Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Binární operace určené tabulkou

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Prezentace č. 6

Binární operace dané tabulkou

Uvažujme binární operaci ○ v množině M zapsanou pomocí operační tabulky, viz příklad:

Příklad 1: Je dána množina **M = {a, b, c}** a operace ○ v množině **M** daná tabulkou. Určete vlastnosti operace ○. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury **(M, ○)**.

a)

○	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	c

○	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	c

hlavní diagonála

řádek sloupec výsledek operace

a ○ a = b

a ○ b = c

c ○ b = b

Binární operace dané tabulkou

a) $\mathbf{M = \{a, b, c\}}$

∘	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	c

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \cancel{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{EN}} \wedge \underline{\mathbf{EI}} \wedge \cancel{\mathbf{ZR}}$

$\mathbf{e = c}$ (neutrální prvek)

$\left.\begin{array}{l} \bar{a} = \mathbf{b} \\ \bar{b} = a \\ \bar{b} = \mathbf{b} \\ \bar{c} = \mathbf{c} \end{array}\right\}$ inverzní prvky

(M, ∘) komutativní grupoid

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu A ⇒ (ZR ⇔ EI)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	0	0	1

Binární operace dané tabulkou

b) $\mathbf{M = \{a, b, c\}}$

∘	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \cancel{\mathbf{A}} \wedge \cancel{\mathbf{K}} \wedge \cancel{\mathbf{EN}} \wedge \cancel{\mathbf{EI}} \wedge \underline{\mathbf{ZR}}$

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu A ⇒ (ZR ⇔ EI)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

$$A \;\Rightarrow\; (ZR \;\Leftrightarrow\; EI)$$
$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

(M, ∘) grupoid s vlastností ZR

Binární operace dané tabulkou

c) $M = \{a, b, c\}$

∘	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

$\cancel{ND} \wedge \cancel{A} \wedge \cancel{K} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI} \wedge \cancel{ZR}$

$e = c$ (neutrální prvek)

$\left.\begin{array}{l} \bar{a} = a \\ \bar{b} = b \\ \bar{c} = c \end{array}\right\}$ inverzní prvky

(M, ∘) algebraická struktura

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

$$\begin{array}{ccccc} A & \Rightarrow & (ZR & \Leftrightarrow & EI) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Binární operace dané tabulkou

d) **M = {a, b, c}**

∘	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

ND ∧ **A** ∧ **K** ∧ **EN** ∧ **EI** ∧ **ZR**

?

$\mathbf{e} = \mathbf{c}$ (neutrální prvek)

$\bar{a} = b$
$\bar{b} = a$
$\bar{c} = c$

inverzní prvky

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu A ⇒ (ZR ⇔ EI)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	1	1	1
1				

?

Problém asociativity

- Platí $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1

1) Má-li operace ∘ právě jednu z vlastností ZR, EI, pak není A.

$$\underline{ZR} \wedge \cancel{EI} \Rightarrow \cancel{A}$$
$$\cancel{ZR} \wedge \underline{EI} \Rightarrow \cancel{A}$$

2) Jestliže operace ∘ má nebo nemá současně obě z vlastností ZR, EI, může nebo nemusí být A.

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

M U N I

Problém asociativity

2) Jestliže operace **o** má nebo nemá současně obě z vlastností ZR, EI, může nebo nemusí být A.

A	$\Rightarrow$	(ZR	$\Leftrightarrow$	EI)
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

- Vlastnost asociativity vyšetříme přímo z definice:

  $(\forall\, a, b, c \in \mathrm{M})[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)] \sim$ *abc*

Problém asociativity

2) Vlastnost asociativity vyšetříme přímo z definice:

$(\forall\, a, b, c \in \mathrm{M})[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$ *abc (trojice)*

$[(b \circ c) \circ c = b \circ (c \circ c)]$ *bcc (trojice)*

$[(c \circ a) \circ a = c \circ (a \circ a)]$ *caa (trojice)*

Existuje celkem 27 možností trojic:

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

Binární operace dané tabulkou

d) **M = {a, b, c}** **vyšetřujeme A ?**

$\circ$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

$$aaa: \underbrace{\underbrace{(a \circ a)}_{b} \circ a}_{c} = \underbrace{a \circ \underbrace{(a \circ a)}_{b}}_{c} \quad \boldsymbol{A}$$

$$bbb: \underbrace{\underbrace{(b \circ b)}_{a} \circ b}_{c} = \underbrace{b \circ \underbrace{(b \circ b)}_{a}}_{c} \quad \boldsymbol{A}$$

Tímto způsobem bychom měli vyšetřit všech 27 trojic z tabulky výše, ale tato cesta je příliš zdlouhavá. Existují nějaká pravidla, jak zredukovat tento počet?

