Možnosti distanční výuky

Aritmetika 2

IMAp04 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

Největší společný dělitel

Aritmetika 2

IMAp04 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

Prezentace č. 3

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Definice:

Společný dělitel přirozených čísel *a, b* je každé přirozené číslo *d*, pro které platí $d|a$ a $d|b$.

Největší společný dělitel přirozených čísel *a, b* je ten ze společných dělitelů, který je dělitelný všemi společnými děliteli čísel *a, b*. Označujeme **D(*a,b*).**

- V množině přirozených čísel lze též říci, že největší společný dělitel čísel *a, b* je největší (maximální) číslo ze společných dělitelů čísel *a, b*.
- Největší společný dělitel čísel *a, b* můžeme určit různými způsoby:

a) využitím definice,

b) pomocí tzv. Euklidova algoritmu,

c) pomocí rozkladu daných čísel na součin prvočinitelů

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 1:

Určete množinu všech společných dělitelů čísel 24 a 30 a největšího společného dělitele čísel 24 a 30.

--

Řešení - dle způsobu a)

Číslo 24 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Číslo 30 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Množina všech společných dělitelů čísel 24 a 30 je $\{1, 2, 3, 6\}$.

Největší společný dělitel D(24,30) = 6

(číslo 6 je dělitelné všemi společnými děliteli čísel 24 a 30, tj. platí

$1 \mid 6$, $2 \mid 6$, $3 \mid 6$, $6 \mid 6$).

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Věta 3:

Jestliže přirozené číslo *a* dává při dělení nenulovým přirozeným číslem *b* nenulový zbytek *z*, tzn. $a = b \cdot q + z$ a $z < b$, pak platí, že množina všech společných dělitelů čísel *a, b* je množinou všech společných dělitelů čísel *b, z*. Také největší společný dělitel čísel *a, b* je roven největšímu společnému děliteli čísel b, z, tj. D(*a*,*b*) = D(*b*,*z*).

- Tím převádíme problém určení D(a,b) na určení D(*b,z*). Přitom $b < a$, $z < b$.
- Na *větě 3* je založen postup výpočtu největšího společného dělitele dvou přirozených čísel *a, b* nazývaný **Euklidův algoritmus.** Použití Euklidova algoritmu ukážeme na příkladu:

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 2:

Určete největší společný dělitel čísel 268 a 80 *pomocí Euklidova algoritmu*.

Řešení - dle způsobu b)

- 268 : 80 = 3 neboli 268 = 80 . 3 + 28

  28
- 80 : 28 = 2 80 = 28 . 2 + 24

  24
- 28 : 24 = 1 28 = 24. 1 + $\boxed{4}$

  4
- 24 : 4 = 6 24 = 6 . 4 + 0

  0

D(268,80) = D(80,28) = D(28,24) = D(24,4) = 4

Největší společný dělitel čísel 268 a 80 je číslo 4, tj. poslední nenulový zbytek při postupném dělení Euklidova algoritmu.

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 3:

Určete největší společný dělitel čísel 96 a 64 pomocí rozkladu na prvočinitele.

Řešení - dle způsobu c)

Určíme rozklad na prvočinitele čísel 96 a 64.

$96 = 2^5 \cdot 3$

$64 = 2^6$

D(96,64) určíme jako součin prvočísel, které jsou obsaženy současně v rozkladech obou čísel s menším exponentem.

$D(96,64) = 2^5 = 32$

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 4:

Určete největší společný dělitel čísel 360 a 504

a) pomocí Euklidova algoritmu,

b) pomocí rozkladu na prvočinitele.

Příklad 5:

Určete největší společný dělitel čísel 455 a 273

a) pomocí Euklidova algoritmu,

b) pomocí rozkladu na prvočinitele.

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Definice:

Přirozená čísla *a, b* se nazývají **nesoudělná** právě tehdy, když je jejich největší společný dělitel roven 1, tj. **D(*a,b*) = 1.**

Přirozená čísla *a, b* se nazývají **soudělná** právě tehdy, když je jejich největší společný dělitel větší než 1, tj. **D(*a,b*) > 1.**

- Čísla 4 a 3 jsou nesoudělná, neboť D(4,3) = 1

Tato definice se dá rozšířit na konečný počet přirozených čísel:

1) Čísla 4, 3, 7, 5 jsou nesoudělná, neboť D(4,3,7,5) = 1,
2) Čísla 8, 12 jsou soudělná, neboť D(8,12) > 1.

MUNI

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 6:

Kolik různých obdélníků lze vymodelovat ze 60i shodných čtverců?

Řešení:

60 shodných čtverců lze poskládat do obdélníků o rozměrech:

1 x 60

2 x 30

3 x 20

4 x 15

5 x 12

6 x 10 *Celkem lze vymodelovat 6 různých obdélní*

M U N I

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 7:

Obdélník o rozměrech 56 cm a 98 cm se má rozdělit příčkami rovnoběžnými se stranami obdélníku na čtverce co možná největší. Kolik bude čtverců a jaká bude délka jejich strany?

Řešení:

$56 = 7 \cdot 2^3$

$98 = 2 \cdot 7^2$

D(98,56) = 2 . 7 = 14 cm

98 : 14 = 7

56 : 14 = 4

Strana čtverců je 14 cm, celkový počet čtverců je 4 . 7 = 28.

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 8:

Určete všechny přirozené dělitele čísla 72.

Řešení:

$72 = 2 \,.\, 36 = 2 \,.\, 2 \,.\, 18 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 9 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 = 2^3 \,.\, 3^2$

	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^0 = 1$	1	2	4	8
$3^1 = 3$	3	6	12	24
$3^2 = 9$	9	18	36	72

Všichni přirození dělitelé čísla 72 jsou uvedeni v tabulce, tj. jsou to čísla: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

M U I

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 9:

Určete všechny přirozené dělitele čísla 180.

Řešení:

$180 = 2 \,.\, 90 = 2 \,.\, 2 \,.\, 45 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 15 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5$

	$3^0 . 5^0 = 1$	$3^1 . 5^0 = 3$	$3^0 . 5^1 = 5$	$3^1 . 5^1 = 15$	$3^2 . 5^0 = 9$	$3^2 . 5^1 = 45$
$2^0 = 1$	1	3	5	15	9	45
$2^1 = 2$	2	6	10	30	18	90
$2^2 = 4$	4	12	20	60	36	180

Všichni přirození dělitelé čísla 180 jsou uvedeni v tabulce, tj. jsou to čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180.

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Poznámka:

Uvažujme prvočíselný rozklad složeného čísla a:

$$a = p_1^{e_1} \,.\, p_2^{e_2} \,.\, \ldots. \,.\, p_k^{e_k}.$$

$p_1, p_2,\ldots, p_k$ jsou prvočísla,

$e_1, e_2,\ldots, e_k$ jsou nenulová přirozená čísla.

Pak počet všech dělitelů čísla vyjádříme jako

Ověříme si vzorec na předchozí úloze, kde a = 180:

$180 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5$ $\quad p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5 \quad e_1 = 2,\ e_2 = 2,\ e_3 = 1$

$$\tau = (e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot (e_3 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

Příklad 10:

Určete všechny přirozené dělitele čísel:

a) 100

b) 120

c) 350