Sbírka úloh STEREOMETRIE

Autoři: RNDr. Dag Hrubý, Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.
Přiložené CD: RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Grafická úprava a sazba: Marcel Vrbas

OBSAH

PŘEDMLUVA

Milé kolegyně, vážení kolegové, studenti,
dostáváte do rukou sbírku úloh ze stereometrie. Autoři sbírky se na základě svých zkušeností přiklání k názoru, že stereometrie představuje ve výuce matematiky partii, která patří k méně oblíbeným. Často se zdůrazňuje, že pro úspěšné studium stereometrie je nezbytná dobrá prostorová představivost, která je u některých studentů méně rozvinuta a bez které nelze učivo ze stereometrie pochopit. Tuto schopnost je však možné zdokonalovat a rozvíjet. Vedle tohoto, jistě důležitého předpokladu, jsou zde důvody další. K těm patří zejména změny v učebních plánech středních škol v posledních desetiletích, které vedly k omezování výuky geometrie. Geometrie je dotována menším počtem hodin a navíc z učebních plánů skoro vymizela deskriptivní geometrie. Autoři sbírky by rádi povzbudili nejen své kolegy učitele, ale i jejich studenty v hledání cesty ke stereometrii, která je krásnou disciplinou s bohatou historií. Právě prostřednictvím stereometrie se matematika velmi výrazně přibližuje k řešení celé řady praktických problémů.

Upřímně děkujeme RNDr. Lence Juklové, Ph.D. za kontrolu výsledků u polohových úloh a za pomoc při tvorbě CD.

SEZNAM POUŽÍVANÝCH SYMBOLŮ

A, B	body A, B
a, b	přímky a, b
$\leftrightarrow AB$	přímka A, B
$\rightarrow AB$	polopřímka AB
AB	úsečka AB
ρ,σ	roviny ρ,σ
$\leftrightarrow ABC$	rovina ABC
$\leftrightarrow Ap$	rovina Ap (rovina určená bodem A a přímkou p)
$\leftrightarrow pq$	rovina pq (rovina určená přímkami pq)
S_{AB}	střed úsečky AB
$\measuredangle AVB$	konvexní úhel AVB
$a \parallel b$	přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$a \nparallel b$	přímka a není rovnoběžná s přímkou b
$a \cap b = P$	průsečík P přímek a, b
$\alpha \cap \beta = p$	průsečnice p rovin α , β
$\lvert AB \rvert$	vzdálenost bodů A, B; délka úsečky AB
$\lvert Ap \rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert A\alpha \rvert$	vzdálenost bodu A od roviny α
$\lvert ab \rvert$	vzdálenost rovnoběžných přímek a, b
$\lvert \alpha\beta \rvert$	vzdálenost rovnoběžných rovin α, β
$\lvert \measuredangle AVB \rvert$	velikost konvexního úhlu AVB
$\lvert \measuredangle ab \rvert$	odchylka přímek a, b
$\lvert \measuredangle p\alpha \rvert$	odchylka přímky p a roviny α
$\lvert \measuredangle \alpha\beta \rvert$	odchylka rovin α, β
V	objem tělesa
S	povrch tělesa

A. ZÁKLADY STEREOMETRIE

A.1 Základní stereometrické pojmy

Stereometrie, neboli geometrie v prostoru se zabývá řešením prostorových geometrických úloh. Aby student byl schopen řešit úlohy na dané téma musí se seznámit s některými stereometrickými pojmy a větami.
Za základní útvary ve stereometrii považujeme **body, přímky a roviny**. Dále uvedeme jejich vlastnosti a vztahy.

URČENÍ PŘÍMKY

- dvěma různými body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ je určena jediná přímka.

URČENÍ ROVINY

- přímkou a bodem, který neleží na této přímce,
- třemi body, které neleží na jedné přímce,
- dvěma různoběžkami,
- dvěma různými rovnoběžkami.

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK $\boldsymbol{a, b}$

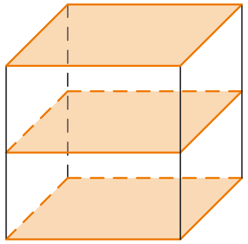
- rovnoběžné: $\boldsymbol{a, b}$ leží v téže rovině a současně $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \emptyset$ – různé,
- rovnoběžné splývající: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
- různoběžné: $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ – průsečík,
- mimoběžné: $\boldsymbol{a, b}$ neleží v téže rovině a současně $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \emptyset$.

VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU ROVIN $\boldsymbol{\alpha, \beta}$

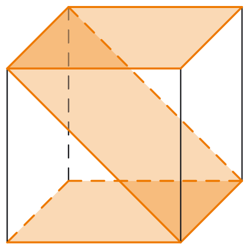
- rovnoběžné: $\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta} = \emptyset$ – různé,
- rovnoběžné splývající: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$,
- různoběžné: $\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$ – průsečnice.

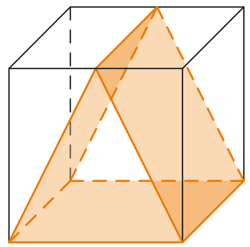
VZÁJEMNÁ POLOHA TŘÍ ROVIN

- Všechny tři roviny jsou navzájem rovnoběžné.

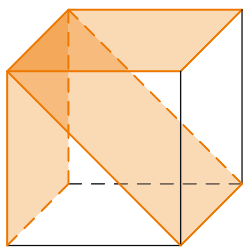


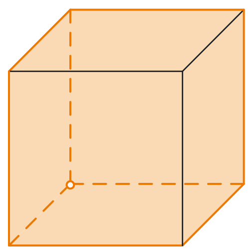
- Dvě roviny jsou rovnoběžné, třetí je protíná ve dvou rovnoběžných přímkách.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny tři průsečnice jsou navzájem rovnoběžné a různé.





- Každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny průsečnice splývají v jedinou přímku.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné, jejich průsečnice jsou navzájem různoběžné a protínají se v jednom společném bodě.





VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY $\boldsymbol{a}$ A ROVINY $\boldsymbol{\rho}$

- rovnoběžné: $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{\rho} = \emptyset$ – různé,
- přímka $\boldsymbol{a}$ leží v rovině $\boldsymbol{\rho}$: $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\rho}$,
- různoběžné: $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ – průsečík.

NĚKTERÉ DALŠÍ VLASTNOSTI BODŮ, PŘÍMEK A ROVIN:

- Bodem $\boldsymbol{A}$ lze vést právě jednu přímku $\boldsymbol{a}$ rovnoběžnou s přímkou $\boldsymbol{b}$.
- Leží-li dva různé body přímky $\boldsymbol{a}$ v rovině $\boldsymbol{\rho}$, pak každý bod přímky $\boldsymbol{a}$ leží v rovině $\boldsymbol{\rho}$.
- Mají-li dvě různé roviny $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ společný bod $\boldsymbol{A}$, pak mají i společnou přímku $\boldsymbol{a}$, která prochází bodem $\boldsymbol{A}$.
- Přímka $\boldsymbol{a}$ je rovnoběžná s rovinou $\boldsymbol{\rho}$, právě když v rovině $\boldsymbol{\rho}$ existuje přímka rovnoběžná s přímkou $\boldsymbol{a}$.
- Dvě roviny jsou rovnoběžné, právě když jedna z nich obsahuje dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s druhou rovinou.
- Daným bodem $\boldsymbol{A}$ lze vést jedinou rovinu $\boldsymbol{\alpha}$ rovnoběžnou s danou rovinou $\boldsymbol{\rho}$.

A.2 Zobrazování prostorových útvarů v rovině

Rovinu, do níž geometrické útvary rovnoběžně promítáme, nazýváme průmětnou. Tuto průmětnu ztotožňujeme s nákresnou, tj. s rovinou tabule nebo sešitu. K názornému zobrazování prostorových geometrických útvarů a k ilustraci řešení některých stereometrických úloh užíváme **volné rovnoběžného promítání**.

Při zobrazování prostorových geometrických útvarů ve VRP dodržujeme jednoduchá pravidla:

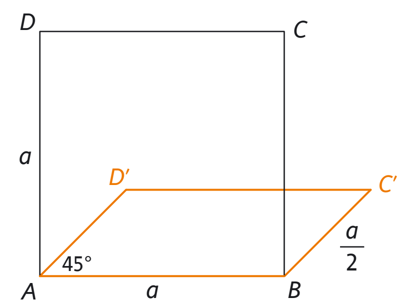
1. Body zobrazujeme jako body.
2. Přímky zobrazujeme jako přímky nebo jako body.
3. Zachováváme incidenci bodů a přímek.
4. Rovnoběžné přímky zobrazujeme jako rovnoběžky nebo jako body.
5. Zachováváme poměr velikostí rovnoběžných úseček.
6. Obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou zobrazujeme ve skutečné velikosti.

Při volném rovnoběžném promítání se jedná o zobrazení, ve kterém jsou bodům prostoru přiřazeny jisté body nákresny.
Pro názornost obrazů má praktický význam připojit následující úmluvy, které budeme respektovat:

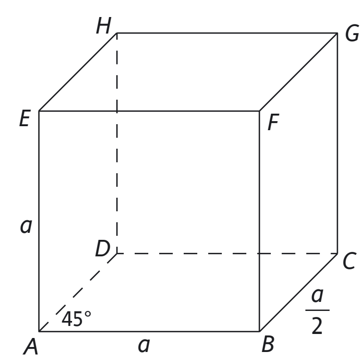
7. Obrazy přímek kolmých k průmětně (tyto přímky budeme nazývat **hloubkové**) kreslíme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou zvolený úhel, tzv. úhel zkosení. Většinou volíme úhel o velikosti 45°.
8. Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme na polovinu jejich skutečné velikosti.

PRO NÁZORNOST ZOBRAZÍME NĚKOLIK ÚTVARŮ A TĚLES:

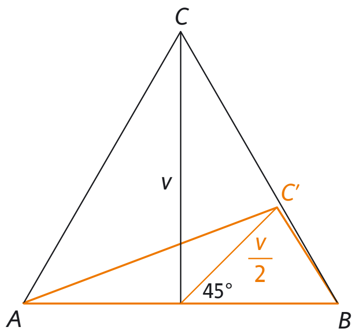
- čtverec *ABCD*



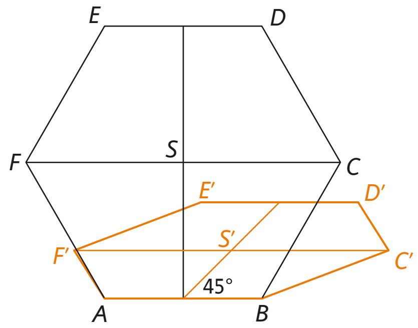
- krychle *ABCDEFGH*



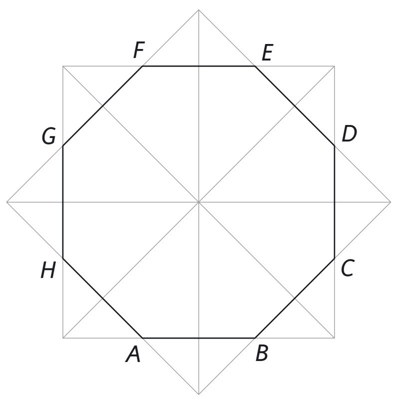
- rovnostranný trojúhelník *ABC*

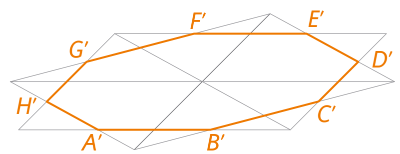


- pravidelný šestiúhelník *ABCDEF*

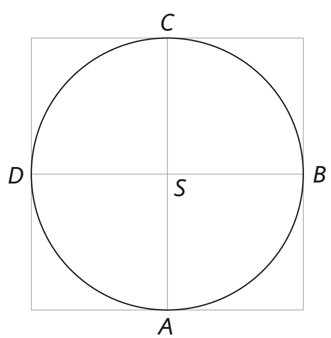


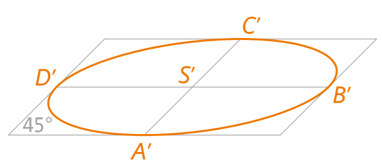
- pravidelný osmiúhelník *ABCDEFGH*



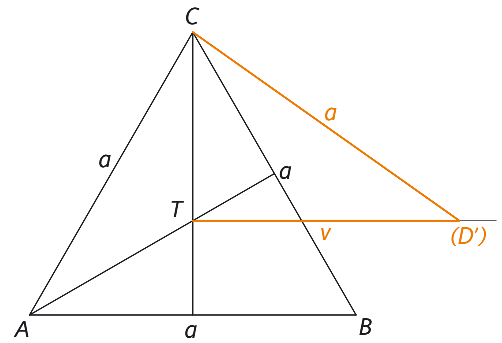


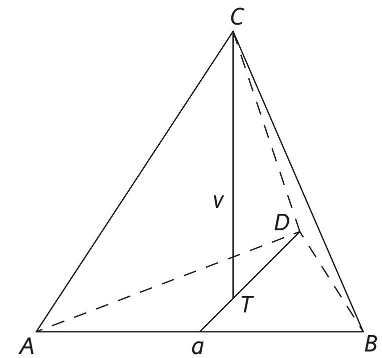
- kružnice (obrazem kružnice je elipsa)



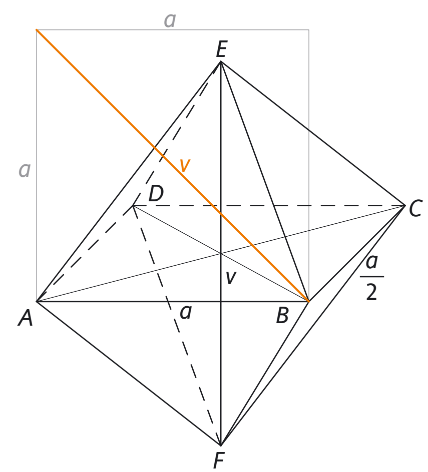


- pravidelný čtyřstěn *ABCD*
(Ke konstrukci pravidelného čtyřstěnu je nutné určit jeho výšku, a to tak, že sklopíme rovinu, která obsahuje výšku tělesa a hranu CD, do roviny podstavy.)

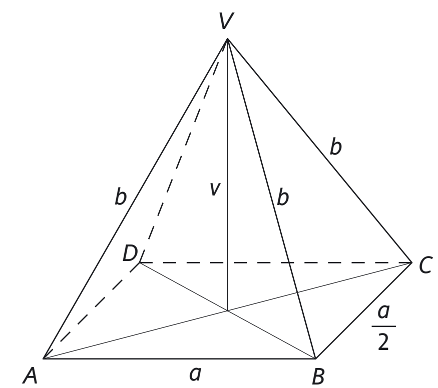




- pravidelný osmistěn *ABCDEF*



- pravidelný čtyřboký jehlan *ABCD*



B. POLOHOVÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU

B.1 Vzájemná poloha čtyř bodů

1.

Je dána krychle $ABCDEFGH$.

a) zjistěte, zda body E, G, B, X leží v jedné rovině. Bod X je střed hrany BF
b) zjistěte, zda body A, C, K, L leží v jedné rovině. Body K, L jsou středy hran EF, FG
c) zjistěte, zda body K, L, B, X leží v jedné rovině. Bod K je střed hrany AE, bod L je střed hrany DH a bod X leží na hraně EF a platí $|XE| = 2|XF|$.
d) zjistěte, zda v krychli $ABCDEFGH$ leží uvedené body K, L, M, S v jedné rovině. Bod K je střed hrany AE, bod L je střed hrany DH, bod M je střed hrany BF a bod S je střed krychle

2.

Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$. Zjistěte, zda uvedené body B, D, F, K leží v jedné rovině. Bod K leží na úhlopříčce EF a platí $3|EK| = |FK|$.

B.2 Vzájemná poloha dvou přímek

3.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) AS_{GH} a $S_{AB}D$
b) AP a BS_{CG}, bod P je střed stěny $CDGH$
c) AP a $S_{AE}S_{GH}$, bod P je střed stěny $CDGH$
d) AS_{GH} a EC
e) $S_{AB}S_{AD}$ a FH
f) AH a $S_{BF}G$
g) BD a $S_{BF}H$
h) BH a $S_{AE}S_{CG}$

4.

V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) AS_{DV} a BS_{CV}

b) AB a $S_{CV}S_{DV}$
c) BV a CD
d) CV a $S_{AB}S_{AV}$
e) DV a $S_{DB}S_{BV}$

5.

V pravidelném osmistěnu *ABCDEF* rozhodněte o vzájemné poloze přímek:
a) DS_{AF} a BS_{CE}
b) AS_{CE} a $S_{AF}S_{CF}$
c) AD a CS_{BF}

B.3 Průnik roviny a tělesa

Při konstrukci řezů na tělesech se řídíme těmito třemi pravidly:

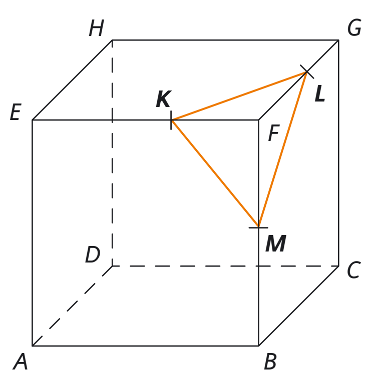
- **pravidlo č. 1:** strany řezu tvoří body, které leží v jedné stěně tělesa, (lze spojit body ležící v téže rovině stěny tělesa),
- **pravidlo č. 2:** strany řezu, které leží v rovnoběžných rovinách jsou navzájem rovnoběžné,
- **pravidlo č. 3:** jestliže dvě průsečnice tří rovin procházejí jedním bodem, musí jím procházet také třetí průsečnice.

Poznámka: V zadání příkladů nebude výslovně uváděno, kde body určující rovinu řezu leží, a tudíž čtenář se bude orientovat podle obrázku.

6.

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *KLM*.

Řešení:

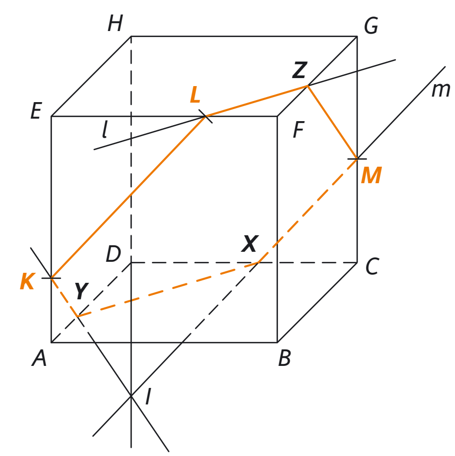


Rovina řezu je určena body *KLM*. Protože bod *K* leží na hraně *EF*, bod *L* leží na hraně *FG* a body *EFG* určují rovinu, ve které leží horní podstava *EFGH* krychle *ABCDEFGH*, proto v této rovině musí ležet i přímka *KL*, proto spojíme body *KL* a úsečka *KL* tak určuje jednu stranu řezu.
Analogicky totéž provedeme s body *LM* a *KM*, tedy podle pravidla č. 1 spojíme body *KL*, *LM* a *MK*, čímž je řez sestrojený.

7.

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *KLM*.

Řešení:

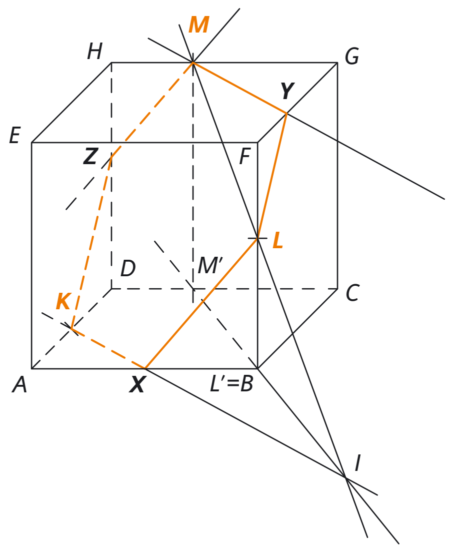


1. Body *KL* leží v téže rovině stěny *ABEF* a podle pravidla č. 1 tvoří stranu řezu.
2. Roviny *ABF* a *DCG* jsou rovnoběžné, takže podle pravidla č. 2 vedeme bodem *M* rovnoběžku m s *KL*.
3. Průnik přímky m a hrany *DC* je bod *X*.
4. Další body řezu sestrojíme užitím pravidla č. 3. Roviny *ADH*, *CDG* a *KLM* se protínají v jednom bodě $I \in DH$, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. *ADH* a *CDG* se protínají v přímce HD a na ní bude ležet bod I, jímž procházejí další dvě průsečnice. Tento bod *I* určíme jako průsečík přímek *HD* a *m*. Přímka *IK* je průsečnice rovin *ADH* a *KLM*.
5. Bod řezu *Y* je průsečíkem přímky *KI* s hranou *AD*.
6. Bodem *L* vedeme rovnoběžku l s *XY*.
7. Průnik přímky l a hrany *FG* je bod *Z*.
8. Řez je určen body *LZMXYK*.

