

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky –
předmět IMAp02 (jaro 2020)

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Algebraické struktury se dvěma operacemi

Základy algebry a aritmetiky – předmět
IMAp02 (jaro 2020)

Prezentace č. 9



Algebraické struktury s jednou operací

Připomeňme si schéma z 5. prezentace, podle kterého rozlišujeme typ algebraické struktury (M, o) s jednou operací.

Algebraická struktura (M, o) se nazývá **GRUPOID** právě tehdy, když splňuje operace o definovaná na M vlastnosti **ND**.

	ND	A	EN	EI	K
GRUPOID	■				
POLOGRUPA	■	■			
GRUPA	■	■	■	■	
KOMUTATIVNÍ GRUPOID	■				■
KOMUTATIVNÍ POLOGRUPA	■	■			■
KOMUTATIVNÍ GRUPA	■	■	■	■	■

Pokud nesplňuje (M, o) ani vlastnost ND, nazýváme ji pouze algebraickou strukturou.

Algebraické struktury se dvěma operacemi

Definice: Na množině M jsou definovány dvě binární operace \square a \circ . Řekneme, že operace \square **je distributivní vzhledem k operaci \circ** právě tehdy, když

$$(\forall x, y, z \in M) [z \square (x \circ y) = (z \square x) \circ (z \square y)] \wedge [(x \circ y) \square z = (x \square z) \circ (y \square z)]$$

Levý distributivní zákon

Pravý distributivní zákon

Označení $\square \mathbf{D} \circ$ čteme: Platí distributivní zákon operace \square vzhledem k operaci \circ .

Příklad 1: Operace násobení (\cdot) v číselných množinách je distributivní vzhledem k operaci sčítání ($+$), tj. platí

$$(\forall x, y, z \in M) [z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y] \wedge [(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z]$$

např. pro $x = 3, y = 4, z = 2$: $\underbrace{2 \cdot (3 + 4)}_{14} = \underbrace{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4}_{14} \quad \wedge \quad \underbrace{(3 + 4) \cdot 2}_{14} = \underbrace{3 \cdot 2 + 4 \cdot 2}_{14}$

Algebraické struktury se dvěma operacemi

Definice: Na množině M jsou definovány dvě binární operace \square a \circ . Řekneme, že operace \square **je distributivní vzhledem k operaci \circ** právě tehdy, když

$$(\forall x, y, z \in M) [z \square (x \circ y) = (z \square x) \circ (z \square y)] \wedge [(x \circ y) \square z = (x \square z) \circ (y \square z)]$$

Levý distributivní zákon

Pravý distributivní zákon

Příklad 2: Operace průnik (\cap) v systémech množin je distributivní vzhledem k operaci sjednocení (\cup), tj. platí

$$(\forall A, B, C \in \mathcal{M}) [A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)] \wedge [(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)]$$

Lze dokázat na základě Vennových diagramů, viz 1. semestr.

Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, \oplus, \odot)

Budeme se dále zabývat algebraickými strukturami se dvěma binárními operacemi
 (M, \oplus, \odot)

\oplus sčítání : EN – nulový prvek (ozn. 0), $\bar{x} = -x$... opačný prvek k prvku x
$$x \oplus \bar{x} = \bar{x} \oplus x = 0$$

\odot násobení : EN – jednotkový prvek (ozn. 1), $\bar{x} = \frac{1}{x} = x^{-1}$... převrácený prvek k prvku x
$$x \odot \bar{x} = \bar{x} \odot x = 1$$

Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, \oplus, \odot)

Definice 2: Necht' M je neprázdná množina, ve které jsou definovány dvě binární operace \oplus a \odot . Algebraická struktura se dvěma binárními operacemi (M, \oplus, \odot) se nazývá **polookruh** právě tehdy, když:

1. Operace \oplus je $ND \wedge A \wedge K$ v množině M
2. Operace \odot je $ND \wedge A$ v množině M
3. Platí $\odot D \oplus$

Je-li operace \odot navíc komutativní, pak polookruh (M, \oplus, \odot) se nazývá **komutativní polookruh**.

