

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky –
předmět IMAp02 (jaro 2020)

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Binární operace určené tabulkou – příklady k procvičení

Základy algebry a aritmetiky – předmět
IMAp02 (jaro 2020)

Prezentace č. 7



Binární operace dané tabulkou

Příklad 1: Je dána množina $\mathbf{M} = \{1, 0, -1\}$ a operace \circ v množině \mathbf{M} daná tabulkou. Určete vlastnosti operace \circ . Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury (\mathbf{M}, \circ) .

\circ	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Binární operace dané tabulkou

Řešení:

ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

\circ	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Asociativita: Operace \circ má vlastnosti **EN**, **K** a existuje agresivní prvek (využijeme všech tří pomocných pravidel, tj. \circ je **asociativní** (viz příklad 1 f) v prezentaci č. 6, kde jsme měli podobnou situaci)

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M ... **je splněno**
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M , jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály ... **je splněno**
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky ... **je splněno** **$e = 1$** (neutrální prvek)
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály ... **není splněno**, **prvek 0 nemá inverzní prvek v množině M vzhledem k operaci \circ , k prvkům 1, -1 existují inverzní prvky: $\overline{1} = 1, \overline{-1} = -1$**
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M ... **není splněno**

$e = 1$ (neutrální prvek)

$\overline{1} = 1$

$\overline{-1} = -1$

$g = 0$ (agresivní prvek)

(M, \circ) komutativní polorupa s neutrálním a agresivním prvkem

• **A** $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$

0	1	0	1	0
1				

Binární operace dané tabulkou

Příklad 2: Je dána množina $\mathbf{M} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ a operace \circ v množině \mathbf{M} daná tabulkou. Určete vlastnosti operace \circ . Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury (\mathbf{M}, \circ) .

\circ	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

Řešení:

ND \wedge A \wedge K \wedge ~~EN~~ \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

\circ	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

Asociativita: Operace \circ má pouze agresivní prvek **a** (mohli bychom tedy využít pouze 3. pomocné pravidlo, tj. vyšetřit 8 trojic, v nichž se prvek **a** nevyskytuje - bbb, ccc, bbc, bcb, cbb, ccb, cbc, bcc). Vzhledem k charakteru tabulky je zřejmé, že výsledek operací všech dvojic prvků z množiny M je vždy prvek **a**, tedy operace je asociativní.)

g = a (agresivní prvek)

(M, \circ) komutativní pogrupa s agresivním prvkem

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M ... **je splněno**
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály ... **je splněno**
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky ... **není splněno**
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály ... **není splněno, k žádnému prvku množiny M neexistuje prvek inverzní vzhledem k operaci \circ**
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M ... **není splněno**

• **A** $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Binární operace dané tabulkou

Příklad 3: Je dána množina $\mathbf{M} = \{1, 2\}$ a operace \square v množině \mathbf{M} daná tabulkou. Určete vlastnosti operace \circ . Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury (\mathbf{M}, \square) .

\square	1	2
1	1	1
2	1	2

Řešení:

ND \wedge A \wedge K \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

\square	1	2
1	1	1
2	1	2

Asociativita: Operace \square má vlastnosti **EN**, **K** a existuje agresivní prvek, tj. operace \square je asociativní (trojic by v případě dvouprvkové množiny bylo pouze $2^3 = 8$, tedy *111, 112, 121, 211, 222, 221, 212, 122*).

$e = 2$ (neutrální prvek)

$\bar{2} = 2$

$g = 1$ (agresivní prvek)

(M, \square) komutativní pologrupa s agresivním a neutrálním prvkem

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M ... **je splněno**
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály ... **je splněno**
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky ... **je splněno e = 2**
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály ... **není splněno, k prvku 1 neexistuje prvek inverzní vzhledem k operaci \square**
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M ... **není splněno**

• A $\begin{matrix} A & \Rightarrow & (ZR & \Leftrightarrow & EI) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{matrix} & 0 \end{matrix}$

Binární operace dané tabulkou

Příklad 4: Je dána množina $\mathbf{M} = \{0, 1, 2, 3\}$ a operace $+$ (obyčejné sčítání v množině \mathbf{M}). Určete vlastnosti operace $+$. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury $(\mathbf{M}, +)$.

Pokuste se v dalších úvahách promyslet vlastnosti operací obyčejného odčítání, násobení a dělení v množině $\mathbf{M} = \{0, 1, 2, 3\}$.

Binární operace dané tabulkou

Řešení: Operační tabulka vypadá následovně:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

Operace + v množině M není ND, neboť
např. $2 + 3 = 5$, ale $5 \notin M$.