8.

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *KLM*.

Řešení:

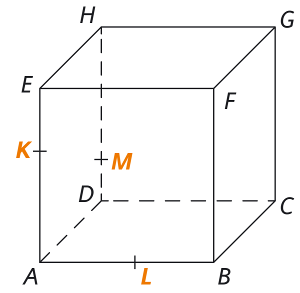


1. Nemůžeme využít žádné pravidlo. Sestrojíme průsečík přímky *LM* s rovinou podstavy *ABC*, a to tak, že sestrojíme pravoúhlý průmět této přímky do roviny stěny *ABC*, což je přímka *L´M´*. Průsečík přímky *LM* s *L´M´* je bod *I*, což je průsečík přímky *LM* s rovinou podstavy *ABC*.
2. Sestrojíme přímku *KI* a její průsečík s hranou *AB* je další bod řezu *X*.
3. Spojíme *LX*.
4. Bodem *M* vedeme rovnoběžku m s přímkou *KX* a její průsečík s hranou *FG* je bod řezu *Y*.
5. Spojíme *LY*.
6. Dále bodem *M* vedeme rovnoběžku *l* s přímkou *LX*.
7. Bod *Z*, který je průsečíkem přímky *l* a hrany *HD*, je bodem řezu a spojíme ho s bodem *K*.

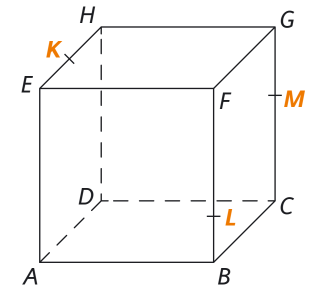
9.

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *KLM*.

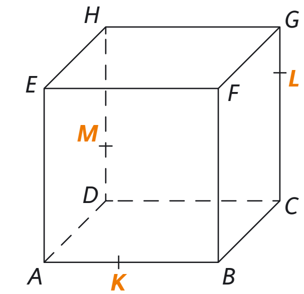
a)



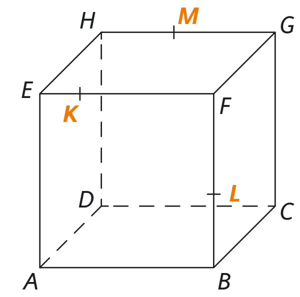
b)



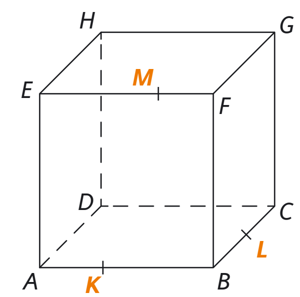
c)



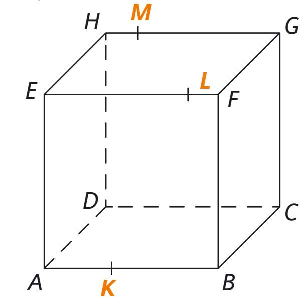
d)



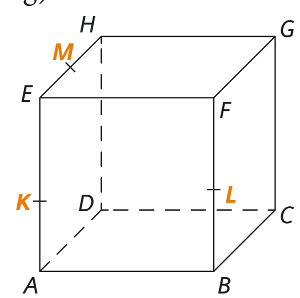
e)



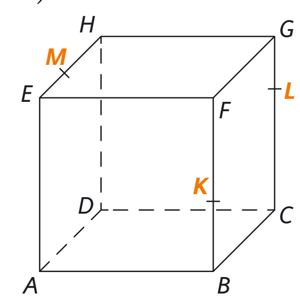
f)



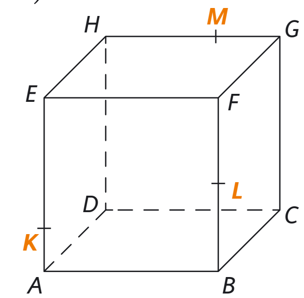
g)



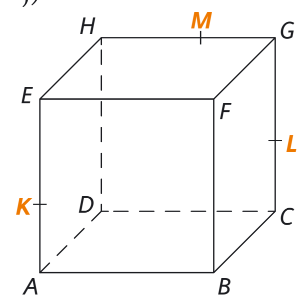
h)



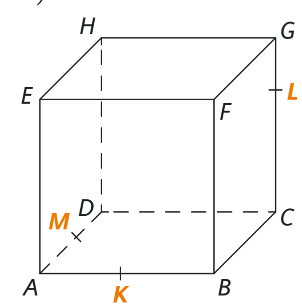
i)



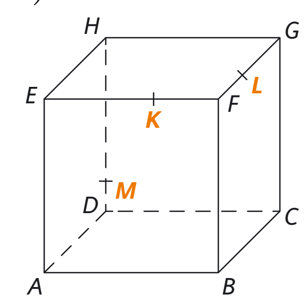
j)



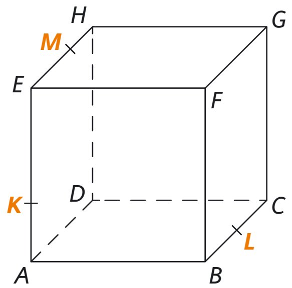
k)



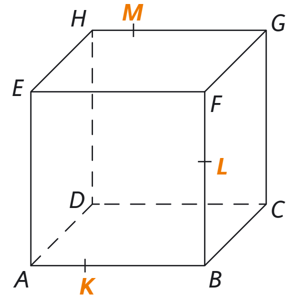
l)



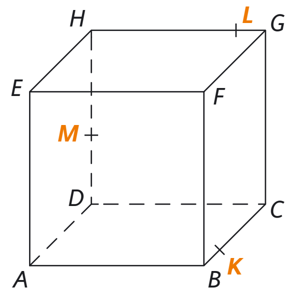
m)



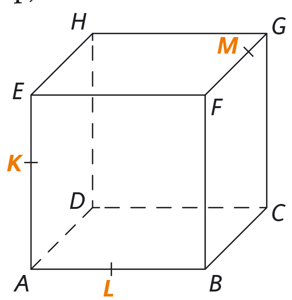
n)



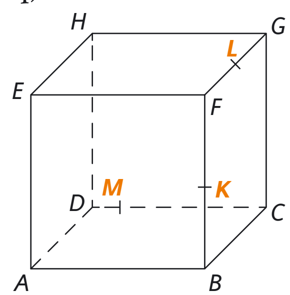
o)



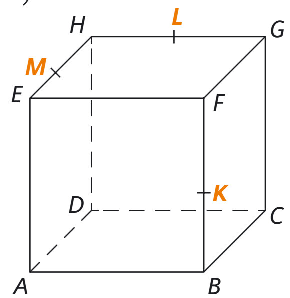
p)



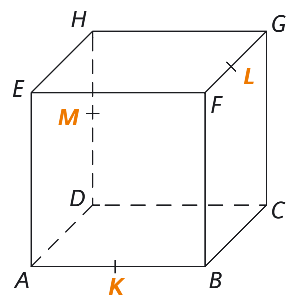
q)



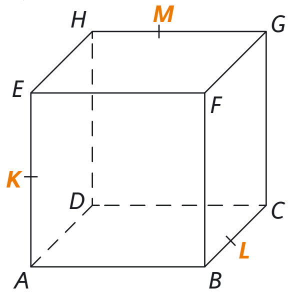
r)



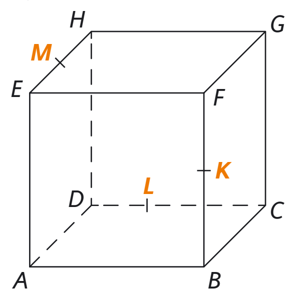
s)



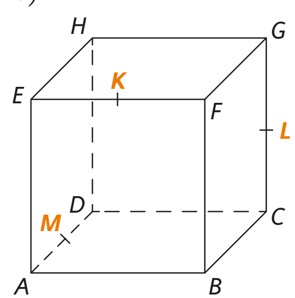
t)



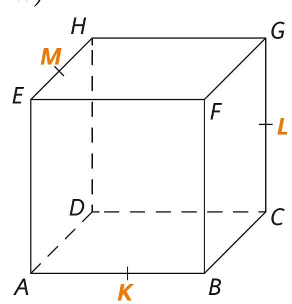
u)



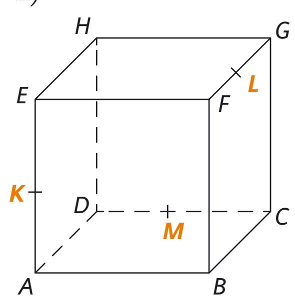
v)



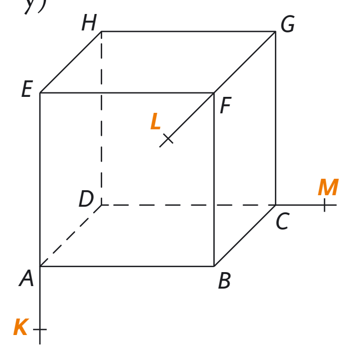
w)



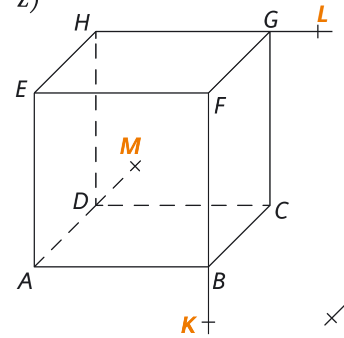
x)



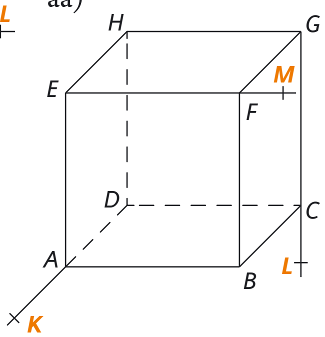
y)



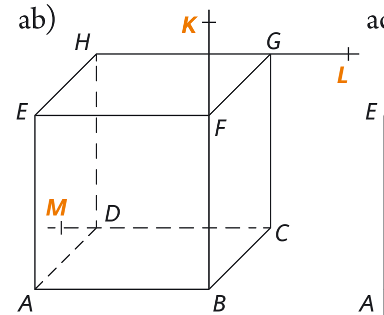
z)



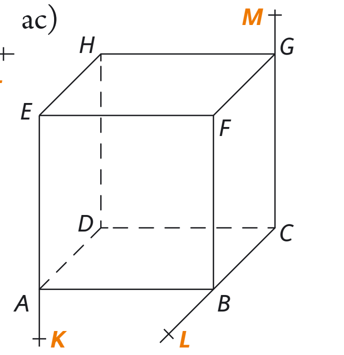
aa)



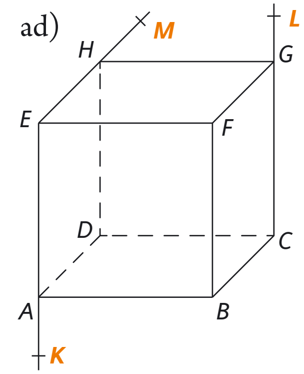
ab)



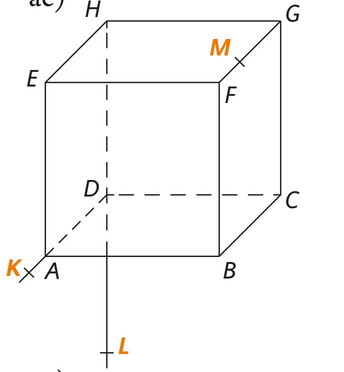
ac)



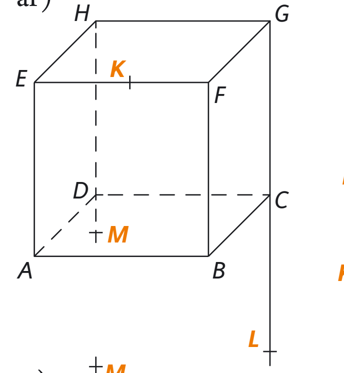
ad)



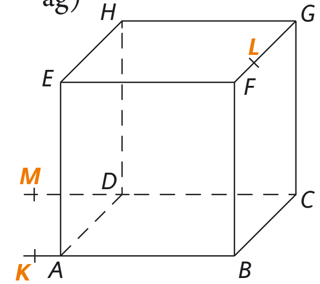
ae)



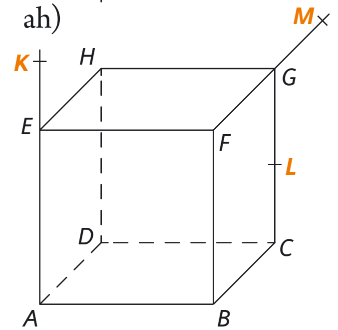
af)



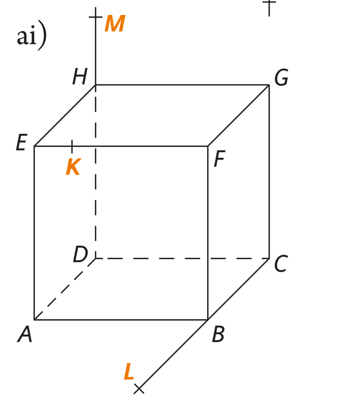
ag)



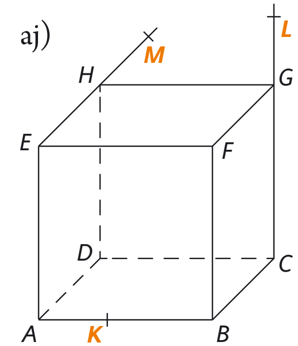
ah)



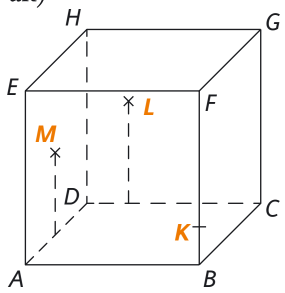
ai)



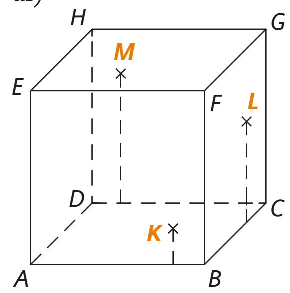
aj)



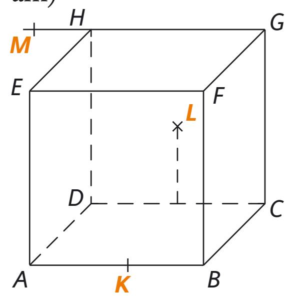
ak)



al)



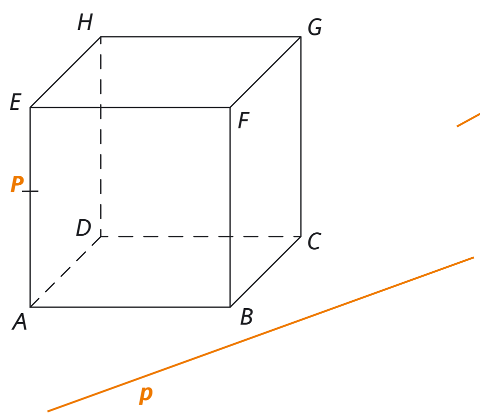
am)



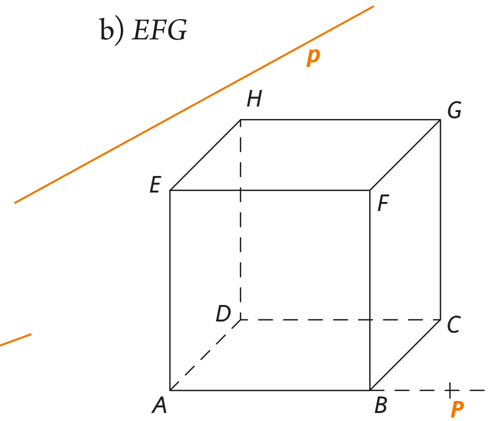
10.

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou bodem *P* a přímkou *p*, jestliže přímka *p* leží v rovině

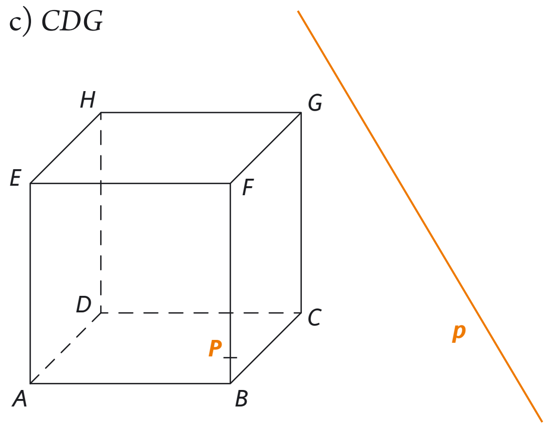
a) *ABC*



b) *EFG*



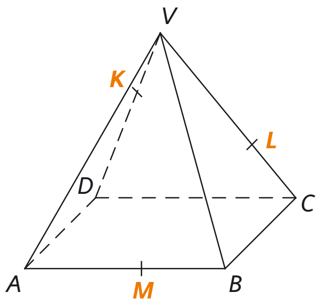
c) *CDG*



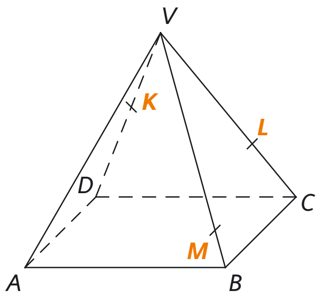
11.

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou *KLM*.

a)

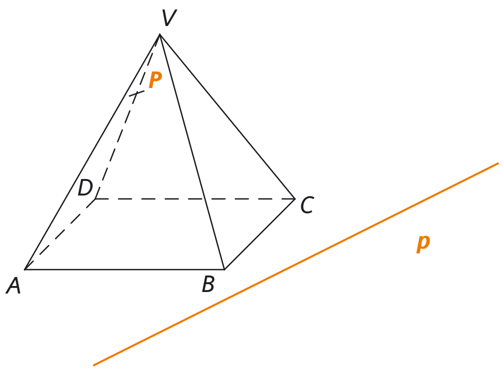


b)



12.

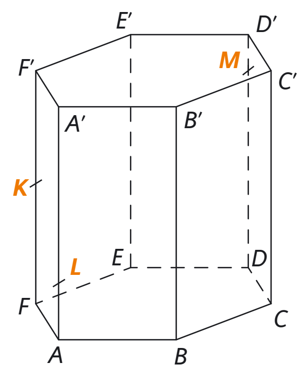
Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou bodem *P* a přímkou *p*, jestliže přímka p leží v rovině *ABC*.



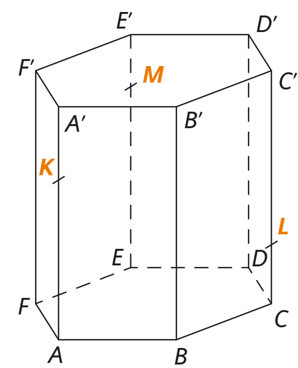
13.

Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu *ABCDEFA′B′C′D′E′F′* rovinou *KLM*.

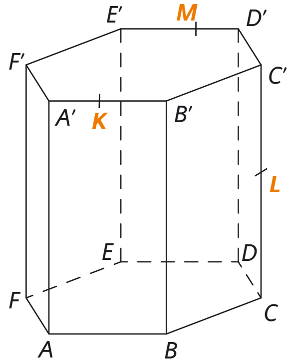
a)



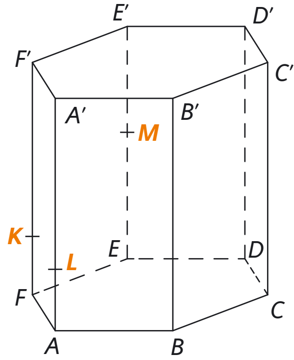
b)



c)



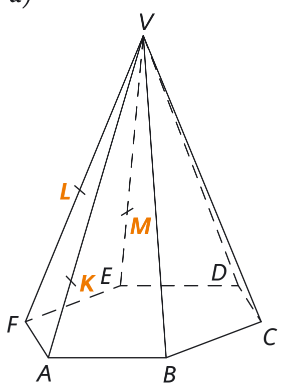
d)



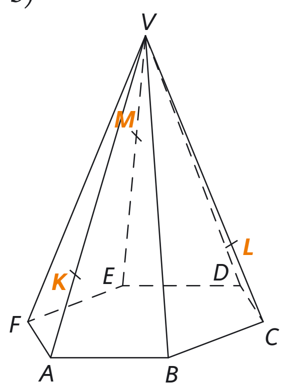
14.

Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV* rovinou *KLM*.

a)



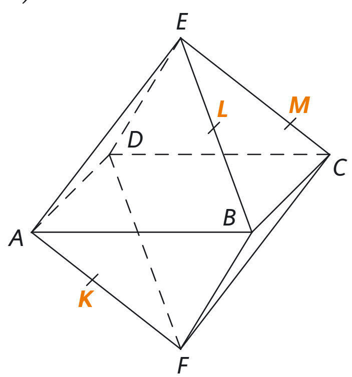
b)



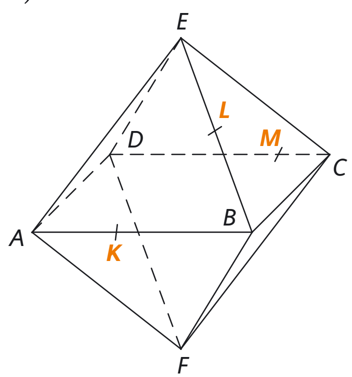
15.

Sestrojte řez pravidelného osmistěnu *ABCDEF* rovinou *KLM*.

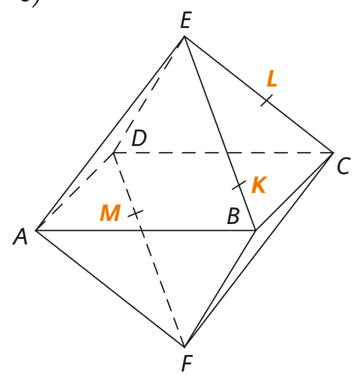
a)



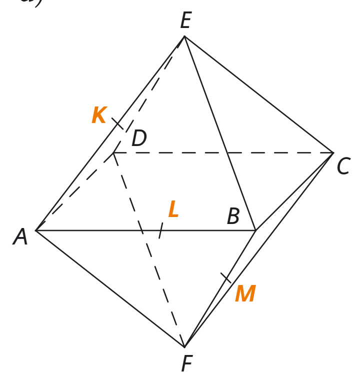
b)



c)



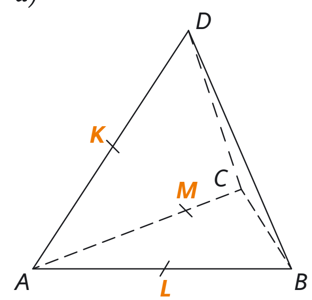
d)



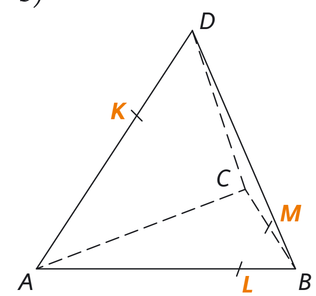
16.

Sestrojte řez pravidelného čtyřstěnu *ABCD* rovinou *KLM*.

a)

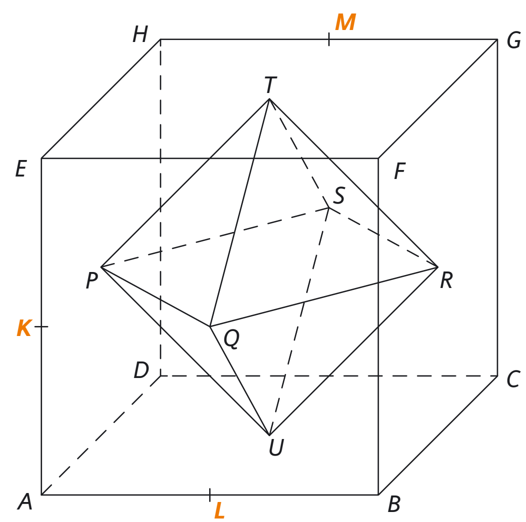


b)



17.

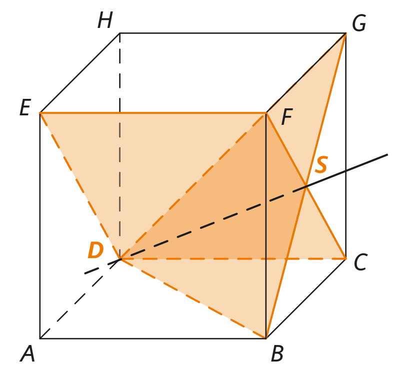
Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* a současně řez pravidelného osmistěnu *PQRSTU* rovinou *KLM*.



B.4 Vzájemná poloha dvou rovin

18.

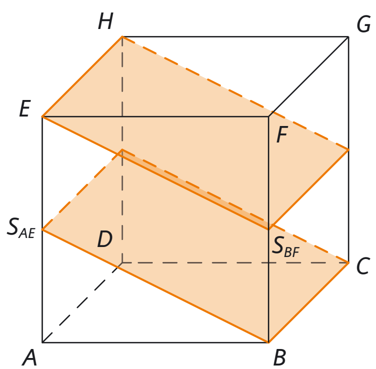
Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin CEF a BDG, je-li dána krychle $ABCDEFGH$, v případě různoběžných rovin sestrojte jejich průsečnici.



Roviny CEF a BDG jsou různé a mají společný bod D, tedy průsečnice těchto rovin musí procházet bodem D. Dále platí pro různoběžné přímky BG a CF, které leží v rovině stěny krychle BCF, že BG leží v rovině BDG a CF leží v rovině CEF, proto bod $S = BG \cap CF$ náleží současně oběma rovinám a je dalším bodem průsečnice p. Protože je $D \neq S$, je přímka $p = DS$ hledanou průsečnicí rovin CEF a BDG.

19.

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin BCS_{AE} a EHS_{BF}, je-li dána krychle $ABCDEFGH$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici.



Ukážeme, že rovina EHS_{BF} je rovnoběžná s rovinou BCS_{AE}. V rovině EHS_{BF} si vybere např. přímky EH a ES_{BF} a ukážeme, že tyto přímky jsou rovnoběžné s rovinou BCS_{AE}. Přímka EH je rovnoběžná s přímkou $S_{AE}S_{DH}$ a přímka ES_{BF} je rovnoběžná s přímkou $S_{AE}B$, tedy v rovině EHS_{BF} existují dvě různoběžné přímky rovnoběžné s rovinou BCS_{AE}, a proto jsou roviny BCS_{AE} a EHS_{BF} rovnoběžné.

20.

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin, je-li dána krychle $ABCDEFGH$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici.

a) BFS_{AC}, HFS_{EH}
b) AFH, BDG
c) EFG, BCS_{AE}
d) ABS_{DH}, $S_{AB}S_{CG}S_{CH}$
e) ACE, AFH
f) EGS_{BC}, BHF
g) ABG, HFS_{AD}
h) ABC, FHS_{AE}
i) ABC, AFH
j) ACF, CGS_{AB}
k) ACH, $S_{AB}S_{BC}S_{EF}$
l) $AS_{EF}S_{EH}$, CDS_{FG}
m) BEG, $S_{AB}S_{BC}S_{CG}$
n) $AS_{EF}S_{EH}$, $CS_{FG}S_{HG}$
o) BCS_{AE}, $BS_{EF}S_{FG}$
p) ACS_{DH}, BCS_{EF}

21.

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin, je-li dán jehlan $ABCDV$, v případě různoběžných rovin určete jejich průsečnici.

a) BVS_{AD}, $DS_{BC}S_{CV}$
b) ACV, BDS_{CV}
c) BCV, ADV
d) ACS_{CV}, $VS_{AD}S_{BC}$
e) BDV, $S_{BC}S_{CV}K$, $K \in AD \wedge |DK| = 3|AK|$
f) ABC, $S_{CV}S_{AV}K$, $K \in BV \wedge |VK| = 3|BK|$
g) BCV, $S_{AV}CK$, $K \in AB \wedge |AK| = 3|BK|$

22.

Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin BDS_{AF} a $S_{AE}S_{BE}S_{CE}$, je-li dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$.

B.5 Vzájemná poloha tří rovin

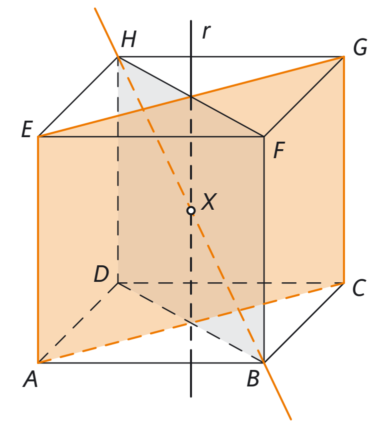
23.
Je dána krychle *ABCDEFGH*. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin.
a) ECG, BDF, ABH
b) BCE, ADF, $S_{AE}S_{CG}S_{AF}$
c) ADE, BCS_{EF}, $S_{AF}S_{CG}S_{BF}$
d) BDG, BDE, $S_{EF}S_{FG}S_{EH}$
e) BDH, $S_{AB}S_{AD}S_{AE}$, $S_{FG}S_{GH}S_{CG}$
f) AGH, $S_{BF}S_{CG}S_{GH}$, $S_{AE}S_{AB}S_{CD}$.

24.
Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin.
a) ACV, BDV, $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$
b) ACV, $S_{AB}S_{BC}S_{BV}$, $S_{AD}S_{CD}S_{DV}$
c) DBV, $S_{AB}S_{AD}V$, $S_{BC}S_{CD}V$

25.
Je dán pravidelný osmistěn *ABCDEF*. Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin.
a) ABC, BEF, ACE
b) ABS_{CE}, CDS_{AF}, $S_{AB}S_{CD}E$

B.6 Vzájemná poloha přímky a roviny

26.
Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete průsečík přímky *BH* s rovinou *ACE*.



Přímkou *BH* proložíme vhodnou rovinu, v tomto případě to bude rovina *BDH*. Sestrojíme průsečnici *r* těchto rovin. Hledaný průsečík přímky *BH* a roviny *ACE* je bod *X*, který je průsečíkem přímek *BH* a *r*.

27.
Je dána krychle *ABCDEFGH*, rozhodněte o vzájemné poloze roviny a přímky, v případě různoběžnosti určete průsečík.
a) EC, ABH
b) BF, EGC
c) FH, BDH
d) AG, BHS_{AB}

28.
V krychli *ABCDEFGH* jsou body *P, Q, R, S* po řadě středy stěn *ADEH*, *ABEF*, *BCFG*, *CDGH*.
Určete vzájemnou polohu:
a) přímky *PQ* a roviny *EFG*
b) přímky *RS* a roviny *ABC*
c) přímky *QR* a roviny *DHC*
d) přímky *PR* a roviny *ABF*

29.
Je dána krychle *ABCDEFGH*, rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny, v případě různoběžnosti určete průsečík.
a) přímky *PR* a roviny $S_{AB}S_{DC}S_{EF}$, body *P*, *R* jsou po řadě středy stěn *ADEH*, *BCFG*

b) přímky KL a roviny BDF, bod K leží na AE a platí $|EK| = 2|AK|$, bod L leží na CG a platí $|GL| = 2|CL|$
c) přímky $S_{BF}S_{DH}$ a roviny $BS_{EF}S_{FG}$
d) přímky FS_{DH} a roviny $S_{AB}S_{BC}S_{AE}$

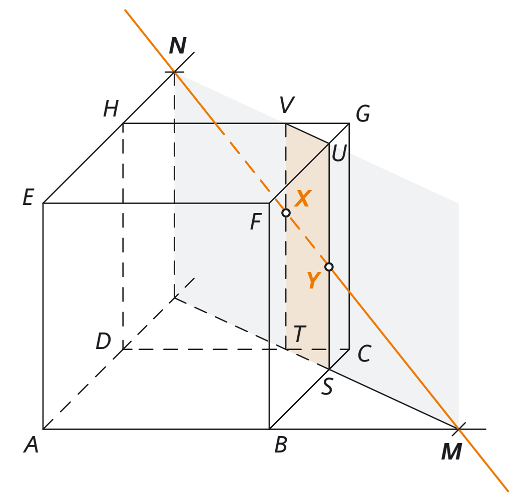
30.
Je dána krychle ABCDEFGH. Zjistěte, zda leží:
a) přímka KD v rovině ABC, bod K leží na BC a platí $|BK| = 2|CK|$
b) přímka BH v rovině ACG
c) přímka AD v rovině AFH
d) přímka PR v rovině ABG, body P, R jsou po řadě středy stěn $ADEH$, $BCFG$

31.
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda body E, B a přímka DH leží v jedné rovině.

32.
Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průsečík přímky s rovinou
a) přímky CS_{AV} s rovinou KLV, K leží na AB a platí $|BK| = 3|AK|$, L leží na CD a platí $|DL| = 3|CL|$
b) přímky VS_{AC} s rovinou $S_{AB}S_{CV}D$
c) přímky VS_{AC} s rovinou $AS_{BC}S_{CV}$
d) přímky CS_{AV} s rovinou KLM, K leží na AB a platí $|AK| = 3|BK|$, L leží na CV a platí $|CL| = 2|VL|$, M leží na DV a platí $|MV| = 3|DM|$
e) přímky BV s rovinou JKL, J leží na AB a platí $|BJ| = 3|AJ|$, K leží na CV a platí $|VK| = 3|CK|$, L leží na DV a platí $|DL| = 3|LV|$
f) přímky VS_{BC} s rovinou $S_{AB}S_{AV}S_{CD}$

B.7 Průnik přímky s hranicí tělesa

33.
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečíky přímky MN s hranicí krychle. Bod M leží na AB, bod N leží na EH



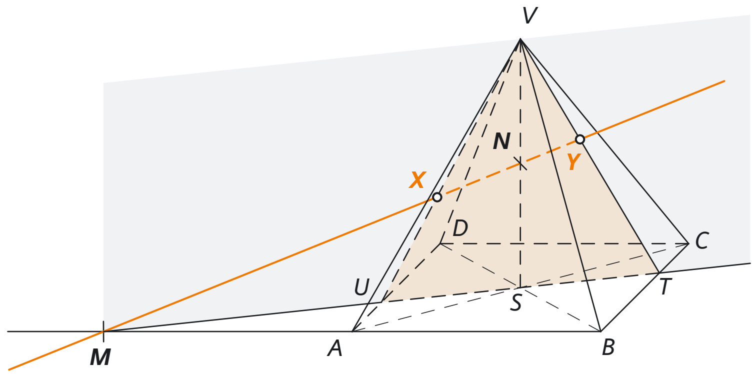
Přímkou MN proložíme rovinu rovnoběžnou se svislými hranami krychle (tzv. směrovou rovinu) a určíme její řez $STUV$ s krychlí. Přímka MN protíná hranici tohoto řezu (tj. hranici krychle) v bodech XY.

34.
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečíky přímky PQ s hranicí krychle. Pro body P, Q platí:
a) $B = S_{AP}$, $H = S_{QG}$
b) P leží na $\rightarrow DH$ a platí $|DP| = 1{,}5|DH|$, $B = S_{QD}$
c) P leží na $\rightarrow CB$ a platí $|CP| = 1{,}5|BC|$, Q leží na $\rightarrow EH$ a platí $|EQ| = 1{,}5|EH|$
d) P leží na $\rightarrow FB$ a platí $|FP| = 1{,}25|BF|$, Q leží na $\rightarrow DH$ a platí $|DQ| = 1{,}25|DH|$

35.
Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Určete průsečíky přímky MN s hranicí hranolu. Pro body M, N platí:
a) $F = S_{ME}$, N leží na $\rightarrow B'C'$ a platí $|B'N| = 1{,}25|B'C'|$
b) $B = S_{AM}$, N leží na $\rightarrow EE'$ a platí $|EN| = 1{,}25|EE'|$

36.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Určete průsečíky přímky *MN* s hranicí jehlanu. Pro body *M*, *N* platí: $A = S_{MB}$, $N = S_{SV}$, bod S je střed podstavy *ABCD*.



Přímkou *MN* proložíme rovinu, která prochází vrcholem jehlanu (tzv. vrcholovou rovinu) a určíme její řez *UTV* s jehlanem. Přímka *MN* protíná hranici tohoto řezu (tj. hranici jehlanu) v bodech *XY*.

37.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Určete průsečíky přímky *PQ* s hranicí jehlanu. Pro body *P*, *Q* platí:

a) $P = S_{DV}$, $B = S_{AQ}$

b) *P* leží na $\rightarrow VB$ a platí $|VP| = 1{,}5|VB|$, $Q = S_{DV}$

c) $P = S_{AV}$, *Q* leží na $\rightarrow DC$ a platí $|DQ| = 1{,}5|DC|$

38.

Je dán pravidelný osmistěn *ABCDEF*. Určete průsečíky přímky *MN* s hranicí osmistěnu. Pro body *M*, *N* platí: *M* leží na $\rightarrow AB$ a platí $|AM| = 1{,}5|AB|$, *N* leží na $\rightarrow FD$ a platí $|FN| = 1{,}25|FD|$.

C. METRICKÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU

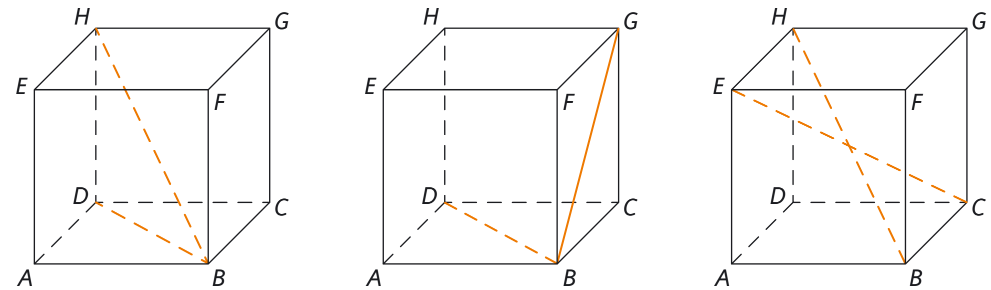
C.1 Odchylky přímek a rovin

ODCHYLKA RŮZNOBĚŽNÝCH PŘÍMEK

39.

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku přímek

a) *BD*, *BH* b) *BD*, *BG* c) *BH*, *CE*



40.

Určete odchylku přímek *AH*, *BH* v kvádru *ABCDEFGH*, je-li dáno $|AB| = 3$ cm, $|AD| = 2$ cm, $|AE| = 4$ cm.

41.

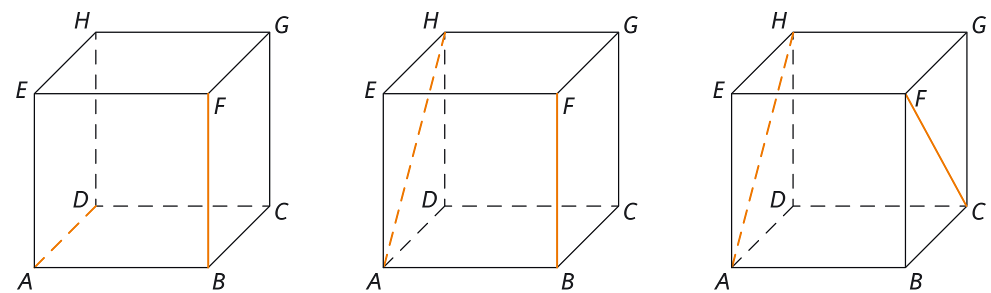
Bod *M* je střed hrany *AB* tetraedru *ABCD*. Určete odchylku přímek *DM*, *DC*.

ODCHYLKA MIMOBĚŽNÝCH PŘÍMEK

42.

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku přímek

a) *AD*, *BF* b) *AH*, *BF* c) *AH*, *CF*



43.

V pravidelném trojbokém hranolu *ABCDEF* je $|AB| = a$, $|AD| = v$. Vypočtěte odchylku φ přímek *AF*, *BC*

44.

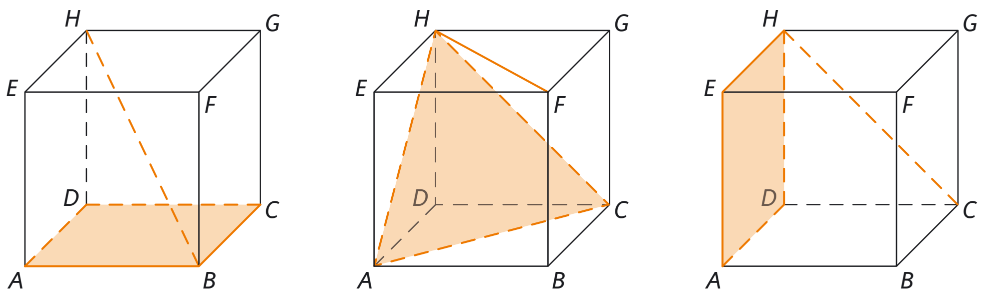
Bod M je střed hrany CV pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV. Určete odchylku φ přímek BV, AM, je-li dáno $|AB| = a$, $|AV| = b$.

ODCHYLKA PŘÍMKY A ROVINY

45.

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku přímky a roviny

a) *BH, ABC* b) *FH, ACH* c) *CH, ADH*



46.

Odchylka tělesové úhlopříčky kvádru od roviny jeho podstavy je 45°. Určete vztah mezi délkami hran kvádru.

47.

