

The logo for Masaryk University (MUNI) in Brno, consisting of the letters M, U, N, and I in a stylized blue font on a black rectangular background.

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

Možnosti distanční výuky

Aritmetika 2
IMAp04 (jaro 2020)

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

Prvočísla a čísla složená

Aritmetika 2

IMAp04 (jaro 2020)

Prezentace č. 2



PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Definice:

Přirozené číslo $p > 1$ nazýváme **prvočíslem**, právě když má právě dva různé přirozené dělitele (tj. čísla 1 a p).

Přirozené číslo $a > 1$, které není prvočíslem (tj. má více než dva přirozené dělitele), nazýváme **složeným číslem**.

Příklad 1:

- Číslo 7 je prvočíslo, protože má právě dva přirozené dělitele, čísla 1 a 7. Jsou to samozřejmě dělitelé čísla 7.
- Číslo 6 je složené číslo, protože má více než dva přirozené dělitele: 1, 2, 3, 6.
- Číslo 1 podle definice není prvočíslo ani číslo složené.

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Máme-li rozhodnout o tom, zda dané číslo $a > 1$ je prvočíslem nebo složeným číslem, můžeme postupovat tak, že zjišťujeme, zda je dané číslo dělitelné prvočísly menšími než toto číslo. Platí totiž matematická věta:

Existuje-li prvočíslo menší než číslo a , které dělí číslo a , pak a je složené číslo.

Příklad 2:

Rozhodněte, zda číslo 143 je prvočíslo nebo číslo složené.

Řešení:

- 2 † 143
- 3 † 143
- 5 † 143
- 7 † 143
- 11 | 143

Číslo 143 je dělitelné číslem 11, jedná se o číslo složené...

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Postup z předchozího slidu je značně zdlouhavý. Proto budeme využívat následující věty:

Jestliže přirozené číslo a není dělitelné žádným prvočíslem menším nebo rovným \sqrt{a} , pak a je prvočíslo.

Příklad 3:

Rozhodněte a zdůvodněte, zda číslo 1007 je prvočíslo nebo číslo složené.

Řešení:

- Určíme $\sqrt{1007}$
- $\sqrt{1007} \doteq 31,7$
- Postupně dělíme číslo 1007 prvočísly menšími nebo rovnými číslu 31.
- $2 \nmid 1007$, $3 \nmid 1007$, $5 \nmid 1007$, $7 \nmid 1007$, $11 \nmid 1007$, $13 \nmid 1007$, $17 \nmid 1007$,
 $19 \mid 1007$

Číslo $1007 = 19 \cdot 53$, tj. číslo 1007 je číslo složené.

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Příklad 4:

Rozhodněte a zdůvodněte, zda číslo 1009 je prvočíslo nebo číslo složené.

Řešení:

- Určíme $\sqrt{1009}$
- $\sqrt{1009} \doteq 31,7$
- Postupně dělíme číslo 1009 prvočísly menšími nebo rovnými číslu 31.
- $2 \nmid 1009$, $3 \nmid 1009$, $5 \nmid 1009$, $7 \nmid 1009$, $11 \nmid 1009$, $13 \nmid 1009$,
 $17 \nmid 1009$, $19 \nmid 1009$, $23 \nmid 1009$, $29 \nmid 1009$, $31 \nmid 1009$.

Číslo 1009 je prvočíslo.

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Příklad 5:

Rozhodněte a zdůvodněte, zda čísla 2487, 2771, 437, 593 jsou prvočísla nebo čísla složená.

Příklad 6:

Najděte alespoň tři prvočísla větší než 120 a menší než 150.

Příklad 7:

Najděte největší prvočíslo, kterým je dělitelné číslo

a) 1 326

b) 2406

c) 4 380

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Každé složené číslo a lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru součinu konečného počtu prvočísel

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}.$$

p_1, p_2, \dots, p_k jsou prvočísla,

e_1, e_2, \dots, e_k jsou nenulová přirozená čísla.

Pak zápis $a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$ se nazývá **prvočíselný rozklad přirozeného čísla a** a p_1, p_2, \dots, p_k jsou tzv. **prvočinitelé rozkladu**.

