Základy algebry a aritmetiky

4. cvičení

KONEČNÉ A NEKONEČNÉ MNOŽINY

- promyslete si příklady konečných a nekonečných množin *
- jaký je rozdíl mezi konečnými a nekonečnými množinami vzhledem k ekvivalenci dvou množin?

Př.: Je dána množina $\mathbb{N}$ všech ~~m~~ přirozených čísel a množina S všech sudých čísel větších než nula. Zjistěte, zda $\mathbb{N} \sim S$.

Řešení: uvažujme relaci $R = \{[1,2],[2,4],[3,6],[4,8],[5,10]\dots\}$, tedy

$$R = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times S : 2 \cdot x = y\}$$

nyní musíme ukázat, že se jedná o ekvivalentní množiny a R je prosté zobrazení A na B.

1) Je R zobrazení? ANO (každý vzor má jeden obraz)

2) Je R prosté? ANO (každý obraz má jeden vzor)

3) Co je $O_1(R)$? Je to celá množina $\mathbb{N}$.

4) Co je $O_2(R)$? Je to celá množina S.

} nenajdeme prvek ani jedné z množin, který nebude mít „partnera" z druhé množiny

Tedy $\mathbb{N} \sim S$

Přesto však víme, že množina $\mathbb{N}$ má „více" prvků, než množina S. Například prvek $1 \in \mathbb{N}$, ale $1 \notin S$, to znamená, že je S vlastní podmnožina množiny $\mathbb{N}$ (není to celá množina $\mathbb{N}$).

Existují další ~~-~~ vlastní podmnožiny $\mathbb{N}$, které jsou s $\mathbb{N}$ ekvivalentní?

* počet dětí ve třídě, hvězd na obloze, reálných čísel...

4. cvičení

Definice: Řekneme, že množina A je konečná právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s A.

Definice: Řekneme, že množina A je nekonečná právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny A, která je s množinou A ekvivalentní.

(BINÁRNÍ) OPERACE V MNOŽINĚ A JEJICH VLASTNOSTI

Nyní se budeme věnovat speciálnímu typu zobrazení, a to zobrazení z $M \times M$ do M. Nazveme jej operací a opravdu se jedná o operaci, kterou mnoho let znáte a budete učit.

Definice: Nechť M je libovolná neprázdná množina. Binární operací $\circ$ v množině M rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu $M \times M$ do množiny M. Jestliže v binární operaci $\circ$ vzoru $[x,y] \in M \times M$ odpovídá obraz $z \in M$, píšeme $x \circ y = z$

- slovo „binární" můžeme opět vynechávat
- operaci můžeme značit $\circ, *, \heartsuit, \Delta \ldots$, raději se však budeme pro označení obecné operace vyhýbat $+, -, \cdot, :$, aby nás známá znaménka nemátla – budeme je používat pouze pokud mluvíme o klasickém sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Základy algebry a aritmetiky

4. cvičení

- pro nás známým příkladem operace je například sčítání na množině přirozených čísel – například prvku $[1,5] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je přiřazen prvek $6 \in \mathbb{N}$, tedy $1+5=6$

- operace můžeme zadávat pomocí předpisu, nebo pomocí tabulky

pro násobení na $\mathbb{N}$ platí tabulka:

$x \cdot y$	1	2	3	4	5	...
1	1	2	3	4	5	
2	2	4	6	8	10	
3	3	6	9	12	15	
4	4	8	12	16	20	
⋮						

Tato tabulka by byla nekonečná, ale funguje stejně jako konečné tabulky, s kterými budeme pracovat později. Prvek x volíme ZDE (sloupec), prvek y ZDE (řádek)

- operace definovaná pomocí předpisu může vypadat následovně: $x * y = 3x - y$, tedy pro tuto operaci definovanou na $\mathbb{Z}$ platí např.

$$5 * 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$$
$$(-2) * 7 = 3 \cdot (-2) - 7 = -13$$

a tak dále.

- možná si vzpomínáte, že na střední (i základní) škole se rozlišují různé vlastnosti operací, například pro některé operace platí, že $a \circ b = b \circ a$ $(2+5=5+2)$, pro jiné však tento vztah neplatí $(7-3 \neq 3-7)$

- dále se budeme věnovat základním vlastnostem operace, pojmenujeme je a budeme je zkoumat

Základy algebry a aritmetiky

4. cvičení

Př.: Pro některé operace definované ~~na~~ v určité množině může platit, že výsledek této operace již do dané množiny nepatří. Příkladem je dělení ~~na~~ v celých čísel – i když $18:3 = 6 \in \mathbb{Z}$, můžeme počítat $17:5 = \frac{17}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Naopak u některých operací definovaných ~~na~~ v určitých množinách patří výsledek vždy opět do dané množiny, například součet jakýchkoli dvou celých čísel je opět celé číslo.

Def.: Binární operace $\circ$ v množině M, která má vlastnost, že je definovaná pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in M \times M$ (tj. pro každé x,y platí, že $x \circ y = z \in M$) se nazývá OPERACE NEOMEZENĚ DEFINOVANÁ v M, nebo krátce operace definovaná na M.

Symbolicky $(\forall x,y \in M)(\exists z \in M): x \circ y = z$

Tuto vlastnost značíme **ND**.

Př.: Určete, zda jsou operace ~~na~~ ND v M, pokud ne, uveďte proč.

a) sčítání v $\mathbb{Z}$

b) dělení v $\mathbb{Q}$

c) odčítání v $\mathbb{N}$

d) operace $*$ v $\mathbb{N}$, kde $x * y = x + y - x \cdot y$

e) operace $\triangle$ v $\mathbb{R}$, kde $x \triangle y = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

Řešení:

a) ano

b) ano

c) ne $2 - 15 \notin \mathbb{N}$

d) ne $4 + 5 - 20 \notin \mathbb{N}$

e) ano

Základy algebry a aritmetiky

4. cvičení

- další dvě vlastnosti pravděpodobně známé ze středních škol

Def.: Binární operace $\circ$ definovaná na množině M se nazývá **KOMUTATIVNÍ** právě tehdy, když pro každé dva prvky $a, b \in M$ platí $a \circ b = b \circ a$.

- Symbolicky $\forall a, b \in M: a \circ b = b \circ a$
- značíme K
- v tabulce poznáme komutativitu podle její souměrnosti podle hlavní úhlopříčky (~~ze~~ z levého horního rohu do pravého dolního rohu).

$x \circ y$	1	2	3
1	1	2	1
2	3	3	1
3	3	2	1

operace $\circ$ není komutativní

$x * y$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	c

operace $*$ je komutativní

Př.: Vymyslete příklad alespoň dvou operací na množinách, které jsou / nejsou komutativní (operací známých ze ZŠ, případně množinových operací jako $\cap$, $\cup$)

4. cvičení

Def: Binární operace o definovaná na množině M se nazývá ASOCIATIVNÍ právě tehdy, když pro každé a, b, c ∈ M platí
$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

Značíme **A**.

Př.: Uveďte příklad známé operace, která

a) je asociativní na $\mathbb{Z}$

b) není asociativní na $\mathbb{R}$