Jaká musí být odchylka φ úsečky a roviny, aby kolmý průmět úsečky do této roviny měl poloviční velikost?

48.

Přímka n je kolmá k rovině ρ. Dokažte, že pro každou přímku m platí: $|\sphericalangle\, m\rho| = 90° - |\sphericalangle\, mn|$.

49.

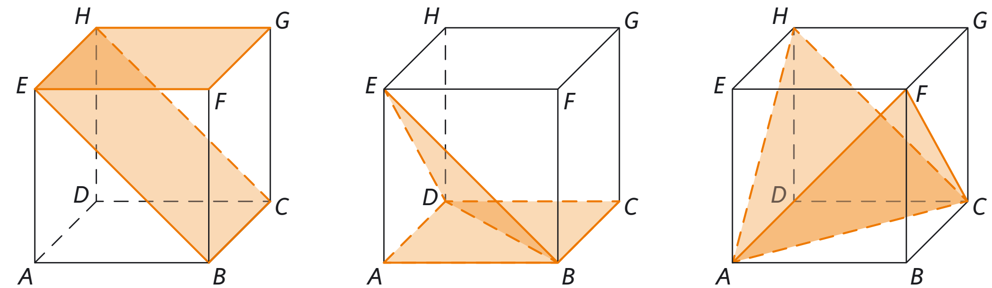
Je dán kvádr *ABCDEFGH*, $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$. Vypočtěte odchylku φ přímky *BG* a roviny *BCE*, je-li $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm.

ODCHYLKA ROVIN

50.

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku rovin

a) *BCH, EFG* b) *BDE, ABC* c) *ACF, ACH*



51.

V tetraedru *ABCD* určete odchylku rovin *ABC*, *BCD*.

52.

Body *K*, *L* jsou středy hran *AB*, *BC* pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV*. Určete odchylku rovin *VKL*, *ABC*, je-li dána výška v jehlanu a velikost a podstavné hrany.

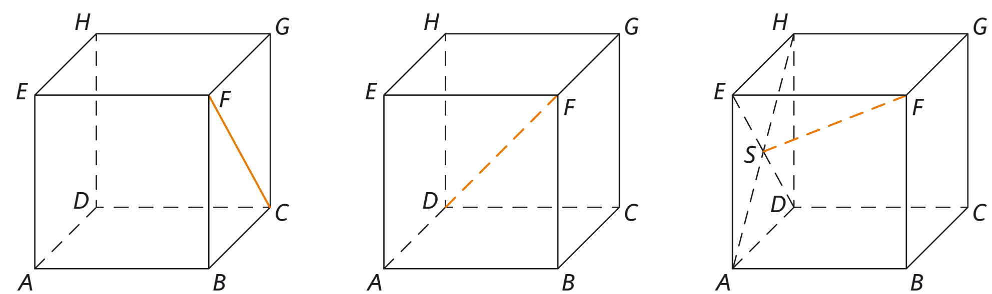
C.2 Vzdálenosti bodů, přímek a rovin

VZDÁLENOST BODŮ

53.

V krychli *ABCDEFGH* o hraně délky a je bod *S* průsečík úhlopříček *AH*, *DE*. Vypočtěte vzdálenost bodů:

a) *F, C* b) *F, D* c) *F, S*



54.

V kvádru $ABCDEFGH$ s délkami hran $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$ vypočtěte vzdálenost d bodů B, H.

55.

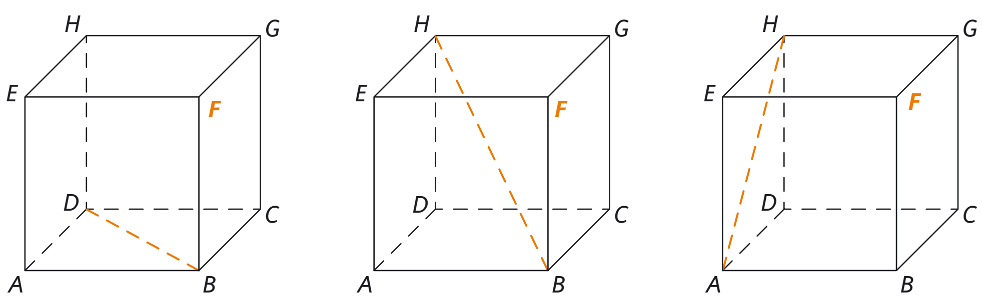
Body P, Q jsou středy hran AB, CD pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ s délkou hrany a. Vypočtěte vzdálenost d bodů P, Q.

VZDÁLENOST BODU OD PŘÍMKY

56.

V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a vypočtěte vzdálenost bodu F od přímky

a) BD b) BH c) AH



57.

V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ výšky v a podstavnou hranou délky a vypočtěte vzdálenost d bodu A od přímky CV.

58.

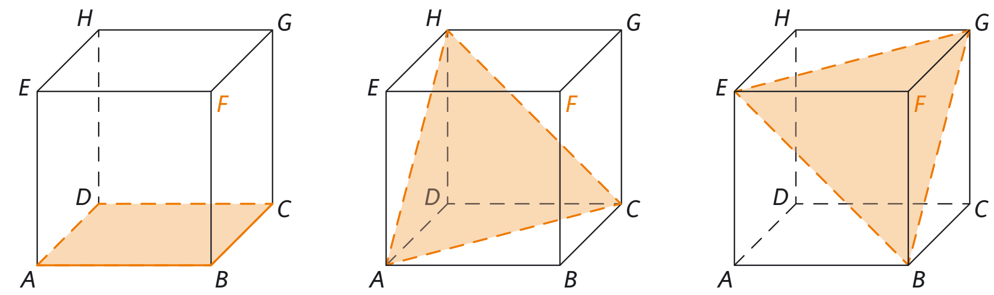
V kvádru $ABCDEFGH$ s délkami hran $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$ vypočtěte vzdálenost d bodu A od tělesové úhlopříčky BH.

VZDÁLENOST BODU OD ROVINY

59.

V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a vypočtěte vzdálenost bodu F od roviny

a) ABC b) ACH c) BEG



60.

Vypočtěte výšku pravidelného čtyřstěnu s délkou hrany a.

61.

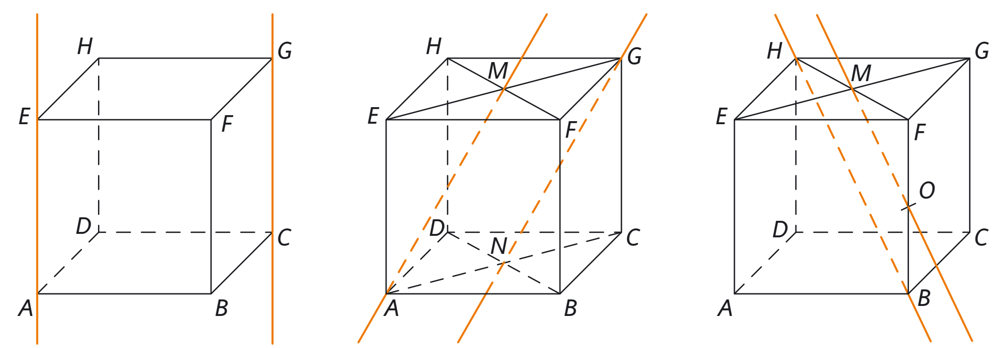
V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je bod S středem podstavy. Vypočtěte vzdálenost d bodu S od roviny jeho pobočné stěny, je-li dáno $|AB| = |SV| = a$.

VZDÁLENOST PŘÍMEK

62.

V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a je bod M průsečík přímek EG, FH, bod N je průsečík přímek BD, AC a bod O je střed hrany BF. Vypočtěte vzdálenost přímek:

a) AE, CG b) AM, GN c) BH, MO



63.

V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ jsou body K, L po řadě vnitřní body hran AV a DV takové, že $KL \parallel AD$. Vyjádřete vzdálenost d přímky KL od roviny ABC pomocí její vzdálenosti x od přímky AD, je-li $|AB| = a$, $|AV| = b$.

64.

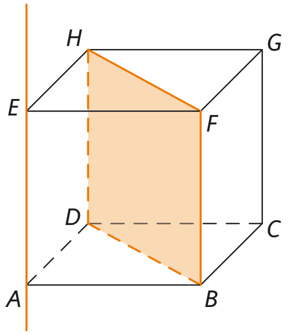
Je dána krychle *ABCDEFGH*, body *M*, *N* jsou po řadě středy hran *EF*, *FG*. Vypočtěte vzdálenost *d* přímek *MN*, *AC*, je-li $|AB| = 6$ cm.

VZDÁLENOST PŘÍMKY A ROVINY

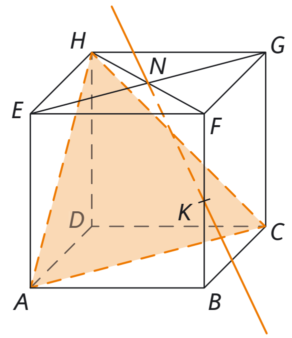
65.

V krychli *ABCDEFGH* o hraně délky a jsou body *K*, *L*, *M* po řadě středy hran *BF*, *DH*, *AE* a bod *N* je průsečík úhlopříček *EG*, *FH*. Vypočtěte vzdálenost přímky a roviny

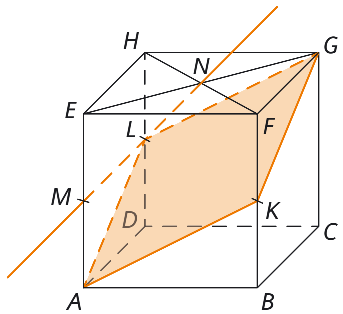
a) *AE, BDF*



b) *KN, ACH*



c) *MN, AKLG*

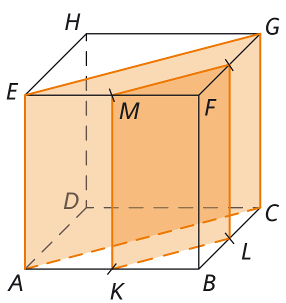


VZDÁLENOST DVOU ROVIN

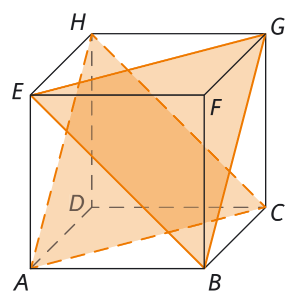
66.

V krychli *ABCDEFGH* jsou body *K*, *L*, *M*, *O*, *P* po řadě středy hran *AB*, *BC*, *EF*, *GH*, *EH*. Vypočtěte vzdálenost rovin

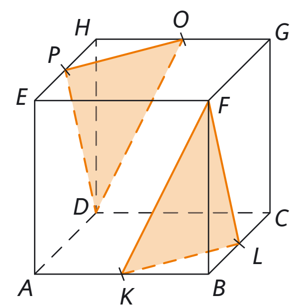
a) *ACE, KLM*



b) *ACH, BEG*



c) *KLF, DPO*



67.

V krychli *ABCDEFGH* s hranou délky *a* jsou body *P*, *Q*, *R* po řadě středy hran *EF*, *BF*, *CG*. Vypočtěte vzdálenost *d* rovin *BCE*, *PQR*.

68.

V kvádru *ABCDEFGH* s hranami délek $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$ vypočtěte vzdálenost rovin *ACH*, *BEG*.

D. MNOHOSTĚNY

D.1 Terminologie

HRANOL

- podstava hranolu
- podstavné hrany hranolu
- boční hrany hranolu
- boční stěny hranolu
- vrcholy hranolu
- stěny hranolu
- hranice hranolu
- plášť hranolu
- výška hranolu
- tělesové úhlopříčky hranolu
- stěnové úhlopříčky

KOLMÝ HRANOL
KOSÝ HRANOL
ROVNOBĚŽNOSTĚN
PRAVIDELNÝ n-BOKÝ HRANOL
KVÁDR
KRYCHLE
KONVEXNÍ MNOHOSTĚN

JEHLAN

- podstava jehlanu
- podstavné hrany jehlanu
- boční hrany jehlanu
- boční stěny hranolu
- vrcholy jehlanu
- stěny jehlanu
- hranice jehlanu
- plášť jehlanu
- výška jehlanu

KOLMÝ JEHLAN
KOSÝ JEHLAN
PRAVIDELNÝ n-BOKÝ JEHLAN
KOMOLÝ JEHLAN

Hranoly a jehlany patří mezi MNOHOSTĚNY.

OBJEM TĚLESA

Objem tělesa T je kladné číslo V(T).

1. Shodná tělesa mají stejné objemy
   $T_1 \cong T_2 \rightarrow V(T_1) = V(T_2)$
2. Objem tělesa složeného ze dvou nepronikajících se těles je roven součtu objemu těchto těles.
   $T = T_1 \cup T_2,\ T_1 \cap T_2 = \emptyset \rightarrow V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$
3. Objem krychle o hraně velikosti 1 je roven 1.

POVRCH TĚLESA

Povrch tělesa je obsah jeho hranice.

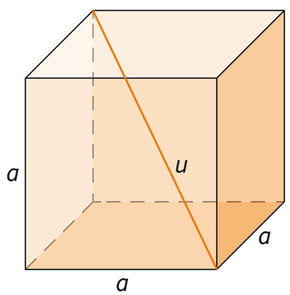
D.2 Základní vzorce

KRYCHLE

$V = a^3$

$S = 6a^2$

$u = a\sqrt{3}$

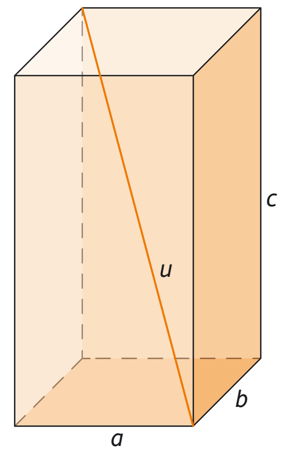


KVÁDR

$V = abc$

$S = 2ab + 2ac + 2bc$

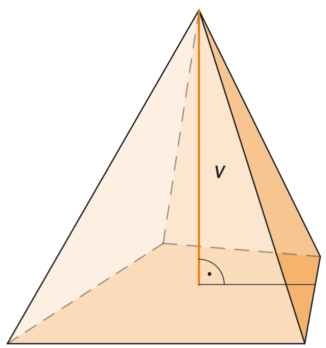
$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



JEHLAN

$V = \frac{1}{3} S_p v$

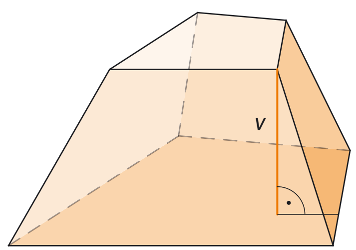
$S = S_p + Q$



KOMOLÝ JEHLAN

$V = \frac{1}{3} v (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

$S = S_1 + S_2 + Q$



D.3 Hranoly

69.
Vypočtěte objem a povrch krychle, je-li dána velikost hrany $a = 2{,}5$ cm.

70.
Vypočtěte objem a povrch krychle, je-li dána velikost tělesové úhlopříčky $u = 6$ cm.

71.
Vypočtěte objem krychle, je-li dán její povrch $S = 150\ \text{cm}^2$.

72.
Vypočtěte povrch krychle, je-li dán její objem $V = 1\,000\ \text{cm}^3$.

73.
Určete délku hrany železné krychle, která má hmotnost 1 000 kg. Hustota železa je $\rho = 7{,}8\ \text{g cm}^{-3}$.

74.
Krychli je opsána koule o poloměru r. Vypočtěte objem a povrch krychle.

75.
Je dána krychle o hraně délky a. Určete délku hrany krychle, která má vzhledem k dané krychli
a) dvojnásobný objem
b) dvojnásobný povrch

Poznámka. *Úloha určit hranu krychle, která má dvojnásobný objem než daná krychle, byla známa již ve starověku. Zdvojení neboli reduplikace krychle, patří mezi slavné úlohy starověku. V literatuře se s ní setkáme pod názvem delský problém. Vedle delského problému patří mezi slavné úlohy také kvadratura kruhu a trisekce úhlu. Lze ukázat, že úsečku délky* $x = a\sqrt[3]{2}$, *kde a je velikost dané úsečky, nelze sestrojit pouze pomocí pravítka a kružítka.*

76.
Vypočtěte objem a povrch kvádru, jsou-li dány délky jeho hran $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 6$ cm.

77.
Délky hran kvádru jsou v poměru 2 : 3 : 6 a tělesová úhlopříčka má délku 14 cm. Vypočtěte objem a povrch kvádru.

78.
Délky hran kvádru jsou v poměru 2 : 3 : 4, povrch kvádru je 13 dm^2. Vypočtěte objem kvádru.

79.
Vypočtěte povrch kvádru, je-li dán součet velikostí jeho hran $a + b + c = 19$ cm a velikost tělesové úhlopříčky $u = 13$ cm.

80.
Vypočtěte objem kvádru, jsou-li dány obsah podstavy S_1 a obsahy bočních stěn S_2, S_3.

81.
Povrch kvádru je 136 cm^2, délky jeho hran jsou v poměru 1 : 2 : 5. Vypočtěte objem kvádru.

82.
Vypočtěte objem kvádru $ABCDEFGH$, je-li dáno $|BC| = |CG| = a$, $|AG| = u$.

83.
Délky hran kvádru jsou kořeny rovnice $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$
Vypočtěte objem a povrch kvádru.

Poznámka. *Úlohu je možné také řešit s využitím Viétovy věty týkající se vztahů mezi kořeny a koeficienty dané rovnice.*
V našem případě je $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 47$, $x_1x_2x_3 = 60$.

84.
Vypočtěte objem a povrch pravidelného trojbokého hranolu výšky v a podstavnou hranou délky a.

85.
Podstavou kolmého čtyřbokého hranolu je kosočtverec, jehož strana má délku a. vypočtěte objem hranolu, mají-li jeho tělesové úhlopříčky od roviny podstavy odchylky φ, ψ. Řešte obecně a potom pro hodnoty $a = 3$ cm, $\varphi = 30°$, $\psi = 45°$.

86.
Pravidelný šestiboký hranol je dán tělesovými úhlopříčkami o velikostech $u_1 = 12$ cm, $u_2 = 13$ cm. Vypočtěte povrch a objem hranolu.

87.
Vypočtěte objem a povrch pravidelného n-bokého hranolu, je-li dána výška hranolu v a podstavná hrana a.

88.
Vypočtěte povrch kosého hranolu $ABCDEFGH$ s hranami $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$. Podstavou hranolu je obdélník, odchylka boční hrany a roviny podstavy je φ a odchylka boční stěny BCG a roviny podstavy je ψ.

89.
V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a je vedena hranou CG rovina ρ tak, že rozdělí krychli na dva kolmé hranoly, čtyřboký a trojboký, jejichž objemy j sou v poměru 3 : 2. V jakém poměru je touto rovinou rozdělena hrana AB?

D.4 Jehlany

90.
Pravidelný čtyřboký jehlan výšky v má délku podstavné hrany a a délku boční hrany b. Vypočtěte objem a povrch jehlanu, je-li dáno:
a) a, b b) a, v c) b, v

91.
Pravidelný trojboký jehlan výšky v má délku podstavné hrany a a délku boční hrany b. Vypočtěte objem a povrch jehlanu, je-li dáno:
a) a, b b) a, v c) b, v

92.
Vypočtěte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, je-li dáno $|AC| = |CV| = u$.

93.
Vypočtěte objem čtyřstěnu $ABCD$, je-li dáno $|AB| = 2$, $|AC| = |AD| = |BC| = |BD| = 3$, $|CD| = 5$.

94.
Vypočtěte objem pravidelného trojbokého jehlanu, je-li dána jeho výška v a odchylka boční stěny od roviny podstavy φ.

95.
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rovina $ACDH$ odděluje od krychle jehlan $ACDH$, jehož povrch je S. Vypočtěte povrch krychle.

96.
Vypočtěte objem pravidelného pětibokého jehlanu, je-li dána délka a boční hrany a odchylka φ této hrany od roviny podstavy.

97.
Povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu je $S = 360\ \text{cm}^2$, objem jehlanu je $V = 400\ \text{cm}^3$. Vypočtěte délku podstavné hrany a a výšku jehlanu v.

98.
V jaké vzdálenosti od vrcholu jehlanu je třeba rozříznout jehlan výšky v řezem rovnoběžným s podstavou, aby se odřízla $\frac{1}{3}$ objemu daného jehlanu?

99.
Podstavy komolého jehlanu jsou rovnostranné trojúhelníky o stranách velikostí a, b. Vypočtěte objem jehlanu, jeli odchylka boční hrany od větší podstavy φ.

100.
Výška pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu je v, odchylka boční hrany od roviny podstavy je φ, odchylka tělesové úhlopříčky od roviny podstavy je ψ. Vypočtěte obsah pláště komolého jehlanu.