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

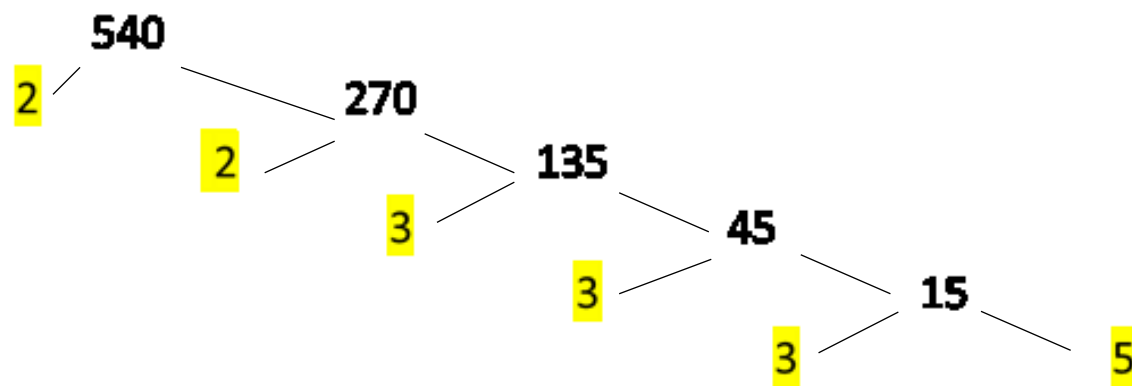
Příklad 8:

Zapište prvočíselný rozklad čísla 540.

Řešení:

$$540 = 2 \cdot 270 = 2 \cdot 2 \cdot 135 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

540	
2	270
2	135
3	45
3	15
3	5
5	1



PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Příklad 9:

Zapište prvočíselný rozklad čísel 96, 500, 2024.

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Příklad 10:

Najděte aspoň tři přirozená čísla, která jsou dělitelná

- a) všemi jednocifernými prvočísly,
- b) všemi přirozenými čísly od jedné do deseti.

V obou případech určete nejmenší takové číslo.

Řešení:

a) Jednociferná prvočísla: 2, 3, 5, 7

Přirozená čísla, která jsou dělitelná čísly 2, 3, 5, 7:

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ nejmenší přirozené číslo dělitelné čísly 2,3,5,7

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = 210 \cdot 2 = 420$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 210 \cdot 3 = 630$

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Řešení:

b) Hledáme přirozená čísla, která jsou dělitelná všemi přirozenými čísly od jedné do deseti, tj.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$$

1, 2, 3, 2.2, 5, 2.3, 7, 2.2.2, 3.3, 2.5

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 = 2520$... nejmenší přirozené číslo dělitelné všemi přirozenými čísly od jedné do deseti

$$2520 \cdot 2 = 5040$$

$$2520 \cdot 3 = 7560$$

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Příklad 11:

Dokažte, že každé prvočíslo větší než 3 je možno vyjádřit buď ve tvaru $6k+1$ nebo ve tvaru $6k+5$, kde k je přirozené číslo.

Řešení:

$$m = 6 \quad C_6 = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$$

C_0 : $C_0 = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$, $x = 6.k$ x není prvočíslo

C_1 : $C_1 = \{1, 7, 13, 19, 25, \dots\}$, $x = 6.k + 1$

C_2 : $C_2 = \{2, 8, 14, 20, 26, \dots\}$, $x = 6.k + 2 = 2(3.k + 1)$ x není prvočíslo

C_3 : $C_3 = \{3, 9, 15, 21, 27, \dots\}$, $x = 6.k + 3 = 3(2.k + 1)$ x není prvočíslo

C_4 : $C_4 = \{4, 10, 16, 22, 28, \dots\}$, $x = 6.k + 4 = 2(3.k + 2)$ x není prvočíslo

C_5 : $C_5 = \{5, 11, 17, 23, 29, \dots\}$, $x = 6.k + 5$

Každé prvočíslo větší než 3 je možno vyjádřit buď ve tvaru $6k+1$ nebo ve tvaru $6k+5$, kde $k \in \mathbb{N}$.

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Příklad 12:

Určete všechna prvočísla od 1 do 100.

Algoritmus hledání všech prvočísel od 1 do 100 se provádí pomocí tzv. Eratostenova síta*.

* **Eratostenés z Kyrény** (3. – 2. stol. př. n. l.) byl řecký [matematik](#), [astronom](#).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

Řešení:

1 - není prvočíslo - označíme

2 je prvočíslo (necháme), všechny násobky 2 označíme

3 je prvočíslo (necháme), všechny násobky 3 označíme

5 je prvočíslo (necháme), všechny násobky 5 označíme

7 je prvočíslo (necháme), všechny násobky 7 označíme

Všechna zbylá čísla jsou již prvočísla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