Poznámka: Pologrupa (M, \oplus) se nazývá aditivní pologrupa

Pologrupa (M, \odot) se nazývá multiplikativní pologrupa

Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, \oplus, \odot)

Definice 3: Polokruh (M, \oplus, \odot) , jehož aditivní pologrupa (M, \oplus) je komutativní grupou, se nazývá **okruh**.

Tedy pro operace \oplus a \odot platí:

1. Operace \oplus je $ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge EI$ v množině M
2. Operace \odot je $ND \wedge A$ v množině M
3. Platí $\odot D \oplus$

Poznámka: Je-li operace \odot navíc komutativní, pak okruh (M, \oplus, \odot) se nazývá **komutativní okruh**.

Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, \oplus, \odot)

Příklad 2: Jaký typ algebraické struktury je $(\mathbb{N}, +, \cdot)$?

1. Operace $+$ je ND \wedge A \wedge K v množině \mathbb{N} (~~EN~~ \wedge ~~EA~~) $(\mathbb{N}, +)$ je komutativní polorupa
2. Operace \cdot je ND \wedge A \wedge K v množině \mathbb{N} (EN \wedge ~~EA~~) $e = \mathbf{1}$
 (\mathbb{N}, \cdot) je komutativní polorupa s neutrálním prvkem
3. Platí $\cdot \text{ D } +$ (Ukázali jsme si v 1. příkladu této prezentace)

Algebraická struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ je **komutativní polookruh s jedničkou**



Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, \oplus, \odot)

Definice 4: Necht' (M, \oplus, \odot) je okruh. Prvky $a \neq \mathbf{0}$, $b \neq \mathbf{0}$, kde $a, b \in M$, pro které platí $a \odot b = \mathbf{0}$, se nazývají **dělitelé nuly** okruhu (M, \oplus, \odot) .

Definice 5: Komutativní okruh (M, \oplus, \odot) , ve kterém neexistují dělitelé nuly, se nazývá **obor integrity**.

Definice 6: Okruh (M, \oplus, \odot) , pro který platí, že $(M - \{\mathbf{0}\}, \odot)$ je grupa, se nazývá **těleso**.

Poznámka: Je-li operace \odot navíc komutativní, pak těleso (M, \oplus, \odot) se nazývá **komutativní těleso**.

Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, \oplus, \odot)

Polookruh (komutativní)	\oplus	$ND \wedge A \wedge K$
(M, \oplus, \odot)	\odot	$ND \wedge A \wedge (K)$
		$\odot D \oplus$
Okruh (komutativní)	\oplus	$ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge EI$
(M, \oplus, \odot)	\odot	$ND \wedge A \wedge (K)$
		$\odot D \oplus$
Obor integrity	\oplus	$ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge EI$
(M, \oplus, \odot)	\odot	$ND \wedge A \wedge K$
		$\odot D \oplus$
		Neexistují dělitelé nuly ($a \neq \mathbf{0}, b \neq \mathbf{0}$, že $a \odot b = \mathbf{0}$, kde $a, b \in M$)
Těleso (komutativní)	\oplus	$ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge EI$
(M, \oplus, \odot)	\odot	$ND \wedge A \wedge (K)$
		$\odot D \oplus$
		$(M - \{\mathbf{0}\}, \odot)$ je grupa, tzn. operace \odot na množině $M - \{\mathbf{0}\}$ má vlastnosti $ND \wedge A \wedge EN \wedge EI$

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

1) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ je komutativní polookruh s jedničkou

1. Operace $+$ je ND \wedge A \wedge K v množině \mathbb{N} (~~EN~~ \wedge ~~EI~~) $(\mathbb{N}, +)$ je komutativní pogrupa

2. Operace \cdot je ND \wedge A \wedge K v množině \mathbb{N} (EN \wedge ~~EI~~) $\mathbf{e} = \mathbf{1}$

(\mathbb{N}, \cdot) je komutativní pogrupa s jedničkou

3. Platí $\cdot \text{ D } +$ (Ukázali jsme si v 1. příkladu této prezentace)

2) Jaký typ algebraické struktury je $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$?