101.
Komolý jehlan má podstavy S_1, S_2 Vypočtěte obsah řezu S, který je určen rovinou vedenou středy bočních hran.

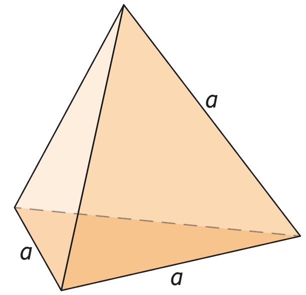
D.5 Platonova tělesa

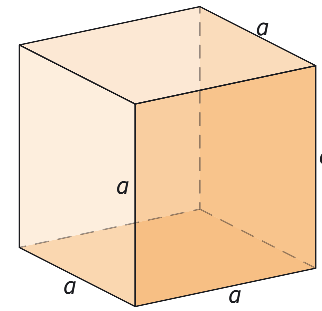
Pravidelným mnohostěnem rozumíme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran. Existuje právě pět pravidelných těles, která nazýváme **Platonova tělesa**. Jsou to tetraedr (**pravidelný čtyřstěn**), hexaedr (**pravidelný šestistěn, krychle**), oktaedr (**pravidelný osmistěn**), ikosaedr (**pravidelný dvacetistěn**) a dodekaedr (**pravidelný dvanáctistěn**).

TETRAEDR

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$S = a^2\sqrt{3}$$

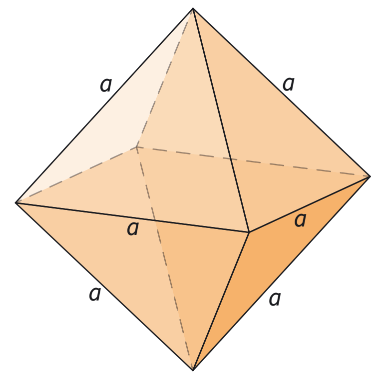




HEXAEDR

$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$



OKTAEDR

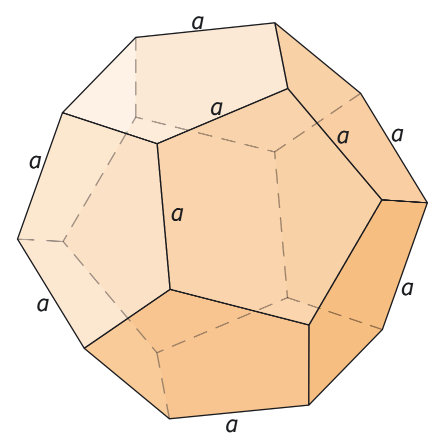
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

$$S = 2a^2\sqrt{3}$$

IKOSAEDR

$$V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$$

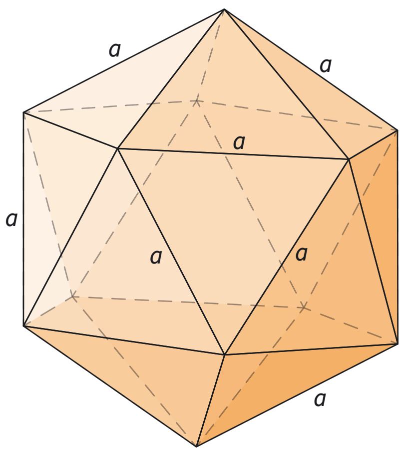
$$S = 5a^2\sqrt{3}$$



DODEKAEDR

$$V = \frac{a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4}$$

$$S = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$



Poznámka

V každém pravidelném mnohostěnu existuje bod, který má stejnou vzdálenost od všech vrcholů, stejnou vzdálenost od všech stěn a stejnou vzdálenost od všech hran. Je to střed kulové plochy mnohostěnu opsané i vepsané. Na opsané kulové ploše leží všechny vrcholy mnohostěnu. Je to analogie kružnice opsané a vepsané pravidelným mnohoúhelníkům v planimetrii. Všechny pravidelné mnohostěny jsou současně konvexní mnohostěny a platí tedy pro ně Eulerova věta o mnohostěnech. Teorií mnohostěnů je do značné míry motivována terminologie teorie grafů. Každý mnohostěn určuje graf tím způsobem, že vrcholy grafu odpovídají vrcholům mnohostěnu a hrany grafu odpovídají hranám mnohostěnu. Lze ukázat, že stěny libovolného rovinného nakreslení vzniklého grafu odpovídají stěnám mnohostěnu. Charakteristika grafů mnohostěnů je jednoduchá. Graf G je grafem mnohostěnu, právě když G je rovinný 3-souvislý graf.

102.

Určete počty hran a vrcholů tetraedru, hexaedru, oktaedru, dodekaedru a ikosaedru.

103.

Vypočtěte objem a povrch tetraedru o hraně velikosti a.

104.

Vypočtěte poloměr ρ kulové plochy vepsané tetraedru a poloměr r kulové plochy opsané tetraedru o hraně velikosti a.

105.

Vypočtěte velikost úhlu mezi vazbami v molekule metanu za předpokladu, že molekula metanu je tetraedrická. Atom uhlíku je v hybridním stavu sp^3.

Poznámka

Pod pojmem „tetraedrická“ máme na mysli, že atom uhlíku je v těžišti tetraedru a atomy vodíků jsou ve vrcholech tetraedru.

106.

Vypočtěte objem a povrch krychle vepsané kouli o poloměru r.

107.

Vypočtěte objem a povrch oktaedru o hraně velikosti a.

108.

Vypočtěte objem a povrch oktaedru, je-li dán poloměr ρ koule oktaedru vepsané.

109.

Krychli o hraně velikosti a vepište těleso, jehož všechny vrcholy jsou středy stěn dané krychle. Určete, o jaké těleso se jedná a vypočtěte jeho objem a povrch.

110.

Dokažte, že pro počet hran H každého pravidelného mnohostěnu platí

$$H = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}$$

kde p je počet stran každé stěny mnohostěnu a q je počet hran stýkajících se v jednom vrcholu.

111.

Je-li p je počet stran každé stěny mnohostěnu a q je počet hran stýkajících se v jednom vrcholu potom platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

Dokažte.

Návod. *Uvažte, že součet velikostí úhlů, které svírají hrany při společném vrcholu mnohostěnu, musí být menší než 2π. Odtud plyne*

$$\frac{q(p-2)\pi}{p} < 2\pi$$

Poznámka

Pravidelné mnohostěny byly známy již ve starověku. V souvislosti s ***Platonem*** *(427–347 př. n. l.) se často uvádí jejich přiřazení ke čtyřem řeckým živlům, kterými byly oheň (tetraedr), země (hexaedr), vzduch (oktaedr), voda (ikosaedr). V knize* ***Timaios*** *vyslovil Platon myšlenku, že čtyři prvky považované za základní složky světa – oheň, země,* *vzduch, voda – jsou ve skutečnosti seskupením nepatrných pevných částic. Navíc tvrdil, že tyto částice mají tvar pravidelných mnohostěnů, protože svět mohl být stvořen pouze z dokonalých těles. Poslední mnohostěn, který byl objeven, dodekaedr, představoval jsoucno. Jistý Jamblichos (283–330 př. n. l.) zaznamenal, že dodekaedr objevil **Hyppasos z Metapontu** (520–480 př. n. l) z Pythagorovy školy. Za to, že svůj objev zveřejnil, prý zahynul v moři. Problém je samozřejmě složitější, k hlubšímu seznámení bychom se museli seznámit s názory dalších řeckých filosofů. Pro nás by byli nejvýznamnější **Anaximandros** (611–545 př. n. l.), **Pythagoras** (okolo 570–po 510 př. n. l.), **Empedokles** (490–430, př. n. l., teorie Emepedokleova o čtyřech živlech) a **Anaxagoras** (500–428 př. n. l.). Pěti pravidelným mnohostěnům se ve své knize „O božském poměru" věnuje i jeden z nejvýznamnějších matematiků své doby **Luca Pacioli** (1445–1514). Kniha nazvaná podle „zlatého řezu" byla věnována architektuře, pěti Platonovým tělesům a také proporcím lidského těla. Vyobrazení mnohostěnů na 59 tabulkách pro svého přítele zhotovil **Leonardo da Vinci** (1452–1519), který si s oblibou vyráběl dřevěné kostry mnohostěnů. Myšlenka, že pravidelné mnohostěny hrají zásadní roli ve struktuře vesmíru, byla brána vážně ještě v 16. a 17. století, kdy **Johannes Kepler** začal hledat v reálném světě matematický řád.*

Přehled pravidelných mnohostěnů

s – počet stěn mnohostěnu, v – počet vrcholů mnohostěnu, h – počet hran mnohostěnu

p	q	s	v	h	Mnohostěn
3	3	4	4	6	Tetraedr
4	3	6	8	12	Hexaedr
3	4	8	6	12	Oktaedr
5	3	12	20	30	Dodekaedr
3	5	20	12	30	Ikosaedr

O krychli a osmistěnu říkáme, že jsou duální mnohostěny. Všimněte si, že středy stěn krychle jsou vrcholy pravidelného osmistěnu a naopak středy stěn pravidelného osmistěnu jsou vrcholy krychle. Podobně jsou navzájem duální i pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn. Pravidelný čtyřstěn je duální sám se sebou.

E. Rotační tělesa

E.1 Terminologie

VÁLEC
- postava válce
- strana válce
- plášť válce
- výška válce
- hranice válce
- osový řez válce

KOLMÝ VÁLEC
KOSÝ VÁLEC
DUTÝ ROTAČNÍ VÁLEC
VÁLEC ŠIKMO SEŘÍZNUTÝ

KUŽEL
- podstava kužele
- podstavná hrana kužele
- strany kužele
- vrchol kužele
- hranice kužele
- plášť kužele
- výška kužele
- osový řez kužele

KOMOLÝ KUŽEL
- podstavy komolého kužele
- podstavné hrany komolého kužele
- strany komolého kužele
- hranice komolého kužele
- plášť komolého kužele
- výška komolého kužele

ROVNOSTRANNÝ KUŽEL
KOSÝ KUŽEL
- charakteristický trojúhelník kosého kužele

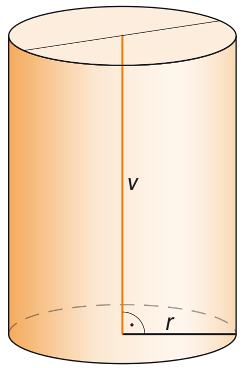
KOULE
- střed koule
- poloměr koule
- průměr koule
- kulová plocha (hranice koule)
- kulová úseč
- kulová vrstva
- kulová výseč
- kulový vrchlík
- kulový pás
- anuloid
- středový úhel osového řezu kulové výseče

E.2 Základní vzorce

VÁLEC

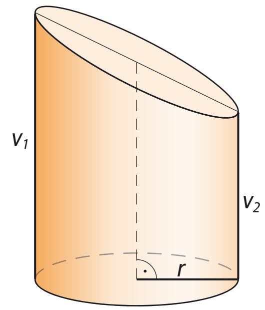
$V = \pi r^2 v$

$S = 2\pi r^2 + \pi r v$



VÁLEC ŠIKMO SEŘÍZNUTÝ

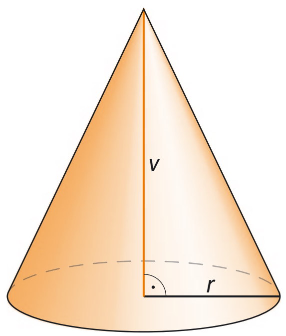
$V = \dfrac{\pi r^2}{2}(v_1 + v_2)$



KUŽEL

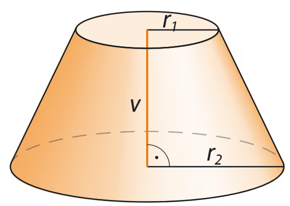
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 v$

$S = \pi r^2 + \pi r s$



KOMOLÝ KUŽEL

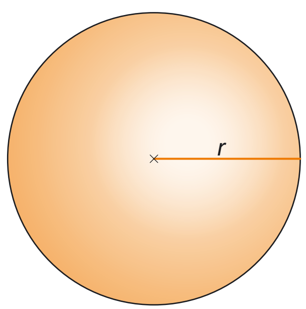
$V = \dfrac{1}{3}v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$



KOULE

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$S = 4\pi r^2$



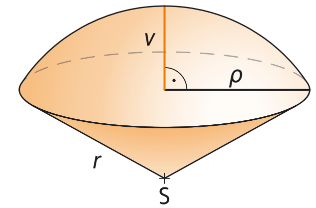
KULOVÁ VÝSEČ

$V = \dfrac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2) + \dfrac{\pi \rho^2 (r - v)}{3}$

$V = \dfrac{2}{3}\pi r^2 v$

$S = \pi r(2v + \rho)$

ρ – poloměr podstavy kulové úseče



KULOVÁ ÚSEČ, KULOVÝ VRCHLÍK

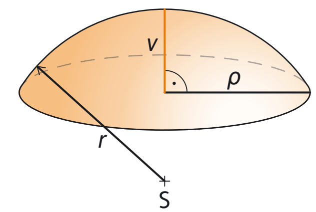
$V = \dfrac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$

ρ – poloměr podstavy kulové úseče

$V = \dfrac{\pi v^2}{3}(3r - v)$

$S = 2\pi r v + \pi \rho^2$

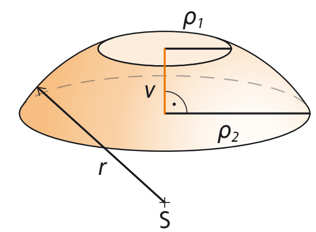
$S = 2\pi r v$ obsah kulového vrchlíku



KULOVÁ VRSTVA, KULOVÝ PÁS

$V = \dfrac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$

$S = \pi(2rv + \rho_1^2 + \rho_2^2)$



E.3 Válec

112.
Jaké množství vody proteče za hodinu potrubím kruhového průřezu s průměrem 16 cm, teče-li voda rychlostí 2,5 m s^{-1}?

113.
Dvě stejná válcová potrubí s vnitřním průměrem 10 cm byla nahrazena jedním potrubím se stejným průtokem. Vypočtěte vnitřní průměr nového potrubí.

114.
Mléko ze tří litrových krabic bylo přelito do válcového hrnce s vnitřím průměrem 20 cm. Jak vysoko byla hladina mléka v hrnci?

115.
O kolik se zvýší hladina kávy v šálku tvaru válce o průměru 7 cm, jestliže do něj ponoříme 3 kostky cukru o rozměrech 11 mm, 18 mm, 22 mm?

116.
Určete poměr objemů dvou válců $V_1 : V_2$, jsou-li jejich pláště shodné obdélníky rozměrů a a b.

117.
Plášť rotačního válce je čtverec. Určete odchylku α úhlopříčky osového řezu tohoto válce s rovinou podstavy.

118.
Jaký je průměr d měděného drátu délky $l = 200$ m, je-li jeho hmotnost $m = 80$ kg a hustota mědi je $\rho = 8{,}9$ g cm^{-3}?

119.
Válcová roura má délku d, světlost s a tloušťku t. Jak velký je její povrch?

120.
Nádoba tvaru válce o poloměru podstavy r a výškou v, je naplněna vodou. Kolik vody zůstane v nádobě, jestliže ji nakloníme o úhel velikosti α? Řešte obecně a potom pro hodnoty $r = 5$ cm, $v = 20$ cm a $\alpha = 45°$.
Návod. *Zbývající voda představuje rotační válec seříznutý rovinou nerovnoběžnou s podstavou, pro jehož objem V platí:* $V = \dfrac{\pi r^2}{2}(v_1 + v_2)$

121.
Nádoba tvaru kosého válce s poloměrem r, jehož strana svírá s podstavou úhel velikosti φ, se plní vodou. Při jakém objemu vody se válec právě převrhne?

E.4 Kužel

122.
Pravoúhlý trojúhelník s přeponou $c = 5$ cm a obsahem $S = 6$ cm^2 se otáčí kolem přepony. Určete objem a povrch vzniklého rotačního tělesa.

123.
Povrch rotačního kužele je 30 cm^2, obsah jeho pláště je 20 cm^2. Vypočtěte odchylku φ strany tohoto kužele od roviny podstavy.

124.
Vypočtěte objem a povrch rovnostranného kužele výšky v.

125.
Vypočtěte středový úhel φ kruhové výseče, ve kterou se rozvine plášť rotačního kužele s poloměrem $r = 3{,}5$ cm a stranou $s = 5$ cm.

126.
Kužel, výšky v, plave ve vodě vrcholem dolů. Jak hluboko je ponořen, je-li jeho hustota ρ.

127.
Rotační komolý kužel má poloměry podstav $r_1 = 17$ cm, $r_2 = 5$ cm a jeho strana má od roviny podstavy odchylku $\varphi = 60°$. Určete jeho objem a povrch.

128.
Objem kmene tvaru komolého kužele se počítá prakticky tak, že se aritmetický průměr obou podstav vynásobí výškou. Určete velikost chyby, které se při takovém výpočtu dopustíme.

Návod. *Od objemu válce odečtěte objem komolého kužele. Chyba je tím menší, čím menší je rozdíl obou poloměrů.*

129.
Povrch rotačního komolého kužele s poloměry podstav $r_1 = 28$ cm, $r_2 = 21$ cm je $S = 2\,450\pi$ cm^2. Vypočtěte výšku daného komolého kužele.

130.
V jaké vzdálenosti od vrcholu je třeba rozříznout kužel výšky v řezem rovnoběžným s podstavou, aby se odřízla $\dfrac{1}{3}$ objemu?

131.
Je-li do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v vepsán rotační válec o poloměru podstavy ρ a výšce u pak platí: $\dfrac{\rho}{r} + \dfrac{u}{v} = 1$
Dokažte.

E.5 Koule

132.
Tři olověné koule o poloměrech $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 5$ cm byly slity v jedinou kouli.
a) Vypočítejte poloměr r odlité koule.
b) Zobecněte úlohu pro n koulí s poloměry $r_1, r_2, \ldots, r_n$.
c) Jaký je vztah mezi objem odlité koule a objemy původních koulí?
d) Jaký je vztah mezi povrchem odlité koule a povrchy původních koulí?

133.
Kolik olověných koulí s poloměrem 1 cm lze odlít z olověné koule s poloměrem 10 cm?

134.
Určete poloměr železné koule, jejíž hmotnost je 10 kg. Hustota železa je $\rho_{Fe} = 7{,}8$ g cm^{-3}.

135.
Dokažte, že povrch koule, která se dotýká všech hran krychle o hraně délky a, se rovná rozdílu povrchů koule krychli opsané a vepsané.

136.
Koule a krychle mají stejný povrch. Určete poměr jejich objemů.

137.
Válcová nádoba, jejíž podstava má poloměr $r = 8$ cm je zčásti naplněná vodou. O kolik cm vystoupí voda v nádobě, hodíme-li do ní kouli o poloměru $r = 6$ cm?

138.
Kouli o poloměru r je opsán rotační kužel o výšce $v = 6$r. V jakém poměru jsou povrchy obou těles?

139.
Jakou tloušťku stěny musí mít dutá měděná koule 1 kg těžká, aby se vznášela ve vodě? Hustota mědi je $\rho_{Cu} = 8{,}9$ g cm^{-3}, hustota vody je $\rho_0 = 1$ g cm^{-3}

140.
Dutá kovová koule má vnější průměr $d = 40$ cm. Určete její tloušťku t, má-li koule hmotnost 25 kg. Hustota kovu je $\rho = 8{,}45$ g cm^{-3}.

141.
Do koule je vepsán rotační kužel, jehož výška je středem koule dělena v poměru zlatého řezu. Určete poměr objemů obou těles.

142.
Nádoba tvaru polokoule o poloměru $r = 15$ cm je naplněna vodou. Kolik vody v ní zůstane, nakloní-li se o úhel velikosti $\varphi = 30°$?

143.
Dřevěná koule plave ve vodě tak, že $\frac{2}{5}$ průměru vyčnívají z vody. Určete hustotu dřeva, z něhož je koule zhotovena.

144.
Jak velkou část Země lze shlédnout z výšky h km? Řešte obecně a potom pro hodnoty $h = 300$ km, poloměr Země $r = 6\,370$ km.

145.
Koule o poloměru r je osvětlena z bodu, který má od středu koule vzdálenost d. Jakou hodnotu musí mít poměr $d : r$, aby byla osvětlena třetina povrchu koule?

146.
Střed jedné ze dvou shodných koulí leží na ploše druhé koule. Vypočtěte objem společné části obou koulí.

147.
Vypočtěte objem kulové výseče, je-li dán středový úhel 2φ a poloměr koule r.

148.
Vypočtěte objem kulové výseče, je-li dán středový úhel 2φ a poloměr podstavy úseče ρ.

149.
Povrch kulové úseče se rovná $\frac{7}{16}$ povrchu koule. Určete velikost středového úhlu příslušného úseči.

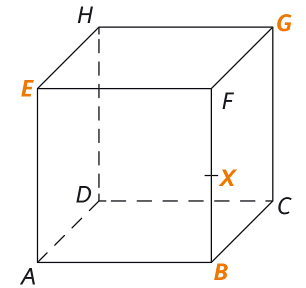
150.
Objem kulové výseče se rovná $\frac{1}{4}$ objemu koule, z níž výseč vznikla. Určete povrch výseče, je-li poloměr koule r.

151.
Kulová vrstva je omezena hlavním kruhem o poloměru r a kruhem, jehož obsah je roven $\frac{1}{5}$ obsahu hlavního kruhu. Vypočtěte objem a povrch kulové vrstvy.

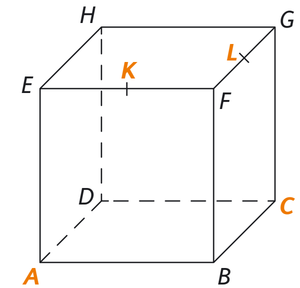
Poznámka.
Hlavní kruh je kruh, který obsahuje střed koule.

VÝSLEDKY ÚLOH

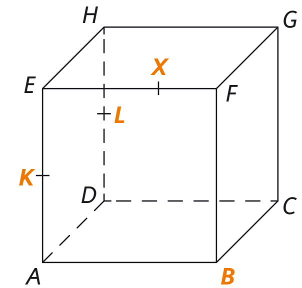
1. a) neleží



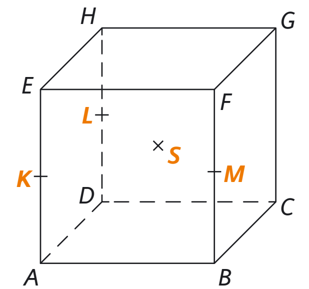
b) leží



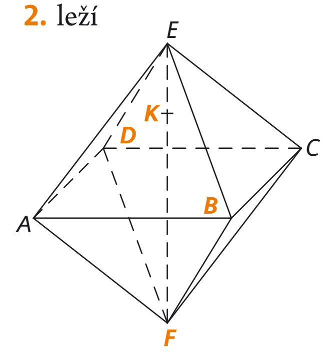
c) neleží



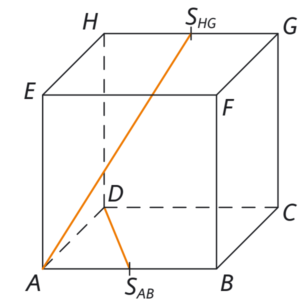
d) leží



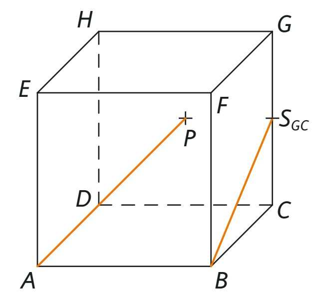
2. leží



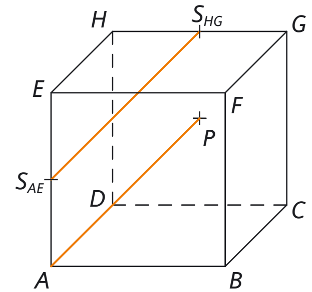
3. a) mimoběžky



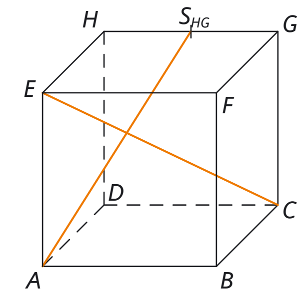
b) různoběžky



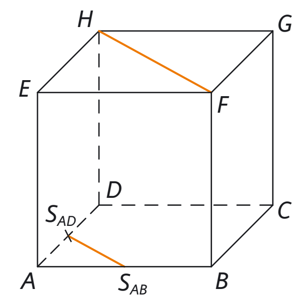
c) rovnoběžky



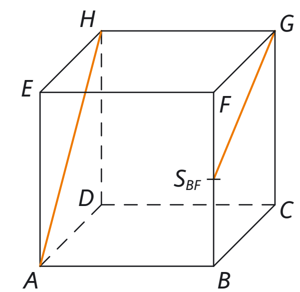
d) mimoběžky



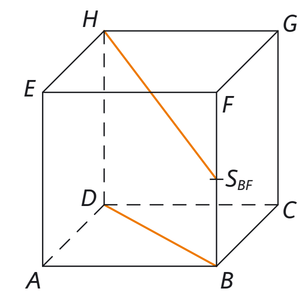
e) rovnoběžky



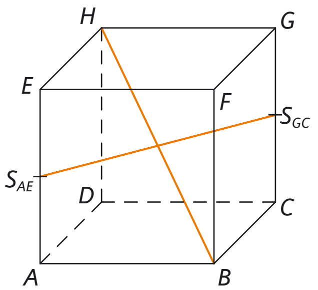
f) mimoběžky



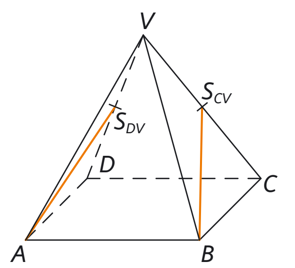
g) různoběžky



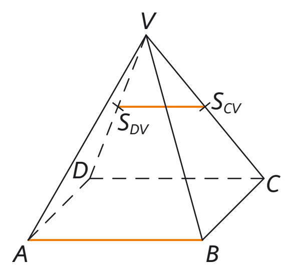
h) různoběžky



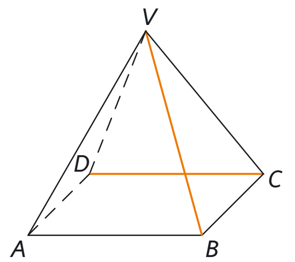
4. a) různoběžky



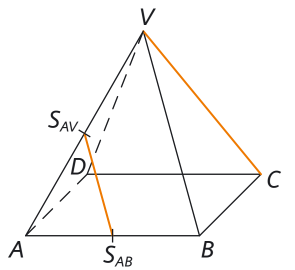
b) rovnoběžky



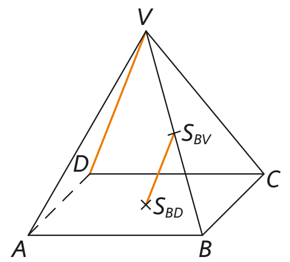
c) mimoběžky



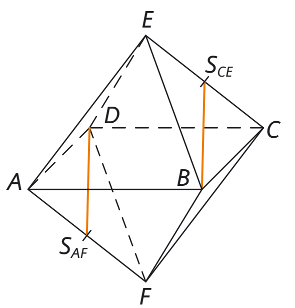
d) mimoběžky



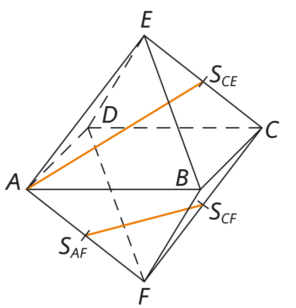
e) rovnoběžky



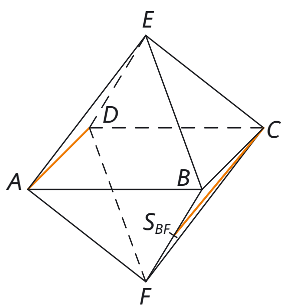
5. a) rovnoběžky



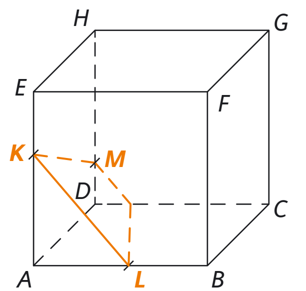
b) různoběžky



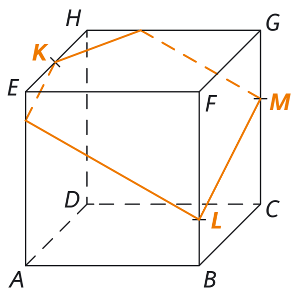
c) mimoběžky



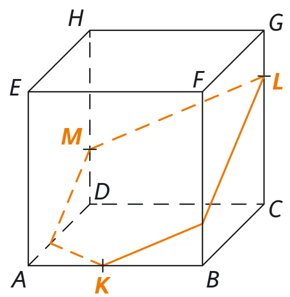
9. a)



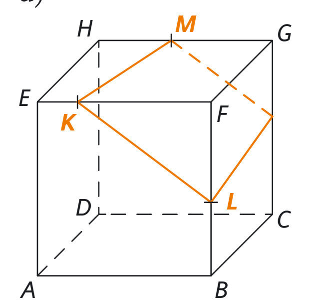
b)



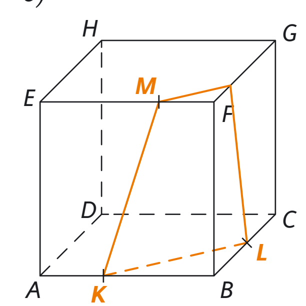
c)



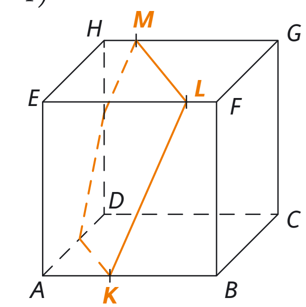
d)



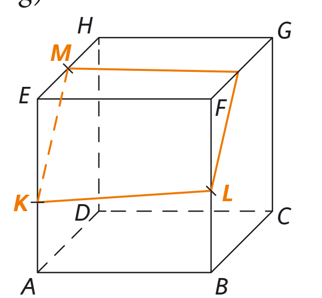
e)



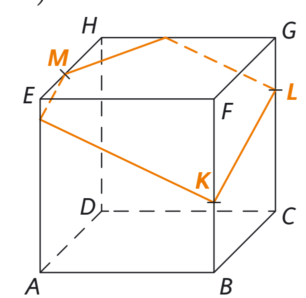
f)



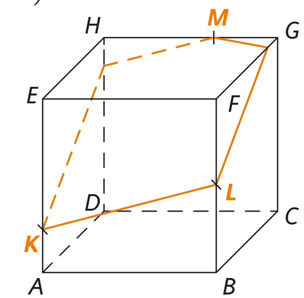
g)



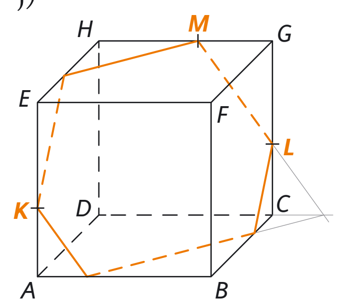
h)



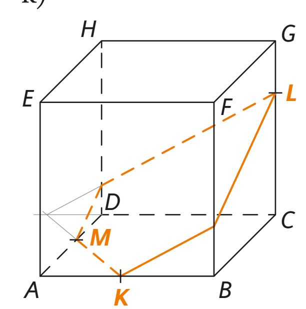
i)



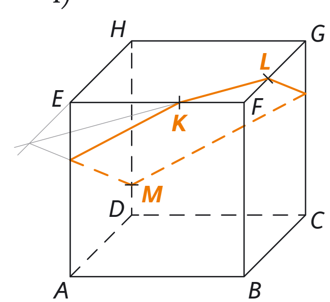
j)



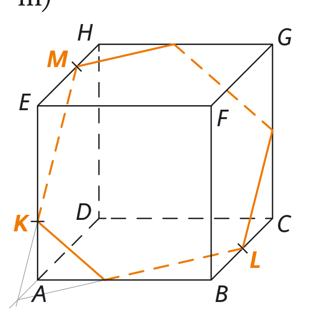
k)



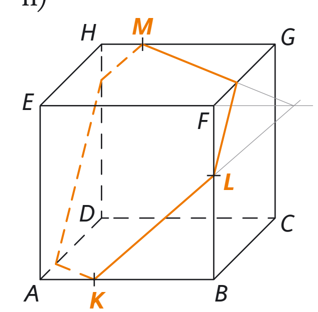
l)



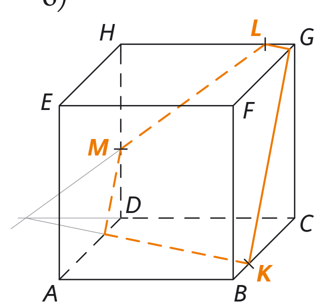
m)



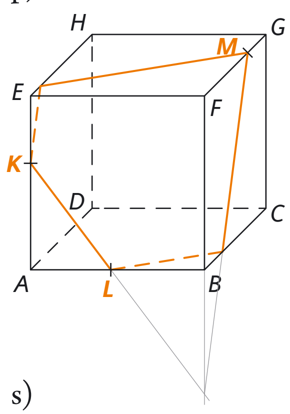
n)



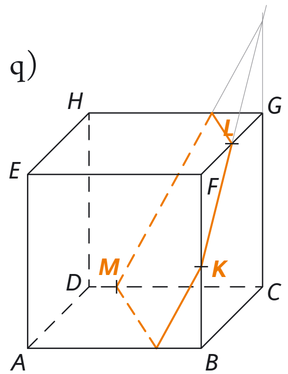
o)



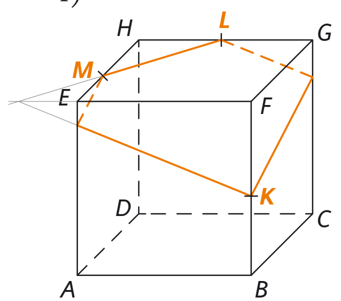
p)



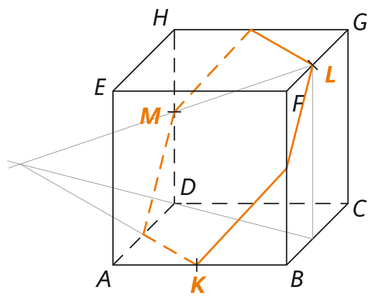
q)



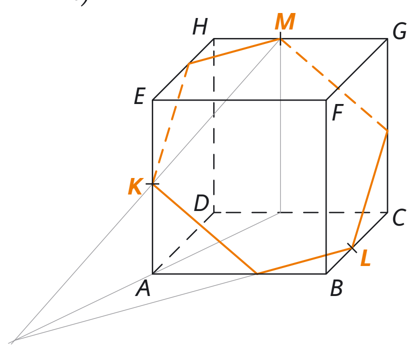
r)



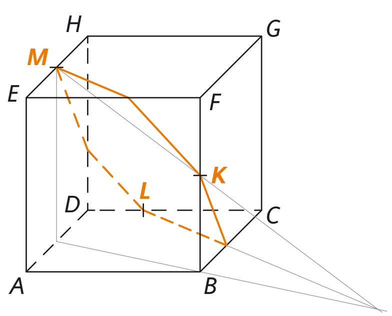
s)



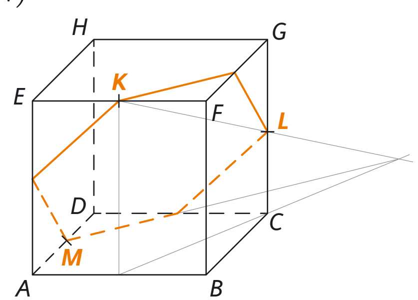
t)



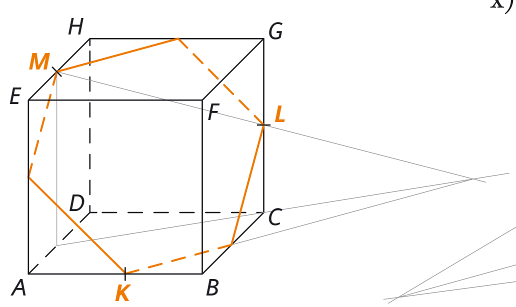
u)



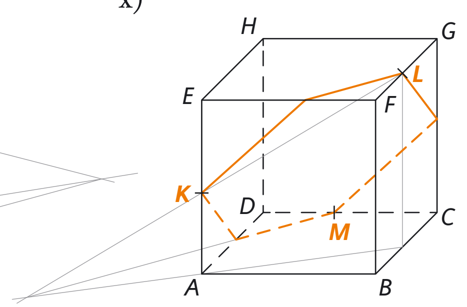
v)



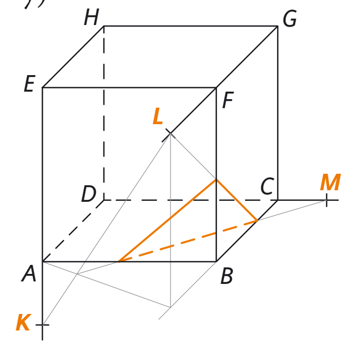
w)



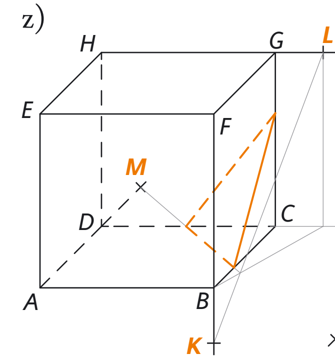
x)



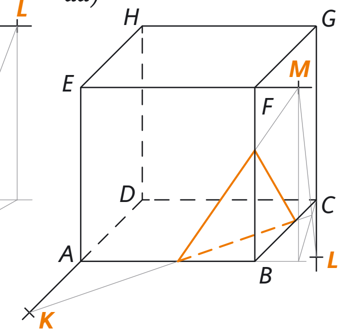
y)



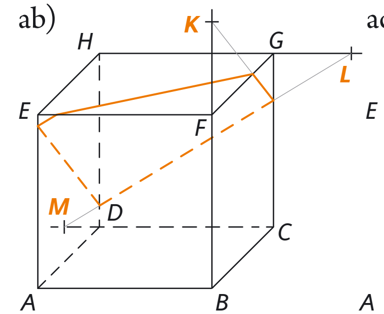
z)



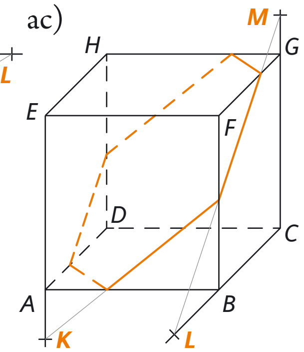
aa)



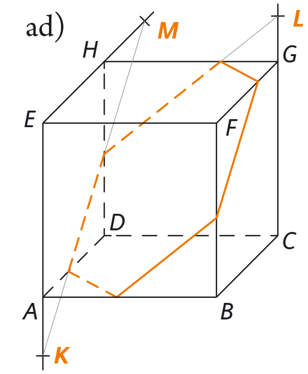
ab)



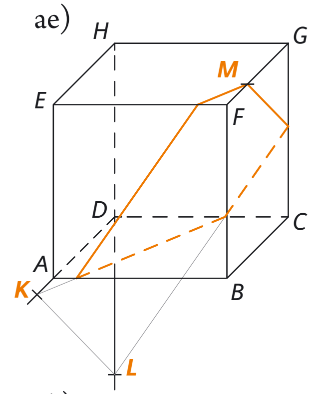
ac)



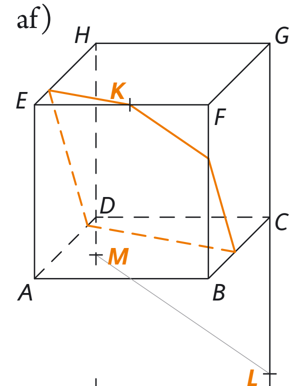
ad)



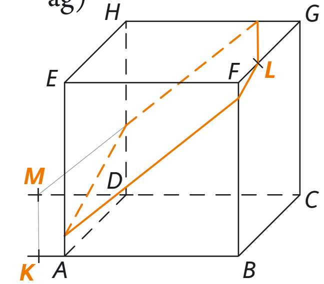
ae)



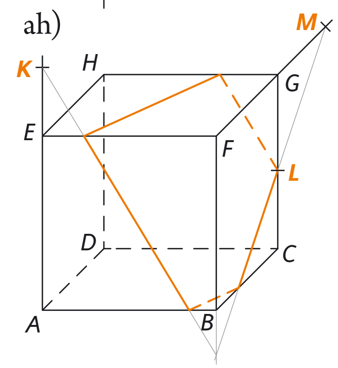
af)



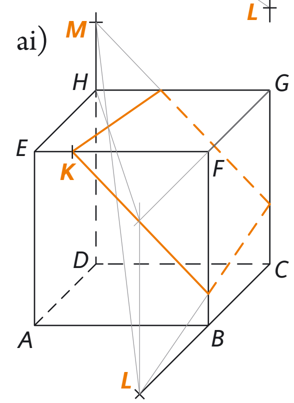
ag)



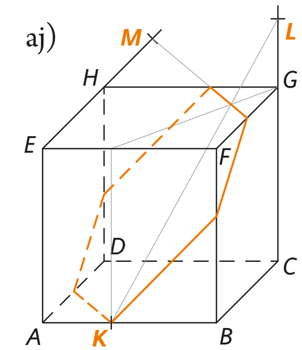
ah)



