Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Algebraické struktury se dvěma operacemi

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Prezentace č. 9

Algebraické struktury s jednou operací

Připomeňme si schéma z 5. prezentace, podle kterého rozlišujeme typ algebraické struktury (M, o) s jednou operací.

Algebraická struktura (M, o) se nazývá _______ právě tehdy, když splňuje operace o definovaná na M vlastnosti ______.

	ND	A	EN	EI	K
GRUPOID					
POLOGRUPA					
GRUPA					
KOMUTATIVNÍ GRUPOID					
KOMUTATIVNÍ POLOGRUPA					
KOMUTATIVNÍ GRUPA					

Pokud nesplňuje (M, o) ani vlastnost ND, nazýváme ji pouze algebraickou strukturou.

MUNI

Algebraické struktury se dvěma operacemi

Definice: Na množině M jsou definovány dvě binární operace $\square$ a $\circ$. Řekneme, že operace $\square$ **je distributivní vzhledem k operaci** $\circ$ právě tehdy, když

$$(\forall\, x, y, z \in M)\ \underbrace{[z \,\square\, (x \circ y) = (z \,\square\, x) \circ (z \,\square\, y)]}_{\textbf{Levý distributivní zákon}} \wedge \underbrace{[(x \circ y) \,\square\, z = (x \,\square\, z) \circ (y \,\square\, z)]}_{\textbf{Pravý distributivní zákon}}$$

Označení $\boxed{\square\ \mathbf{D}\ \circ}$ Čteme: Platí distributivní zákon operace $\square$ vzhledem k operaci $\circ$.

Příklad 1: Operace násobení (·) v číselných množinách je distributivní vzhledem k operaci sčítání (+), tj. platí

$$(\forall\, x, y, z \in M)\ [z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y] \wedge [(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z]$$

např. pro $x = 3$, $y = 4$, $z = 2$: $\underbrace{2 \cdot (3 + 4)}_{14} = \underbrace{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4}_{14} \wedge \underbrace{(3 + 4) \cdot 2}_{14} = \underbrace{3 \cdot 2 + 4 \cdot 2}_{14}$

Algebraické struktury se dvěma operacemi

Definice: Na množině M jsou definovány dvě binární operace □ a ○. Řekneme, že operace □ **je distributivní vzhledem k operaci** ○ právě tehdy, když

$$(\forall x, y, z \in \mathrm{M})\ \underbrace{[z \square (x \circ y) = (z \square x) \circ (z \square y)]}_{\textbf{Levý distributivní zákon}} \wedge \underbrace{[(x \circ y) \square z = (x \square z) \circ (y \square z)]}_{\textbf{Pravý distributivní zákon}}$$

Příklad 2: Operace průnik (∩) v systémech množin je distributivní vzhledem k operaci sjednocení (∪), tj. platí

$$(\forall A, B, C \in \mathcal{M})\ [A \cap (B \cup C) = (A \cap \mathrm{B}) \cup (A \cap \mathrm{C})] \wedge [(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)]$$

Lze dokázat na základě Vennových diagramů, viz 1. semestr.

Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, ⊕, ⊙)

Budeme se dále zabývat algebraickými strukturami se dvěma binárními operacemi (M, ⊕, ⊙)

⊕ **sčítání** : EN – **nulový prvek** (ozn. **0**), $\overline{x}$ = - x … **opačný prvek** k prvku x

$x \oplus \overline{x} = \overline{x} \oplus x = \mathbf{0}$

⊙ **násobení** : EN – **jednotkový prvek** (ozn. **1**), $\overline{x} = \frac{1}{x} = x^{-1}$ … **převrácený prvek** k prvku x

$x \odot \overline{x} = \overline{x} \odot x = \mathbf{1}$

Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, ⊕, ⊙)

Definice 2: Nechť *M* je neprázdná množina, ve které jsou definovány dvě binární operace ⊕ a ⊙. Algebraická struktura se dvěma binárními operacemi (*M*, ⊕, ⊙) se nazývá **polookruh** právě tehdy, když:

1. Operace ⊕ je ND ∧ A ∧ K v množině *M*
2. Operace ⊙ je ND ∧ A v množině *M*
3. Platí ⊙ D ⊕

Je-li operace ⊙ navíc komutativní, pak polookruh (*M*, ⊕, ⊙) se nazývá **komutativní polookruh**.