1. Operace $+$ je ND \wedge A \wedge K v množině \mathbb{N}_0 (EN \wedge ~~EI~~) $\mathbf{e} = \mathbf{0}$

$(\mathbb{N}_0, +)$ je komutativní pogrupa s nulovým prvkem

2. Operace \cdot je ND \wedge A \wedge K v množině \mathbb{N}_0 (EN \wedge ~~EI~~) $\mathbf{e} = \mathbf{1}$

(\mathbb{N}_0, \cdot) je komutativní pogrupa s jedničkou

3. Platí $\cdot \text{ D } +$ (Ukázali jsme si v 1. příkladu této prezentace)

$(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ je komutativní polookruh s nulovým prvkem a s jedničkou

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

3) Jaký typ algebraické struktury je $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

1. Operace $+$ je $ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge EI$ v množině \mathbb{C} $e = \mathbf{0}$ $(\mathbb{C}, +)$ je komutativní grupa

2. Operace \cdot je $ND \wedge A \wedge K$ v množině \mathbb{C} $(EN \wedge \cancel{EI})$ $e = \mathbf{1}$

(\mathbb{C}, \cdot) je komutativní pologrupa s jedničkou

3. Platí $\cdot D +$

4. Neexistují dělitelé nuly, tj. neexistují čísla $a, b \in \mathbb{C}$ taková, aby platilo $a \neq \mathbf{0}, b \neq \mathbf{0}$, že $a \cdot b = \mathbf{0}$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je **komutativní okruh s nulovým prvkem a s jedničkou bez dělitelů nuly**

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je **obor integrity**

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

4) Jaký typ algebraické struktury jsou $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

1. Operace $+$ je $ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge EI$ v množině \mathbb{Q}, \mathbb{R} $e = 0$

$(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ jsou komutativní grupy

2. Operace \cdot je $ND \wedge A \wedge K$ v množině \mathbb{Q}, \mathbb{R} $(EN \wedge EI) e = 1$

$(\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot)$ jsou komutativní pologrupy s jedničkou

3. Platí $\cdot D +$

4. $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ komutativní grupy,

tj. na množině $\mathbb{Q} - \{0\}, \mathbb{R} - \{0\}$ má operace násobení vlastnosti: $ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge EI$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ jsou **komutativní tělesa**

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení: Připomeňme, že množina $\mathcal{P}(M)$ je potenční systém množiny M , tedy množina všech podmnožin množiny M , tj. $\mathcal{P}(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$.

a) Zabývejme se nejdříve vlastnostmi operace \cup (sjednocení množin) v množině $\mathcal{P}(M)$

\cup	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M , jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

$e = \emptyset$ (neutrální prvek)

$\bar{\emptyset} = \emptyset$ $\{a, b\}$ je agresivní prvek

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

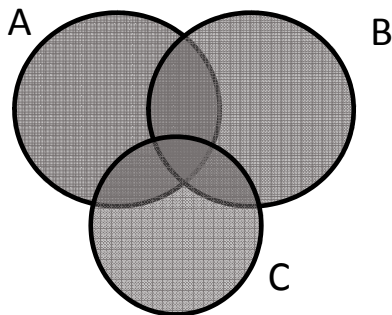
Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení:

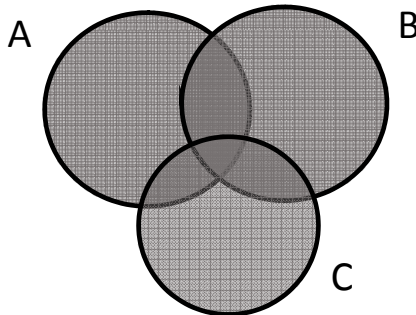
Vyšetříme asociativitu operace \cup :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}: \overbrace{A \cup (B \cup C)}^{\mathbf{L}} = \overbrace{(A \cup B) \cup C}^{\mathbf{P}}$$