M U N I

Ke snížení počtu možností pro vyšetření asociativity nám pomohou tato pomocná pravidla:

1. Jestliže alespoň jeden z prvků *a*, *b*, *c* ∈ M je neutrálním prvkem množiny M vzhledem k operaci ○ pak trojice *abc* splňuje asociativnost operace ○ v množině M.
2. Jestliže operace ○ je v množině M komutativní, pak každá trojice *aaa* splňuje asociativnost operace ○ v množině M.
3. Jestliže alespoň jeden z prvků *a*, *b*, *c* ∈ M je agresívním prvkem množiny M vzhledem k operaci ○, pak trojice *abc* splňuje asociativnost operace ○ v množině M.

d)

○	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

1. **e = c** (neutrální prvek)
2. **<u>K</u>**
3. agresivní prvek neexistuje

MUNI

Zůstalo celkem 6 trojic: *aab, aba, baa, abb, bab, bba*, u kterých je třeba vyšetřit asociativitu dle definice, tj. $(\forall\, a, b, c \in M)[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$.

d)

$\circ$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

aab: $(a \circ a) \circ b = a \circ (a \circ b)$

$b \circ b = a \circ c$

$\underline{a = a}$ ***A*** ✓

aba: $(a \circ b) \circ a = a \circ (b \circ a)$

$c \circ a = a \circ c$

$\underline{a = a}$ ***A*** ✓

baa: $(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a)$

$c \circ a = b \circ b$

$\underline{a = a}$ ***A*** ✓

abb: $(a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b)$

$c \circ b = a \circ a$

$\underline{b = b}$ ***A*** ✓

bab: $(b \circ a) \circ b = b \circ (a \circ b)$

$c \circ b = b \circ c$

$\underline{b = b}$ ***A*** ✓

bba: $(b \circ b) \circ a = b \circ (b \circ a)$

$a \circ a = b \circ c$

$\underline{b = b}$ ***A*** ✓

<u>ND</u> $\wedge$ **<u>A</u>** $\wedge$ **<u>K</u>** $\wedge$ **<u>EN</u>** $\wedge$ **<u>EI</u>** $\wedge$ **<u>ZR</u>**

e = c (neutrální prvek)

$\overline{a} = b$

$\overline{b} = a$

$\overline{c} = c$

agresivní prvek neexistuje

(M, ○) komutativní grupa s vlastností ZR

MUNI

Binární operace dané tabulkou

e) **M = {a, b, c}**

∘	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	b	b

ND ∧ **A** ∧ ~~**K**~~ ∧ ~~**EN**~~ ∧ ~~**EI**~~ ∧ ~~**ZR**~~

?

g = a (agresivní prvek)

Pro určení asociativity využijeme pomocná pravidla:

1. ~~**EN**~~ ..... Toto pravidlo nevyužijeme

2. ~~K~~ ....Toto pravidlo nevyužijeme

3. **AG** ...... pravidlo využijeme, **g = a**

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

A ⇒ (ZR ⇔ EI)

? 0 1 0 1 0

1

Zůstalo celkem 8 trojic: *bbb, bbc, bcb, cbb, bcc, cbc, ccb, ccc* u kterých je třeba vyšetřit asociativitu dle definice, tj. $(\forall\, a, b, c \in M)[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$.

e)

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	b	b

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

bbb: $(b \circ b) \circ b = b \circ (b \circ b)$

$b \circ b = b \circ b$

$\underline{b = b}$ ***A*** ✓

bbc: $(b \circ b) \circ c = b \circ (b \circ c)$

$b \circ c = b \circ a$

$\underline{a = a}$ ***A*** ✓

bcb: $(b \circ c) \circ b = b \circ (c \circ b)$

$a \circ b = b \circ b$

$\underline{a = b}$ ***A*** ✗

$\underline{\textbf{ND}} \wedge \cancel{\textbf{A}} \wedge \cancel{\textbf{K}} \wedge \cancel{\textbf{EN}} \wedge \cancel{\textbf{EI}} \wedge \cancel{\textbf{ZR}}$

$\mathbf{g} = a$ (agresivní prvek)

(M, ○) grupoid

Binární operace dané tabulkou

f) $M = \{a, b, c\}$

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	b

$\underline{ND} \wedge A \wedge \underline{K} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI} \wedge \cancel{ZR}$

?

$e = a$ (neutrální prvek)

$\bar{a} = a$

$g = b$ (agresivní prvek)

Pro určení asociativity využijeme pomocná pravidla:

1. **EN** .... $e = a$, pravidlo využijeme
2. **K** ....pravidlo nevyužijeme
3. **AG** ...... pravidlo využijeme, $g = b$

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

$A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$

? 0 1 0 1 0

1

Binární operace dané tabulkou

f) $M = \{a, b, c\}$

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	b

ND ∧ **A** ∧ **K** ∧ **EN** ∧ ~~EI~~ ∧ ~~ZR~~

$\mathbf{e} = \boldsymbol{a}$ (neutrální prvek)

$\overline{a} = \boldsymbol{a}$

$\mathbf{g} = \mathbf{b}$ (agresivní prvek)

Pro určení asociativity využijeme pomocná pravidla:

1. EN …. $e = \boldsymbol{a}$, pravidlo využijeme
2. K ………pravidlo využijeme
3. AG …… $g = b$, pravidlo využijeme,

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

(M, ∘) komutativní pologrupa s neutrálním prvkem

MUNI