Poznámka: Pologrupa (*M*, ⊕) se nazývá aditivní pologrupa

Pologrupa (*M*, ⊙) se nazývá multiplikativní pologrupa

Algebraické struktury se dvěma operacemi $(M, \oplus, \odot)$

Definice 3: Polokruh $(M, \oplus, \odot)$, jehož aditivní pologrupa $(M, \oplus)$ je komutativní grupou, se nazývá **okruh.**

Tedy pro operace $\oplus$ a $\odot$ platí:

1. Operace $\oplus$ je ND $\wedge$ A $\wedge$ K $\wedge$ EN $\wedge$ EI v množině *M*
2. Operace $\odot$ je ND $\wedge$ A v množině *M*
3. Platí $\odot$ D $\oplus$

Poznámka: Je-li operace $\odot$ navíc komutativní, pak okruh $(M, \oplus, \odot)$ se nazývá **komutativní okruh**.

MUNI

Algebraické struktury se dvěma operacemi $(\mathbb{M}, \oplus, \odot)$

Příklad 2: Jaký typ algebraické struktury je $(\mathbb{N}, +, \cdot)$?

1. Operace + je ND ∧ A ∧ K v množině $\mathbb{N}$ (~~EN~~ ∧ ~~EI~~) $(\mathbb{N}, +)$ je komutativní pologrupa
2. Operace · je ND ∧ A ∧ K v množině $\mathbb{N}$ (EN ∧ ~~EI~~) e = **1**

   $(\mathbb{N}, \cdot)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem
3. Platí · D + (Ukázali jsme si v 1. příkladu této prezentace)

Algebraická struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ je **komutativní polookruh s jedničkou**

MUNI

Algebraické struktury se dvěma operacemi $(M, \oplus, \odot)$

Definice 4: Nechť $(M, \oplus, \odot)$ je okruh. Prvky $a \neq \mathbf{0}$, $b \neq \mathbf{0}$, kde $a, b \in M$, pro které platí

$$a \odot b = \mathbf{0},$$

se nazývají **dělitelé nuly** okruhu $(M, \oplus, \odot)$.

Definice 5: Komutativní okruh $(M, \oplus, \odot)$, ve kterém neexistují dělitelé nuly, se nazývá **obor integrity**.

Definice 6: Okruh $(M, \oplus, \odot)$, pro který platí, že $(M - \{\mathbf{0}\}, \odot)$ je grupa, se nazývá **těleso**.

Poznámka: Je-li operace $\odot$ navíc komutativní, pak těleso $(M, \oplus, \odot)$ se nazývá **komutativní těleso**.

Algebraické struktury se dvěma operacemi (M, $\oplus$, $\odot$)

Polookruh (komutativní)	$\oplus$	ND ∧ A ∧ K
(M, $\oplus$, $\odot$)	$\odot$	ND ∧ A ∧ (K)
		$\odot$ D $\oplus$
Okruh (komutativní)	$\oplus$	ND ∧ A ∧ K ∧ EN ∧ EI
(M, $\oplus$, $\odot$)	$\odot$	ND ∧ A ∧ (K)
		$\odot$ D $\oplus$
Obor integrity	$\oplus$	ND ∧ A ∧ K ∧ EN ∧ EI
(M, $\oplus$, $\odot$)	$\odot$	ND ∧ A ∧ K
		$\odot$ D $\oplus$
		Neexistují dělitelé nuly (a $\neq$ **0**, b $\neq$ **0**, že a $\odot$ b = **0**, kde a, b $\in$ M)
Těleso (komutativní)	$\oplus$	ND ∧ A ∧ K ∧ EN ∧ EI
(M, $\oplus$, $\odot$)	$\odot$	ND ∧ A ∧ (K)
		$\odot$ D $\oplus$
		(M – {**0**}, $\odot$) je grupa, tzn. operace $\odot$ na množině M – {**0**} má vlastnosti ND ∧ A ∧ EN ∧ EI

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

1) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ je **komutativní polookruh s jedničkou**

1. Operace + je ND ∧ A ∧ K v množině $\mathbb{N}$ (~~EN~~ ∧ ~~EI~~) $(\mathbb{N}, +)$ je komutativní pologrupa
2. Operace · je ND ∧ A ∧ K v množině $\mathbb{N}$ (EN ∧ ~~EI~~) **e = 1**
   $(\mathbb{N}, \cdot)$ je komutativní pologrupa s jedničkou
3. Platí · D + (Ukázali jsme si v 1. příkladu této prezentace)

2) Jaký typ algebraické struktury je $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$?

1. Operace + je ND ∧ A ∧ K v množině $\mathbb{N}_0$ (EN ∧ ~~EI~~) **e = 0**
   $(\mathbb{N}_0, +)$ je komutativní pologrupa s nulovým prvkem
2. Operace · je ND ∧ A ∧ K v množině $\mathbb{N}_0$ (EN ∧ ~~EI~~) **e = 1**
   $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ je komutativní pologrupa s jedničkou
3. Platí · D + (Ukázali jsme si v 1. příkladu této prezentace)

$(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ je **komutativní polookruh s nulovým prvkem a s jedničkou**

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

3) Jaký typ algebraické struktury je $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

1. Operace + je ND ∧ A ∧ K ∧ EN ∧ EI v množině $\mathbb{C}$ **e = 0** $(\mathbb{C}, +)$ je komutativní grupa
2. Operace · je ND ∧ A ∧ K v množině $\mathbb{C}$ (EN ∧ ~~EI~~) **e = 1**

   $(\mathbb{C}, \cdot)$ je komutativní pologrupa s jedničkou
3. Platí · D +
4. Neexistují dělitelé nuly, tj. neexistují čísla $a, b \in \mathbb{C}$ taková, aby platilo $a \neq \mathbf{0}$, $b \neq \mathbf{0}$, že $a \cdot b = \mathbf{0}$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je **komutativní okruh s nulovým prvkem a s jedničkou bez dělitelů nuly**

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je **obor integrity**

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

4) Jaký typ algebraické struktury jsou $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

1. Operace + je ND ∧ A ∧ K ∧ EN ∧ EI v množině $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ **e = 0**

$(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ jsou komutativní grupy

2. Operace · je ND ∧ A ∧ K v množině $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (EN ∧ ~~EI~~) e = **1**

$(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ jsou komutativní pologrupy s jedničkou

3. Platí · D +

4. $(\mathbb{Q} - \{\mathbf{0}\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}, \cdot)$ komutativní grupy,

tj. na množině $\mathbb{Q} - \{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$ má operace násobení vlastnosti: ND ∧ A ∧ K ∧ EN ∧ EI

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jsou **komutativní tělesa**

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení: Připomeňme, že množina $\mathcal{P}(M)$ je potenční systém množiny M, tedy množina všech podmnožin množiny M, tj. $\mathcal{P}(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$.

a) Zabývejme se nejdříve vlastnostmi operace ∪ (sjednocení množin) v množině $\mathcal{P}(M)$

∪	{a}	{b}	{a, b}	∅
{a}	{a}	{a, b}	{a, b}	{a}
{b}	{a, b}	{b}	{a, b}	{b}
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}
∅	{a}	{b}	{a, b}	∅

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu A ⇒ (ZR ⇔ EI)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \mathbf{A} \wedge \underline{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{EN}} \wedge \cancel{\mathbf{EI}} \wedge \cancel{\mathbf{ZR}}$

$\mathbf{e} = \emptyset$ (neutrální prvek)

$\overline{\emptyset} = \emptyset$ {a, b} je agresivní prvek

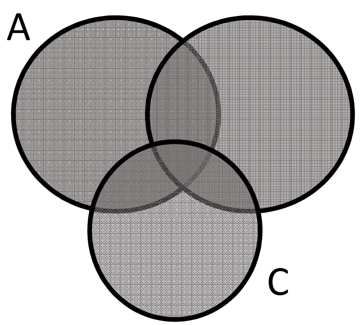
Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

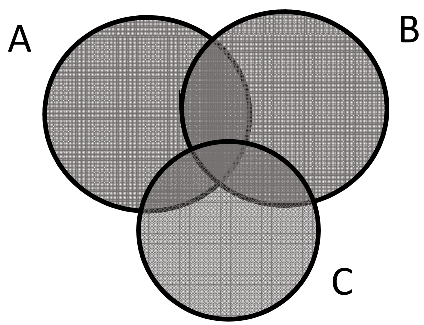
Řešení:

<u>Vyšetříme asociativitu operace ∪</u>: $\forall A, B, C \in \mathcal{M}: \overbrace{A \cup (B \cup C)}^{\mathbf{L}} = \overbrace{(A \cup B) \cup C}^{\mathbf{P}}$

L



P



L = P $\Rightarrow$ operace ∪ je asociativní

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení:

$\mathcal{P}(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

$\cup$	{a}	{b}	{a, b}	∅
{a}	{a}	{a, b}	{a, b}	{a}
{b}	{a, b}	{b}	{a, b}	{b}
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}
∅	{a}	{b}	{a, b}	∅

Algebraciká struktura $(\mathcal{P}(M), \cup)$ je komutativní pologrupa s nulovým prvkem

$\mathbf{e} = \emptyset$

ND ∧ **A** ∧ **K** ∧ **EN** ∧ ~~**EI**~~ ∧ ~~**ZR**~~

MUNI

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

Řešení: $\mathcal{P}(M) = \big\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\big\}$.

b) Zabývejme se dále vlastnostmi <u>operace</u> $\cap$ (průnik množin) <u>v množině $\mathcal{P}(M)$</u>

$\cap$	{a}	{b}	{a, b}	∅
{a}	{a}	∅	{a}	∅
{b}	∅	{b}	{b}	∅
{a, b}	{a}	{b}	{a, b}	∅
∅	∅	∅	∅	∅

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu A ⇒ (ZR ⇔ EI)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

<u>**ND**</u> ∧ **A** ∧ <u>**K**</u> ∧ <u>**EN**</u> ∧ ~~**EI**~~ ∧ ~~**ZR**~~

e = {a, b} (neutrální prvek)

$\overline{\{a, b\}} = \{a, b\}$

∅ je agresivní prvek

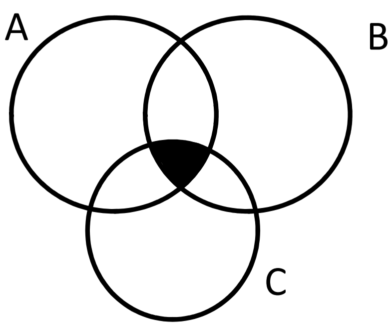
Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$?

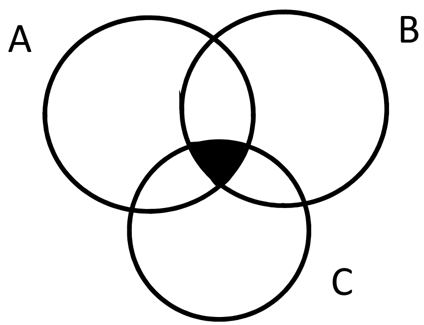
Řešení:

Vyšetříme asociativitu operace $\cap$: $\forall A, B, C \in \mathcal{M}: \overbrace{A \cap (B \cap C)}^{\mathbf{L}} = \overbrace{(A \cap B) \cap C}^{\mathbf{P}}$

L



P



L = P $\Rightarrow$ operace $\cap$ je asociativní

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

Příklad 3: Určete typ algebraické struktury ($\mathcal{P}(M)$, ∪, ∩), kde M = {a, b}?

Řešení:

$\mathcal{P}(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

∩	{a}	{b}	{a, b}	∅
{a}	{a}	∅	{a}	∅
{b}	∅	{b}	{b}	∅
{a, b}	{a}	{b}	{a, b}	∅
∅	∅	∅	∅	∅

Algebraciká struktura ($\mathcal{P}(M)$, ∩) je komutativní pologrupa s jednotkovým prvkem $\mathbf{e} = \{a, b\}$ a agresivním prvkem ∅

ND ∧ **A** ∧ **K** ∧ **EN** ∧ ~~**EI**~~ ∧ ~~**ZR**~~

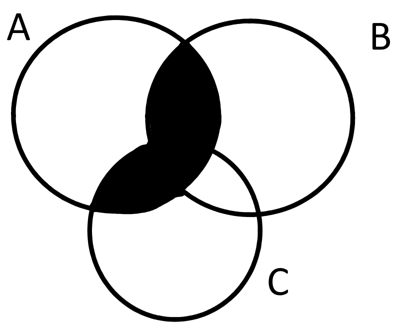
Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

c) zbývá vyšetřit platnost distributivního zákona:

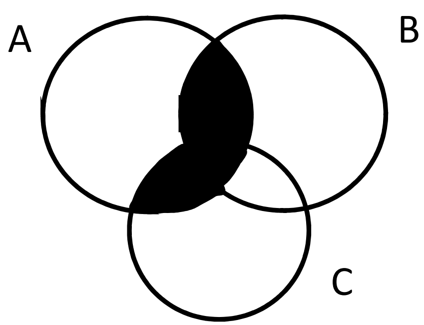
$\forall\, A, B, C \in \mathcal{M}$: $\overbrace{A \cap (B \cup C)}^{\textbf{L}} = \overbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C)}^{\textbf{P}}$ (Levý DZ)

$\forall\, A, B, C \in \mathcal{M}$: $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ (Pravý DZ)

L



P



L = P $\Longrightarrow$ operace ∩ je distributivní vzhledem k operaci ∪

MUNI

Příklady algebraických struktur se dvěma operacemi

1. $\cup$: **ND** $\wedge$ **A** $\wedge$ **K** $\wedge$ **EN** $\wedge$ ~~**EI**~~ $\wedge$ ~~**ZR**~~ $(\mathcal{P}(M), \cup)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem
2. $\cap$: **ND** $\wedge$ **A** $\wedge$ **K** $\wedge$ **EN** $\wedge$ ~~**EI**~~ $\wedge$ ~~**ZR**~~ $(\mathcal{P}(M), \cap)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem
3. Operace $\cap$ je distributivní vzhledem k operaci $\cup$ (platí levý i pravý distributivní zákon)

$(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ je komutativní polookruh s nulovým prvkem $\emptyset$ a jednotkovým prvkem {a, b}.