L



P



L = P \Rightarrow operace \cup je asociativní

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení:

$$\mathcal{P}(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$$

\cup	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset

ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

Algebraická struktura $(\mathcal{P}(M), \cup)$ je komutativní pologrupa s nulovým prvkem $e = \emptyset$

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení: $\mathcal{P}(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$.

b) Zabývejme se dále vlastnostmi operace \cap (průnik množin) v množině $\mathcal{P}(M)$

\cap	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset
$\{a\}$	$\{a\}$	\emptyset	$\{a\}$	\emptyset
$\{b\}$	\emptyset	$\{b\}$	$\{b\}$	\emptyset
$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M , jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

$e = \{a, b\}$ (neutrální prvek)

$\overline{\{a, b\}} = \{a, b\}$

\emptyset je agresivní prvek

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

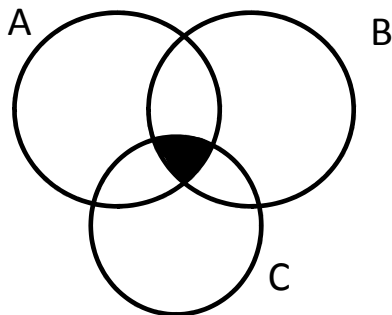
Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení:

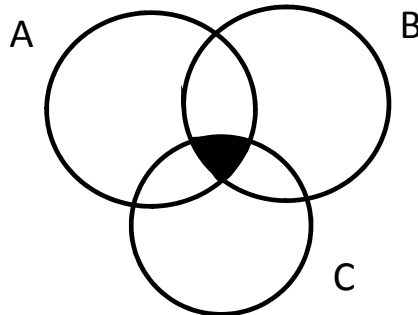
Vyšetříme asociativitu operace \cap :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}: \overbrace{A \cap (B \cap C)}^{\mathbf{L}} = \overbrace{(A \cap B) \cap C}^{\mathbf{P}}$$

L



P



L = P \Rightarrow operace \cap je asociativní

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení:

$$\mathcal{P}(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$$

\cap	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset
$\{a\}$	$\{a\}$	\emptyset	$\{a\}$	\emptyset
$\{b\}$	\emptyset	$\{b\}$	$\{b\}$	\emptyset
$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Algebraická struktura $(\mathcal{P}(M), \cap)$ je komutativní pologrupa s jednotkovým prvkem $e = \{a, b\}$ a absorpčním prvkem \emptyset

ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

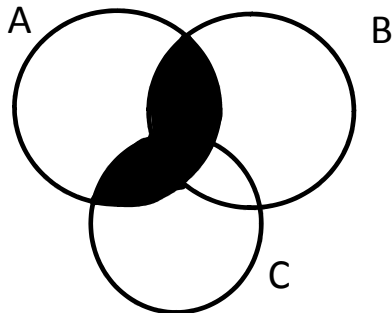
Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

c) zbývá vyšetřit platnost distributivního zákona:

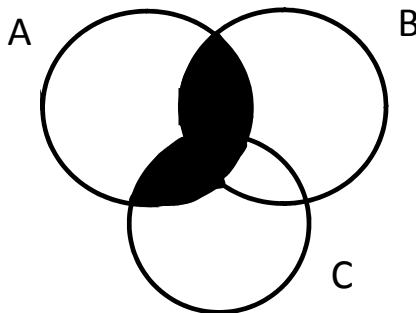
$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}: \overbrace{A \cap (B \cup C)}^{\mathbf{L}} = \overbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C)}^{\mathbf{P}} \quad (\text{Levý DZ})$$

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}: (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) \quad (\text{Pravý DZ})$$

L



P



L = P \Rightarrow operace \cap je distributivní vzhledem k operaci \cup

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

1. \cup : ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~ $(\mathcal{P}(M), \cup)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem
2. \cap : ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~ $(\mathcal{P}(M), \cap)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem
3. Operace \cap je distributivní vzhledem k operaci \cup (platí levý i pravý distributivní zákon)

$(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ je komutativní polookruh s nulovým prvkem \emptyset a jednotkovým prvkem $\{a, b\}$.