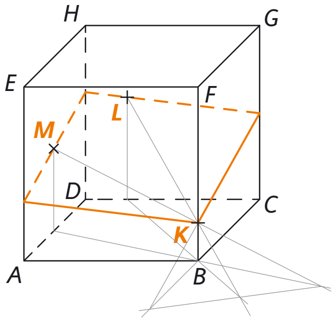
ai)



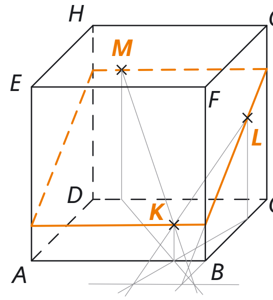
aj)



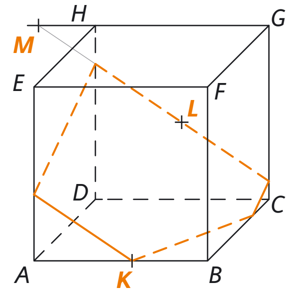
ak)



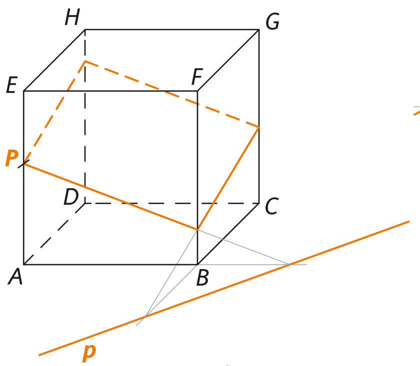
al)



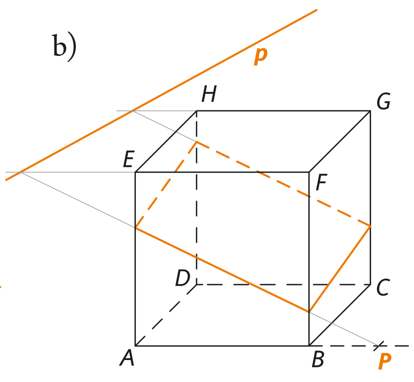
am)



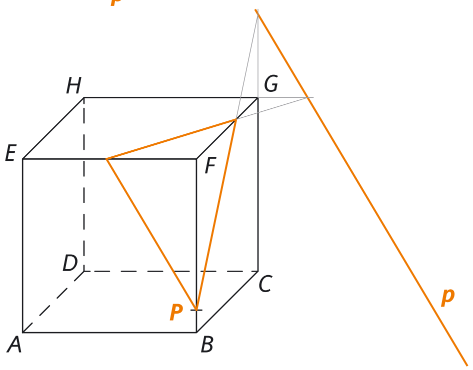
10. a)



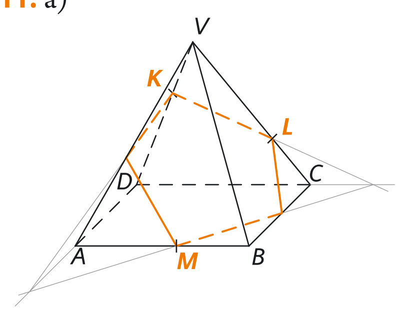
b)



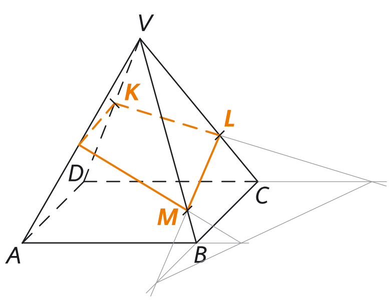
c)



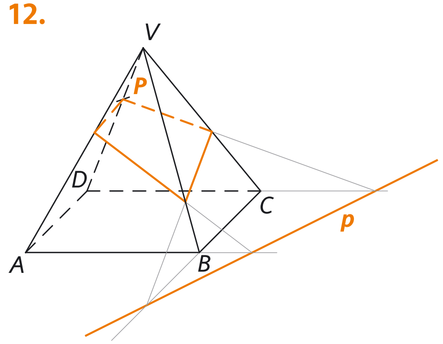
11. a)



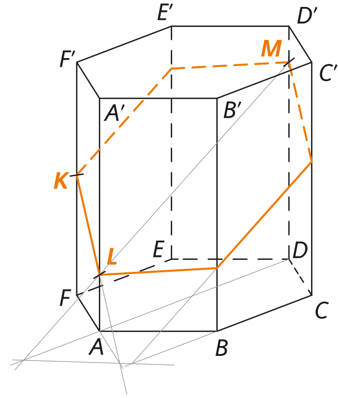
b)



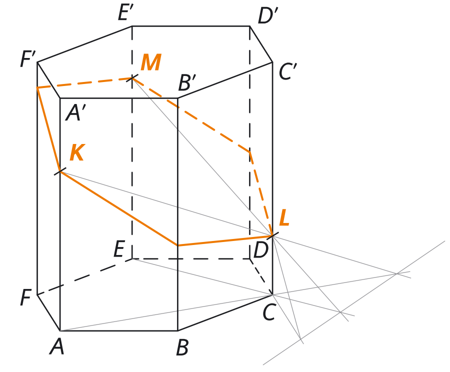
12.



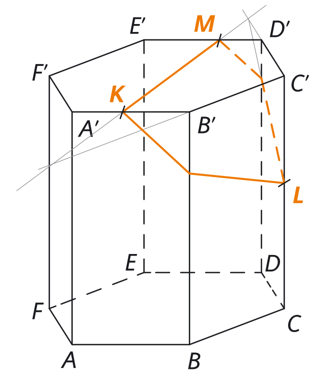
13. a)



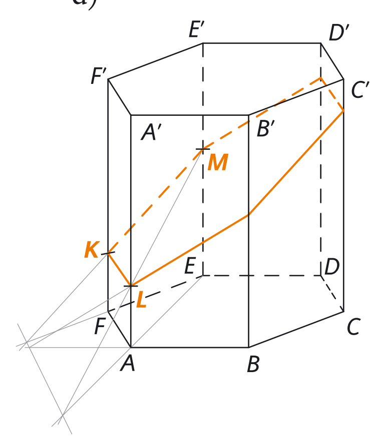
b)



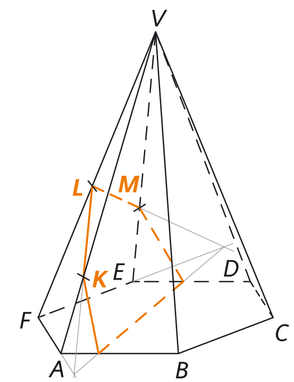
c)



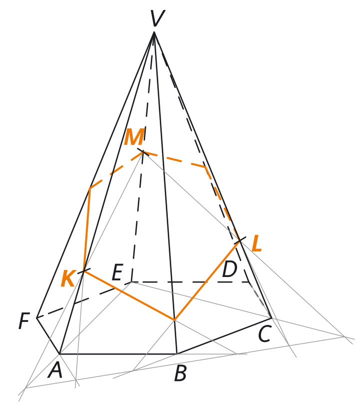
d)



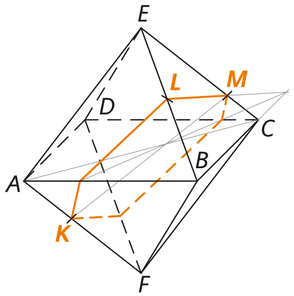
14. a)



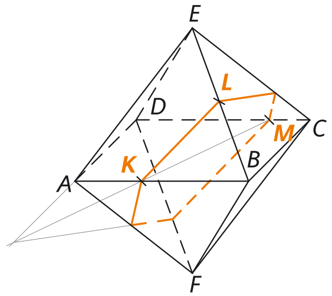
b)



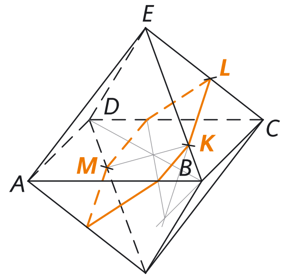
15. a)



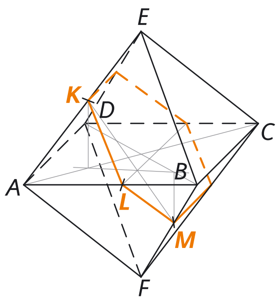
b)



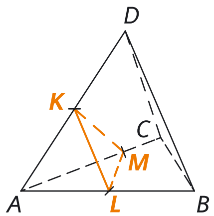
c)



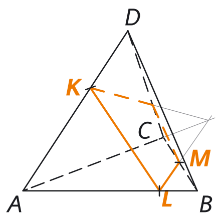
d)



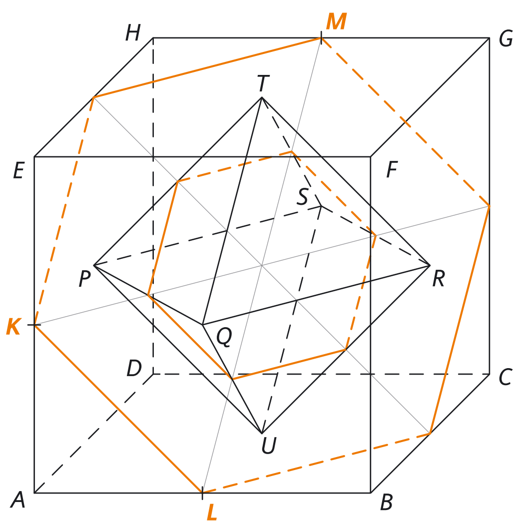
16. a)



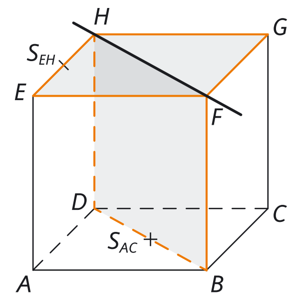
b)



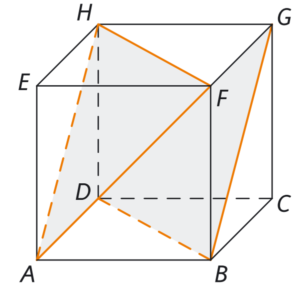
17.



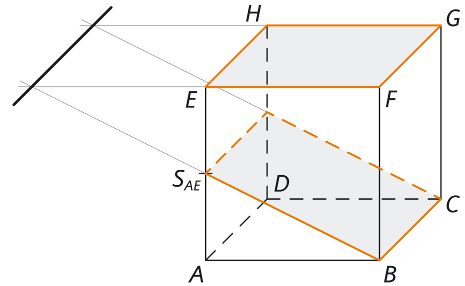
20. a) různoběžné: HF



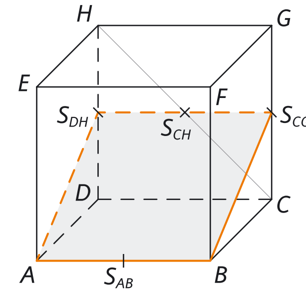
b) rovnoběžné



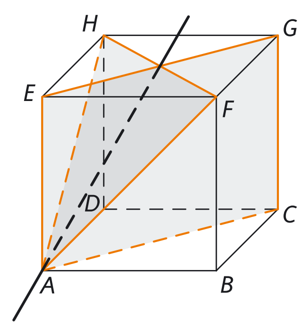
c) různoběžné



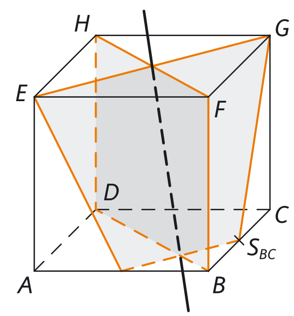
d) splývají



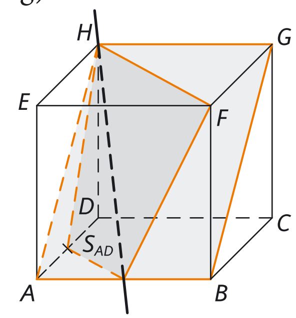
e) různoběžné



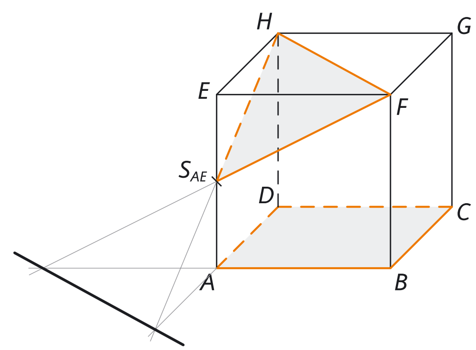
f) různoběžné



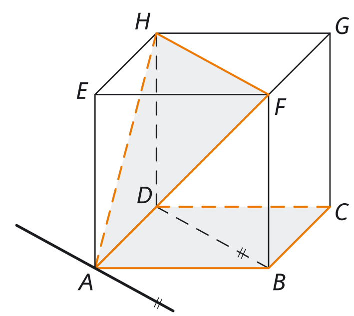
g) různoběžné



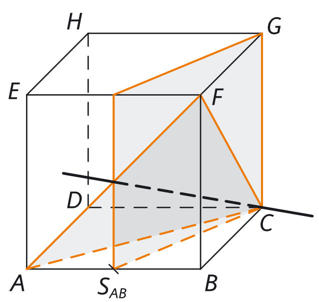
h) různoběžné



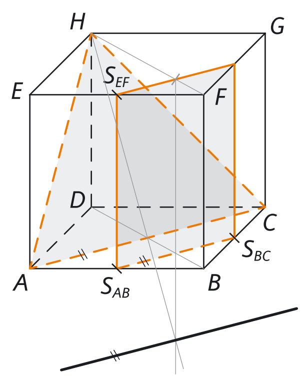
i) různoběžné



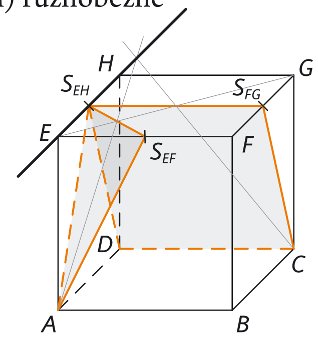
j) různoběžné



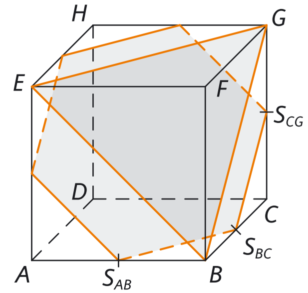
k) různoběžné



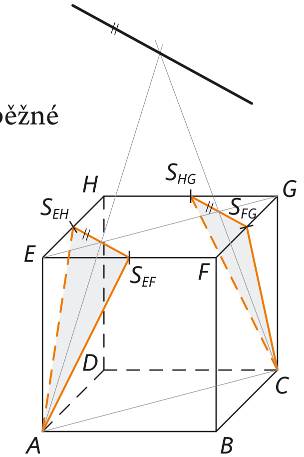
l) různoběžné



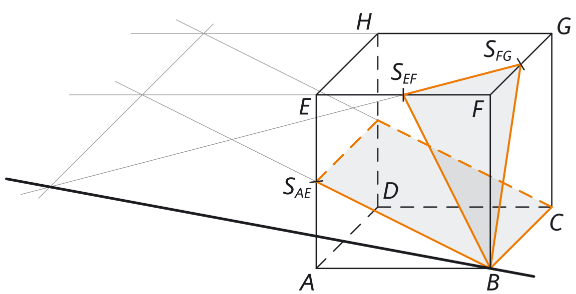
m) rovnoběžné



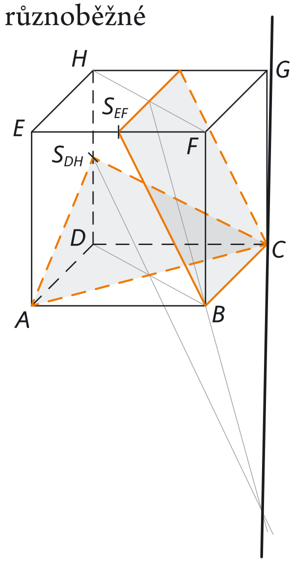
n) různoběžné



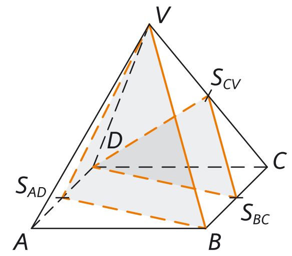
o) různoběžné



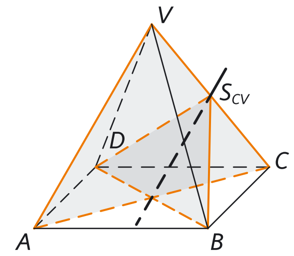
p) různoběžné



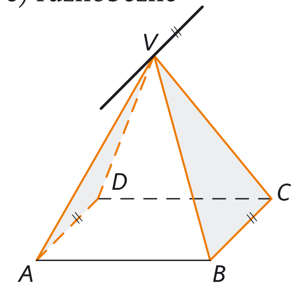
21. a) rovnoběžné



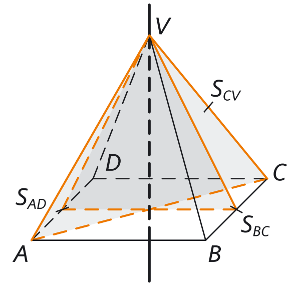
b) různoběžné



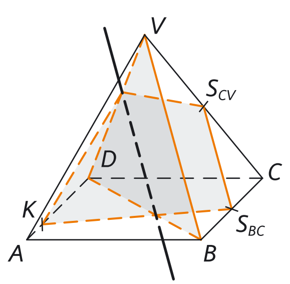
c) různoběžné



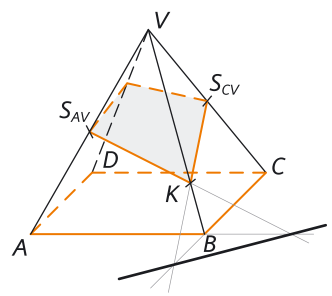
d) různoběžné



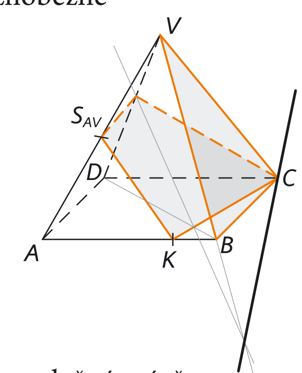
e) různoběžné



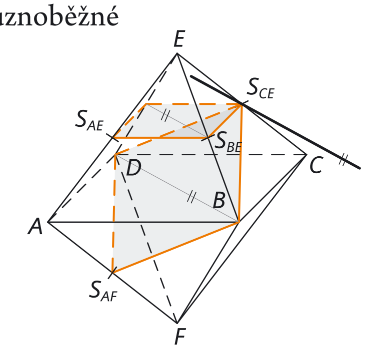
f) různoběžné



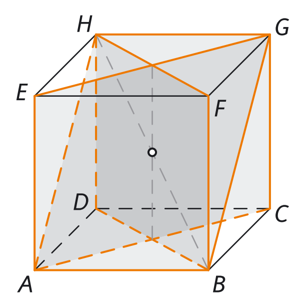
g) různoběžné



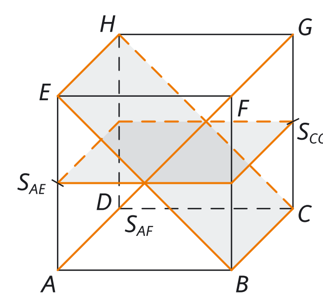
22. různoběžné



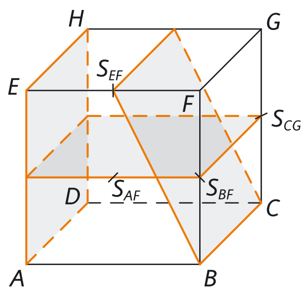
23. a) společný právě jeden bod



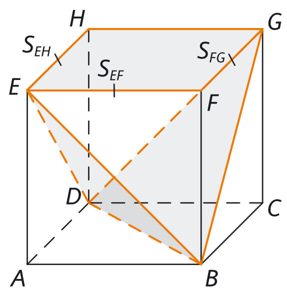
b) protínají se v jedné přímce



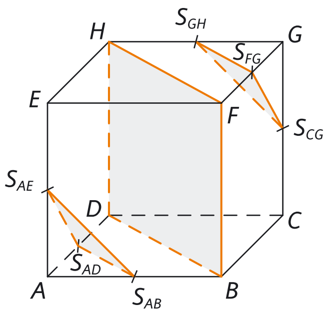
c) protínají se ve třech navzájem rovnoběžných přímkách



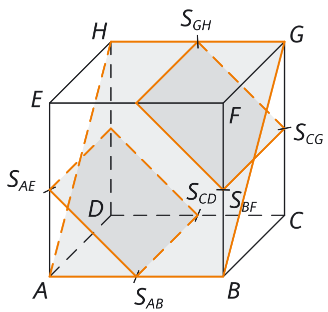
d) protínají se ve třech navzájem rovnoběžných přímkách



