Možnosti distanční výuky

Aritmetika 2

IMAp04 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

Znaky dělitelnosti

Aritmetika 2

IMAp04 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

Prezentace č. 1

ZNAKY DĚLITELNOSTI

- *Znaky dělitelnosti* jsou matematické věty, které umožňují rozhodnout o dělitelnosti čísla jiným číslem bez provedení dělení, jen ze zápisu čísla.

1. Přirozené číslo *a* je dělitelné **dvěma (pěti, deseti)** právě tehdy, když je dvěma (pěti, deseti) dělitelné číslo, zapsané jeho cifrou nultého řádu.
2. Přirozené číslo *a* je dělitelné **čtyřmi**, právě když je čtyřmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.
3. Přirozené číslo *a* je dělitelné **osmi**, právě když je osmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním trojčíslím.
4. Přirozené číslo *a* je dělitelné **třemi (devíti)**, právě když je třemi (devíti) dělitelný jeho ciferný součet. (Ciferný součet je součet všech čísel zapsaných jednotlivými číslicemi v zápisu čísla *a*)
5. Přirozené číslo *a* je dělitelné **jedenácti**, právě když je jedenácti dělitelný součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu v zápisu čísla *a*.

MUNI

Cvičení:

1. O pěticiferném čísle 448**, jehož poslední dvě cifry neznáme, víme, že je dělitelné 3 a 25. Doplňte chybějící cifry.

Řešení:

448** číslo má být dělitelné 25, tzn. na pozici ** musí být následující dvojice cifer: buď 25 nebo 50 nebo 75 nebo 00. Jedná se tedy o čísla:

44800
44825
44850 z těchto čísel vybereme takové, které je dělitelné třemi, tj.
44875 jehož ciferný součet je dělitelný třemi. Tomu odpovídá číslo

<u>44850</u>

2. V číslech 437*, 32*, 4*54 nahraďte *, pokud je to možné, takovou cifrou, aby vzniklé číslo bylo dělitelné

a) čtyřmi,

b) osmi,

c) devíti,

Řešení:

a)	4372, 4376	320, 324, 328	4*54 – nelze
b)	4376	320, 328	4*54 – nelze
c)	4374	324	4554

M U N I

3. Z čísla 74 851 562 vyškrtněte čtyři cifry tak, abyste dostali čtyřciferné číslo, které je dělitelné 5 a 3. Najděte všechny možnosti.

Řešení:

74 851 562

74 851 56~~2~~ 748 515

74** → 74 85, 7455

78** → 7815

75** → 7515

48** → 4815

45** → 4515

MUNI

Věta 2: Je-li celé číslo a součtem dvou celých čísel, z nichž jedno je násobkem celého čísla b, pak druhé dává při dělení číslem b stejný zbytek jako číslo a.

Důkaz:

Nechť $a = c_1 + c_2$ a $b \mid c_1$, (tj. $c_1 = b \,.\, X$, kde $x \in C$), pak

$$a = b \,.\, x + c_2 \qquad (1)$$

Dále předpokládejme, že a dává při dělení číslem b zbytek z,

tj. $a = b \,.\, q + z$, kde $0 \leq z < | b |$. (2)

Z (1) vyjádříme c_2: $c_2 = a - b \,.\, x$ a dosadíme za a z (2)

$$c_2 = b \,.\, q + z - b \,.\, x = b.\,(q + x) + z \,.$$

Číslo c_2 tedy dává při dělení číslem b zbytek z jako číslo a při dělení číslem b.

Příklad:

<u>a = 61, b = 7</u>	61 = 7.8 + 5;	61 = 7.3 + 40;	61 = 7.7 + 12
	61 = 56 + 5;	61 = 21 + 40;	61 = 49 + 12 atd.

MUNI

4. Rozhodněte, zda číslo 4 356 je dělitelné čísly 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11. Pokud není dělitelné uvažovaným číslem, určete zbytek, který vznikne při dělení tímto číslem.

Řešení:

4 356 je dělitelné číslem 2, 3, 4, 6, 9, 11

4 356 dává po dělení číslem 5 zbytek 1
4 356 dává po dělení číslem 8 zbytek 4 (4356 – 4320 = 36; číslo 36 dává po dělení číslem 8 zbytek 4)
4 356 dává po dělení číslem 10 zbytek 6 (4356 – 4340 = 16; číslo 16 dává po dělení číslem 10 zbytek 6)

Dělitelnost číslem 11:

Kritérium dělitelnosti: *Přirozené číslo a je dělitelné **jedenácti**, právě když je jedenácti dělitelný součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu v zápisu čísla a.*

Součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu: 3 + 6 = 9
Součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu: 4 + 5 = 9
Rozdíl: 9 – 9 = 0, 0 je dělitelná číslem 11, tedy i číslo 4356 je dělitelné jedenácti

5. Dokažte kritérium dělitelnosti čtyřmi.

Přirozené číslo a je dělitelné **čtyřmi**, právě když je čtyřmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.

Řešení: Vyjdeme z rozvinutého zápisu čísla a v desítkové soustavě:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 =$$
$$= 10^2 \cdot (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots\ldots + a_2) + a_1 \cdot 10^1 + a_0 =$$
$$= \underbrace{4 \cdot 25 \cdot (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots\ldots + a_2)}_{\text{číslo dělitelné čtyřmi (označení } c_1)} + \underbrace{a_1 \cdot 10^1 + a_0}_{\text{číslo zapsané posledním dvojčíslím (označení } c_2)}, \quad \text{tedy} \quad a = c_1 + c_2 .$$

Dokážeme implikaci: Jestliže je přirozené číslo a dělitelné čtyřmi, pak je čtyřmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.

Číslo a je vyjádřeno jako součet dvou čísel, z nichž první (c_1) je dělitelné 4, tj. $a = 4 \cdot x + c_2$.
Podle *věty 2* dává číslo $c_2 = a_1 \cdot 10^1 + a_0$ při dělení čtyřmi stejný zbytek jako číslo a. Je-li tedy číslo a dělitelné čtyřmi, pak i číslo c_2 dělitelné čtyřmi. Číslo $c_2 = a_1 \cdot 10^1 + a_0$ je číslo zapsané posledním dvojčíslím v zápisu čísla a.

Dokážeme implikaci: Jestliže je čtyřmi dělitelné číslo zapsané posledním dvojčíslím přirozeného čísla a, pak je čtyřmi dělitelné číslo a.

Předpokládejme, že číslo c_2 zapsané posledním dvojčíslím přirozeného čísla a, je dělitelné čtyřmi, tedy $c_2 = 4 \cdot y$.
Víme z rozvinutého zápisu čísla a v desítkové soustavě, že číslo c_1 je dělitelné čtyřmi. Tedy číslo $a = c_1 + c_2$ lze zapsat jako $a = 4 \cdot x + 4 \cdot y = 4 \cdot (x + y)$, z čehož je zřejmé, že číslo a je dělitelné čtyřmi.