Protože není ND, není ani K, A, ZR

(M, +) je algebraická struktura

~~ND~~ \wedge ~~A~~ \wedge ~~K~~ \wedge EN \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

$e = 0$ (neutrální prvek)

$\bar{0} = 0$ (pouze 0 má inverzní prvek vzhledem k operaci + v množině M)

Binární operace dané tabulkou

Příklad 5: Je dána množina $\mathbf{M} = \{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}\}$ a operace \square v množině \mathbf{M} daná tabulkou. Určete vlastnosti operace \circ . Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury (\mathbf{M}, \square) .

\square	k	l	m
k	m	l	k
l	k	m	l
m	k	l	m

Řešení:

$$\underline{\text{ND}} \wedge \cancel{\text{A}} \wedge \cancel{\text{K}} \wedge \underline{\text{EN}} \wedge \underline{\text{EI}} \wedge \cancel{\text{ZR}}$$

□	k	l	m
k	m	l	k
l	k	m	l
m	k	l	m

$e = m$ (neutrální prvek)

$\bar{k} = k$

$\bar{l} = l$

$\bar{m} = m$

$(M, *)$ grupoid s neutrálním prvkem a vlastností EI

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M ... **je splněno**
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály ... **není splněno**
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky ... **je splněno** $e = m$
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály ... **je splněno**
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M ... **není splněno**

• **A** $\begin{matrix} \text{A} & \Rightarrow & (\text{ZR} & \Leftrightarrow & \text{EI}) \\ \textcircled{0} & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{0} & 1 \end{matrix}$

Binární operace dané tabulkou

Příklad 6: Je dána množina $\mathbf{M} = \{a, b, c\}$. V množině \mathbf{M} definujte operaci \square danou tabulkou, pro jejíž vlastnosti platí:

- a) ~~ND~~ \wedge EI
b) A \wedge ~~ZR~~

Rozhodněte a zdůvodněte, které z dalších vlastností operace \square má. Pokud existují prvky inverzní k jednotlivým prvkům, určete je. Rozhodněte o typu algebraické struktury (\mathbf{M}, \square) .

Řešení:

a) ~~ND~~ \wedge EI

\square	a	b	c
a			
b			
c			

1. krok: zvolíme neutrální prvek, např. $e = b$ a dle této volby vyplníme tabulku

2. krok : aby platila vlastnost EI, musí být prvek b v každém řádku i každém sloupci obsažen a musí být rozložen souměrně podle hl. diagonály

3. krok : Tabulka z 2. kroku již zadání splňuje, neboť není ND. Případně můžeme na zbývající dvě pozice zapsat například hodnotu x , což je prvek, který nepatří do množiny M

\square	a	b	c
a		a	
b	a	b	c
c		c	

$$\begin{aligned}\bar{a} &= a \\ \bar{b} &= b \\ \bar{c} &= c\end{aligned}$$

\square	a	b	c
a	b	a	
b	a	b	c
c		c	b

\square	a	b	c
a	b	a	x
b	a	b	c
c	x	c	b

Operace určené tabulkami ve 2. a 3. kroku obě splňují zadání, její vlastnosti tedy

jsou: ~~ND~~ \wedge ~~A~~ \wedge ~~K~~ \wedge EN \wedge EI \wedge ~~ZR~~

(M, \square) je algebraická struktura

Řešení:

a) ~~ND~~ \wedge EI

\square	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	b	c	

\square	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	
c	c	c	a

\square	a	b	c
a	b	c	a
b	c		b
c	a	b	c

Operace určené tabulkami splňují zadání, jejich vlastnosti tedy jsou: ~~ND~~ \wedge ~~A~~ \wedge ~~K~~ \wedge EN \wedge EI \wedge ~~ZR~~

(M, \square) je algebraická struktura

Řešení:

b) $A \wedge \cancel{ZR}$

Řešení mohou být následující

\square	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

\square	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	b
c	b	b	b

\square	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

Operace určené všemi třemi tabulkami splňují podmínky zadání, jejich vlastnosti

tedy jsou: ND \wedge A \wedge K \wedge ~~EN~~ \wedge ~~EI~~ \wedge ~~ZR~~

(M, \square) je komutativní pologrupa

Řešení:

b) $A \wedge \cancel{ZR}$

Řešení mohou být následující

\square	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	c
c	c	c	c

\square	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Operace určené oběmi tabulkami splňují podmínky zadání, jejich vlastnosti tedy

jsou: $\underline{ND} \wedge \underline{A} \wedge \underline{K} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI} \wedge \cancel{ZR}$

(M, \square) je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem