každý prvek množiny) a **ZR** (řešitelnost základních rovnic).
- Na základě vlastností algebraické struktury (M,*), kde * je operace definovaná na neprázdné množině M, určíme její typ: grupoid, pologrupa, grupa, komutativní grupoid, komutativní pologrupa, komutativní grupa.

**Příklad 1:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace o definovaná na množině **C** (celá čísla, sami si můžete značit **Z**, prezentace se opírají o značení ve studijním materiálu). Určete typ algebraické struktury (**C**, o).

o={[(x,y),z] ∈ $\mathbf{C}^2$x **C**: z=x+y+1}

*Poznámka:*
o={[(x,y),z] ∈ $\mathbf{C}^2$x **C**: z=x+y+1} lze také zapisovat
o={[x,y,z] ∈ $\mathbf{C}^3$: z=x+y+1}, případně zkráceně xoy=x+y+1.

**Příklad 1:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace o definovaná na množině **C** (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (**C**, o).

o={[(x,y),z] ϵ $\mathbf{C}^2$x **C**: z=x+y+1}

**Řešení:**

Postupně budeme určovat platnost jednotlivých vlastností, budeme se přitom opírat o známé vlastnosti sčítání.

- Operace o je jistě ND, protože pokud sečteme jakákoli dvě celá čísla a k součtu přičteme 1, výsledkem bude opět celé číslo. Zapsáno symbolicky: ∀x,y ϵ **C**: x+y+1 ϵ **C**
- Ptáme se, jestli ∀x,y ϵ **C**: xoy=yox. Tedy zda x+y+1=y+x+1. Protože ale víme, že sčítání ke komutativní, můžeme říci, že daná rovnost platí. Operace o je na množině **C** komutativní.
- Pro ověření asociativity musíme zjistit, zda ∀x,y,z ϵ **C**: xo(yoz)=(xoy)oz. Tuto vlastnost si musíme ověřit rozepsáním.
  xo(yoz)=xo(y+z+1)=x+y+z+1+1=x+y+z+2
  (xoy)oz=(x+y+1)oz=x+y+1+z+1=x+y+z+2
  Vidíme, že zadaná operace je na celých číslech asociativní.

**Příklad 1:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace o definovaná na množině **C** (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (**C**, o).

o={[(x,y),z] ∊ $\mathbf{C}^2$x **C**: z=x+y+1}

**Řešení:**

Už víme, že je operace o na celých číslech ND, K a A. Ověřujeme další vlastnosti.

- Abychom dokázali existenci neutrálního prvku, musíme ho najít. Pro neutrální prvek e platí: ∀x ∊ **C**: eox=xoe=x. Nám stačí ověřit pouze jednu rovnost, protože víme, že operace o je komutativní. Vezměme si rovnost xoe=x a rozepišme operaci x+e+1=x. Z této rovnosti plyne e=-1, tato hodnota patří do **C**, a tak jsme nalezli neutrální prvek.
- Připomeňme si inverzní prvky – (∀x ∊ **C**)(∃$\overline{x}$ ∊ **C**): xo $\overline{x}$ = $\overline{x}$ ox=e. Opět nám díky komutativitě stačí pouze jedna rovnost, v níž rozepíšeme operaci a dostáváme x+ $\overline{x}$ +1=-1. Po úpravě dostáváme $\overline{x}$ =-2-x, což je pro každé celé číslo x opět celé číslo. Ke každému prvku tedy existuje v **C** prvek inverzní.
- Zbývá ověřit vlastnost ZR. Tato vlastnost říká, že (∀a,b ∊ **C**)(∃x,y ∊ **C**): aox=b ∧ yoa=b. Po rozepsání operací dostáváme a+x+1=b, y+a+1=b. Jistě pro každá celá čísla a, b taková celá čísla x, y můžeme nalézt, vlastnost ZR tedy platí.

**Příklad 1:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace o definovaná na množině **C** (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (**C**, o).

o={[(x,y),z] ϵ $\mathbf{C}^2$x **C**: z=x+y+1}

**Řešení:**

Zjistili jsme, že operace o na celých číslech má všechny uvedené vlastnosti. Algebraická struktura (**C**, o) je komutativní grupa.

MUNI

**Příklad 2:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace * definovaná na množině **C** (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (**C**, *).

$* = \{[(x,y),z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = 2x + 2y\}$

**Příklad 2:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace * definovaná na množině **C** (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (**C**, *).

$*=\{[(x,y),z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}: z=2x+2y\}$

**Řešení:**

- Operace je ND, protože $\forall x,y \in \mathbf{C}: 2x+2y \in \mathbf{Z}$.
- Operace je K, protože $\forall x,y \in \mathbf{C}: 2x+2y=2y+2x$, tedy $x*y=y*x$.
- Ověřme asociativitu:
  $x*(y*z)=x*(2y+2z)=2x+2(2y+2z)=2x+4y+4z$
  $(x*y)*z=(2x+2y)*z=2(2x+2y)+2z=4x+4y+4z$
  Protože $x*(y*z)$ se nerovná $(x*y)*z$, operace nemá vlastnost A.
- Hledejme neutrální prvek: $\forall x \in \mathbf{C}: x*e=e*x=x$, díky K stačí ověřit jednu rovnost: $2x+2e=x$. Z rovnosti plyne, že je neutrální prvek závislý na hodnotě x, neutrální prvek ale musí být stejný pro všechna celá čísla, proto vůbec neexistuje. Operace * nemá vlastnost EN.

**Příklad 2:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace * definovaná na množině **C** (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (**C**, *).

$* = \{[(x,y),z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = 2x + 2y\}$

**Řešení:**

Již víme, že má operace * na celých číslech vlastnosti ND, K, naopak nemá vlastnosti A, EN. Ověřme zbývající vlastnosti EI, ZR.

- Pokud neexistuje neutrální prvek, nemohou existovat ani prvky inverzní. Operace * nesplňuje vlastnost EI.
- Vlastnost ZR říká, že $(\forall a,b \in \mathbf{C})(\exists x,y \in \mathbf{C})$: $a*x=b \wedge y*a=b$. Po rozepsání operací dostáváme $2a+2x=b$, $2y+2a=b$. Pokud zvolíme například $a=3$, $b=1$, nedokážeme nalézt čísla x, y splňující dané rovnosti, neexistuje celé x takové, aby $6+2x=1$. Operace * nesplňuje vlastnost ZR.

**Operace * má na množině C vlastnosti ND a K, nemá vlastnosti A, EN, EI a ZR.**
**Algebraická struktura (C, *) je komutativní grupoid.**

**Příklad 3:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace * definovaná na množině **Q** (racionální čísla). Určete typ algebraické struktury (**Q**, *).

$*=\{[(x,y),z] \in \mathbf{Q}^2 \times \mathbf{Q}: z=\frac{x+y}{2}\}$

**Příklad 4:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace * definovaná na množině **C** (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (**C**, *).

$*=\{[(x,y),z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}: z=y\}$ (neboli $x*y=y$)

**Příklad 5:**

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace * definovaná na množině **N** (přirozená čísla). Určete typ algebraické struktury (**N**, *).

$*=\{[(x,y),z] \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{N}: z=x^y\}$

**Řešení:**

Příklad 3 – má vlastnosti ND, K, ZR,
algebraická struktura je komutativní grupoid

Příklad 4 – má vlastnosti ND, A,
algebraická struktura je pologrupa

Příklad 5 – má vlastnost ND,
algebraická struktura je grupoid

Další řešené příklady naleznete ve studijních materiálech v Isu v souboru operace_predpis.pdf