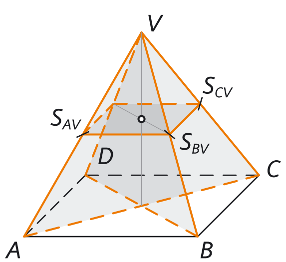
e) roviny $S_{AB}S_{AD}S_{AE}$ a $S_{FG}S_{GH}S_{CG}$ jsou navzájem rovnoběžné, tedy třetí rovina je protíná ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách



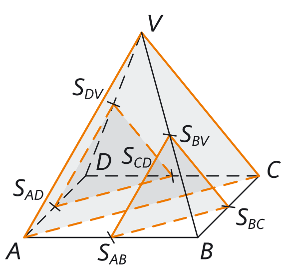
f) roviny $S_{BF}S_{CG}S_{GH}$ a $S_{AE}S_{AB}S_{CD}$ jsou navzájem rovnoběžné, tedy třetí rovina je protíná ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách



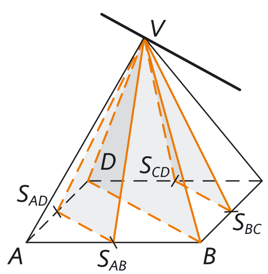
24. a) společný právě jeden bod



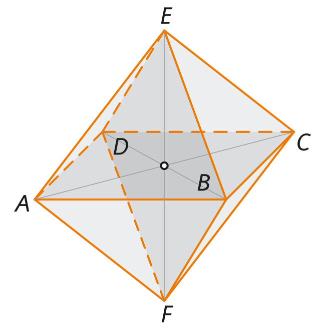
b) navzájem rovnoběžné



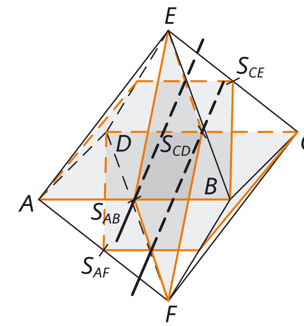
c) protínají se v jedné přímce



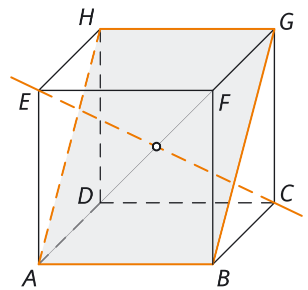
25. a) společný právě jeden bod, a to střed



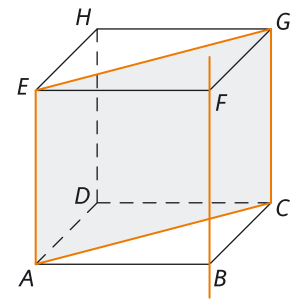
b) roviny ABS_{CE} a CDS_{AF} jsou navzájem rovnoběžné, tedy třetí rovina je protíná ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách



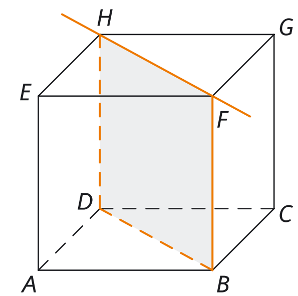
27. a) různoběžné



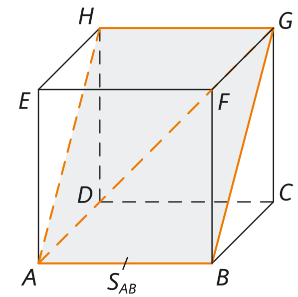
b) rovnoběžné



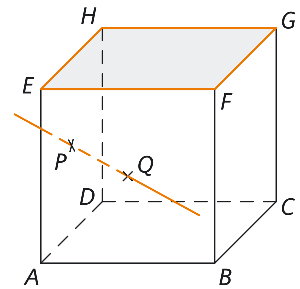
c) FH ⊂ BDH



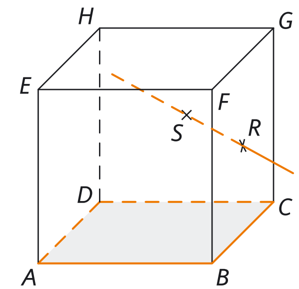
d) AG ⊂ BHS_{AB}



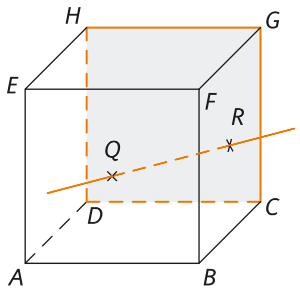
28. a) rovnoběžné



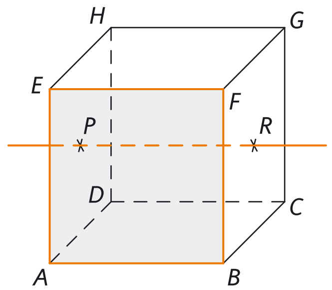
b) rovnoběžné



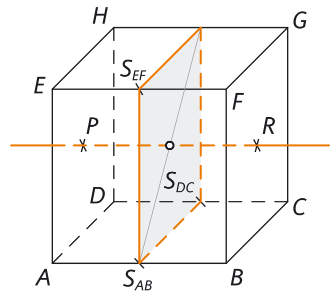
c) různoběžné



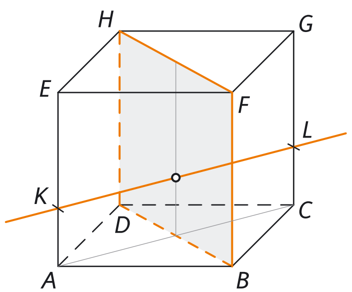
d) rovnoběžné



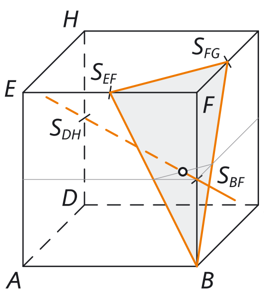
29. a) různoběžné



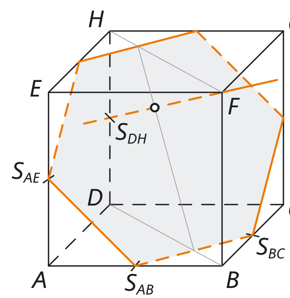
b) různoběžné



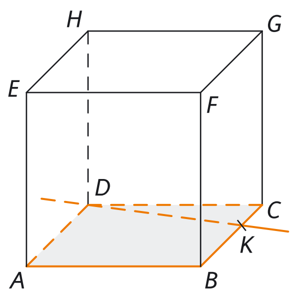
c) rovnoběžné



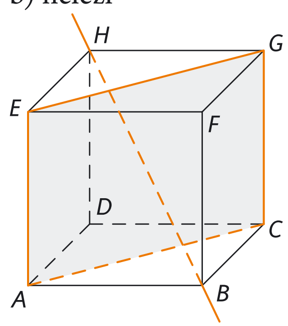
d) různoběžné



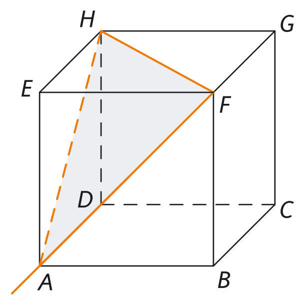
30. a) leží



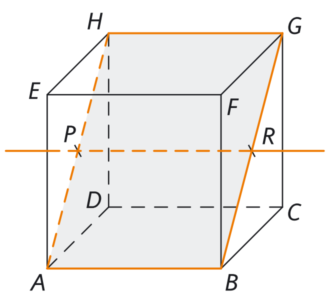
b) neleží



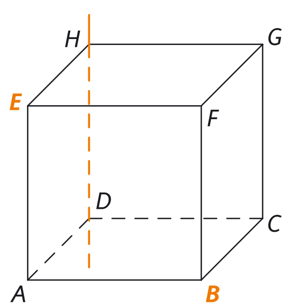
c) neleží



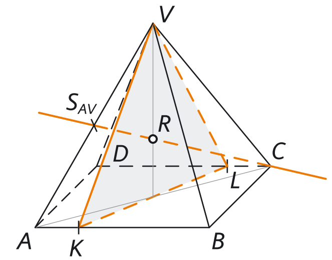
d) leží



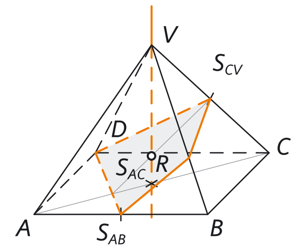
31. neleží



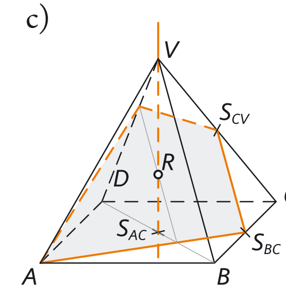
32. a)



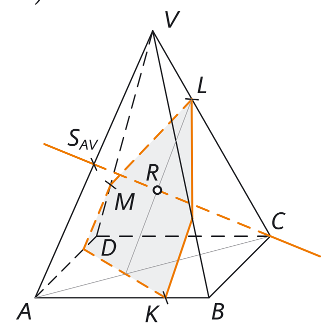
b)



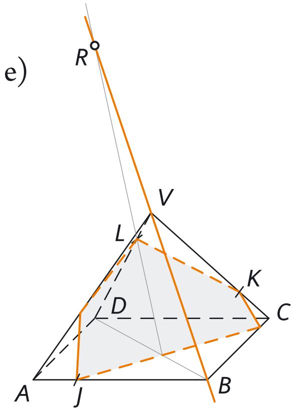
c)



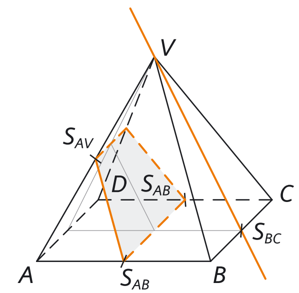
d)



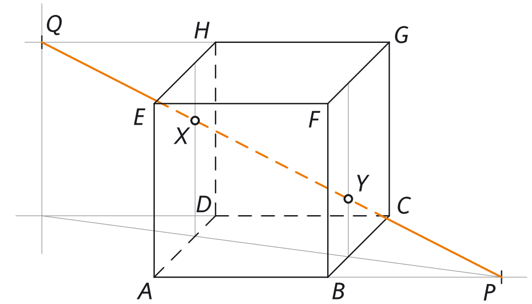
e)



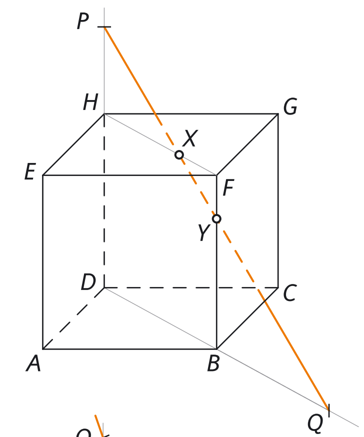
f) rovnoběžné



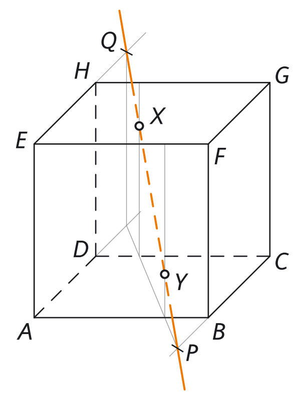
34. a)



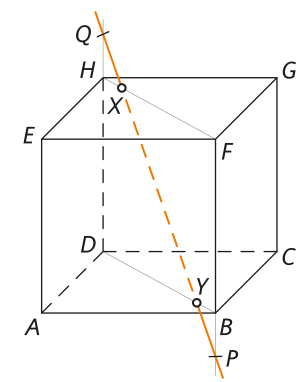
b)



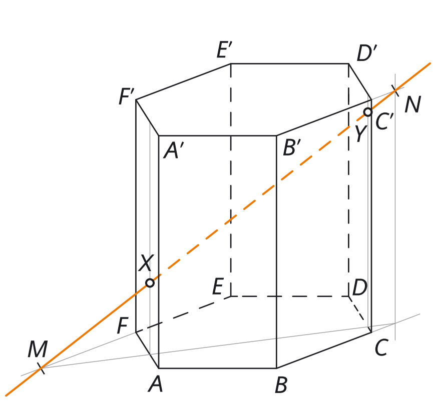
c)



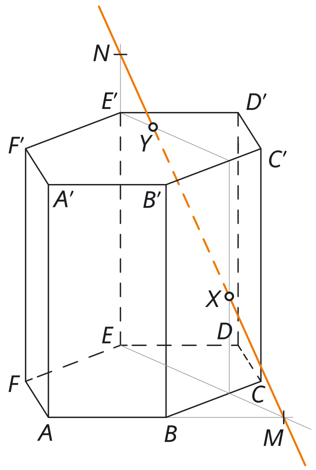
d)



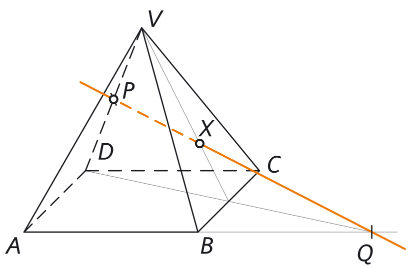
35. a)



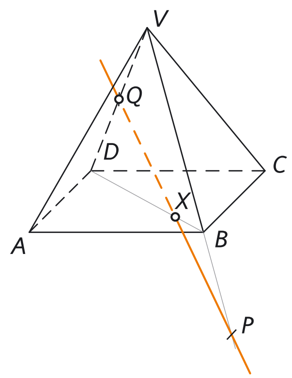
b)



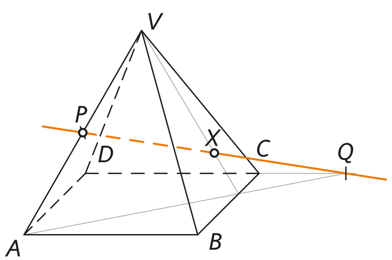
37. a)



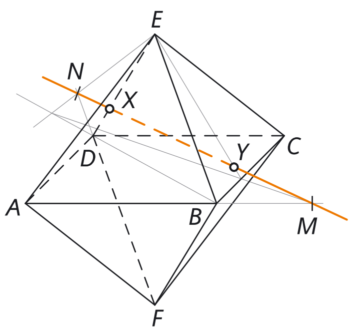
b)



c)



38.



39. a) 35,26°; b) 60°; c) 70,53°; **40.** $\varphi = 33{,}85°$; **41.** $\varphi = 54{,}74°$; **42.** a) 90°; b) 45°; c) 90°; **43.** $\cos\varphi = \dfrac{a}{2\sqrt{a^2+v^2}}$; **44.** $\cos\varphi = \dfrac{2b^2-a^2}{2b\sqrt{4a^2+b^2}}$;

45. a) 35,26°; b) 54,73°; c) 45°; **46.** $c^2 = a^2 + b^2$; **47.** $\varphi = 60°$;

49. $\sin\varphi = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}\,\sqrt{b^2+c^2}}$; $\varphi = 35°$; **50.** a) 45°; b) 54,73°; c) 70,53°;

51. $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$, $\varphi = 70{,}53°$; **52.** $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sqrt{2}\,v}{a}$; **53.** a) $a\sqrt{2}$; b) $a\sqrt{3}$; c) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$;

54. $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$; **55.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; **56.** a) a; b) $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; c) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$;

57. $d = \dfrac{2av}{\sqrt{2v^2+a^2}}$; **58.** $d = \dfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; **59.** a) a; b) $a\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; c) $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

60. $v = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; **61.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$; **62.** a) $a\sqrt{2}$; b) $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; c) $a\dfrac{\sqrt{6}}{6}$;

63. $d = \dfrac{x\sqrt{4b^2-2a^2}}{\sqrt{4b^2-a^2}}$; **64.** $d = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ cm; **65.** a) $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

66. a) a; b) $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; c) $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **67.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$; **68.** $d = \dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}$;

69. $V = 15{,}625\ \text{cm}^3$; $S = 37{,}5\ \text{cm}^2$; **70.** $V = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; $S = 72\ \text{cm}^2$;

71. $V = \dfrac{S}{6}\sqrt{\dfrac{S}{6}} = 125\ \text{cm}^3$; **72.** $S = 6\sqrt[3]{V^2} = 600\ \text{cm}^2$; **73.** $a = 50{,}42$ cm;

74. $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}r^3$; $S = 8r^2$; **75.** a) $x = a\sqrt[3]{2}$; b) $x = a\sqrt{2}$; **76.** $V = 48\ \text{cm}^3$; $S = 88\ \text{cm}^2$; **77.** $V = 288\ \text{cm}^3$; $S = 288\ \text{cm}^2$; **78.** $V = 3\ \text{dm}^3$; **79.** $S = 192\ \text{cm}^2$;

80. $V = \sqrt{S_1S_2S_3}$; **81.** $V = 80\ \text{cm}^3$; **82.** $V = a^2\sqrt{u^2-2a^2}$; **83.** $V = 60$; $S = 94$;

84. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2v$; $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2 + 3av$; **85.** $V = \dfrac{4a^3\operatorname{cotg}\varphi\operatorname{cotg}\psi}{\sqrt{(\operatorname{cotg}^2\varphi + \operatorname{cotg}^2\psi)^3}}$; $V = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

86. $S = 75\sqrt{3} + 30\sqrt{69}\ \text{cm}^2$; $V = \dfrac{1}{2}225\sqrt{23}\ \text{cm}^3$; **87.** $V = \dfrac{1}{4}na^2\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{n}$; $S = n\left(\dfrac{1}{2}a^2\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{n} + av\right)$; **88.** $S = 2\left(ab + ac\sqrt{1-\sin^2\varphi\operatorname{cotg}^2\psi} + bc\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)$;

89. rovina rozdělí hranu AB v poměru 1 : 4; **90.** a) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}a^2\sqrt{2b^2-a^2}$;

$S = a^2 + a\sqrt{4b^2 - a^2}$; b) $V = \frac{1}{3}a^2 v$; $S = a^2 a\sqrt{4b^2 + a^2}$; c) $V = \frac{2}{3}v\left(b^2 - v^2\right)$;
$S = 2\left(b^2 - v^2\right) + 2\sqrt{b^4 - v^4}$; **91.** a) $V = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}$;
$S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3}\sqrt{3b^2 - a^2}$; b) $V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 v$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{12v^2 + a^2}$;
c) $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2 - v^2\right)v$; $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(b^2 - v^2 + \sqrt{\left(b^2 - v^2\right)\left(b^2 + 3v^2\right)}\right)$;
92. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}u^3$; $S = \frac{u^2}{2}\left(1 + \sqrt{7}\right)$; **93.** $V = \frac{5}{6}\sqrt{7}$; **94.** $V = \sqrt{3}v^2 \operatorname{cotg}\varphi$;
95. $S_{krychle} = 2S\left(3 - \sqrt{3}\right)$; **96.** $V = \frac{5}{12}a^3 \sin 2\varphi \cos\varphi \sin 72°$; **97.** $a_1 = 10$;
$v_1 = 12$; $a_2 = 4\sqrt{5}$; $v_2 = 15$; **98.** $x = \frac{v}{\sqrt[3]{3}}$; **99.** $V = \frac{1}{12}\left(a^3 - b^3\right)\operatorname{tg}\varphi$;
100. $Q = 2v^2 \operatorname{cotg}\psi\sqrt{2 + \operatorname{cotg}^2\varphi}$; **101.** $S = \left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_1}}{2}\right)^2$; **102.** a) počet hran: 6; 12; 12; 30; 30; b) počet vrcholů: 4; 8; 6; 20; 12; **103.** $V = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$;
$S = a^2\sqrt{3}$; **104.** $\rho = a\frac{\sqrt{6}}{12}$; $r = a\frac{\sqrt{6}}{4}$; **105.** $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$; $\varphi = 109°28'$;
106. $V = a^3\frac{8\sqrt{3}}{9}$; $S = 8r^2$; **107.** $V = a^3\frac{\sqrt{2}}{3}$; $S = 2a^2\sqrt{3}$; **108.** $V = 4\sqrt{3}\rho^3$;
$S = 12\sqrt{3}\rho^2$; **109.** $V = \frac{a^3}{6}$; $S = a^2\sqrt{3}$; **112.** $180{,}956\ \mathrm{m}^3$; **113.** $10\sqrt{2}$ cm;
114. asi 9,5 cm; **115.** 3,4 mm; **116.** $V_1 : V_2 = a : b$; **117.** $\alpha = 72°20'35''$;
118. $d = 2\sqrt{\frac{m}{\pi\rho l}} = 0{,}76$ cm; **119.** $S = 2\pi(s + t)(d + t)$;
120. $V = \pi r^2\left(v - r\, tg\, \alpha\right)$; $V = 375\pi\ cm^3$; **121.** $V = 2\pi r^3 \operatorname{tg}\varphi$;
122. $V = 30{,}16\ \mathrm{cm}^3$; $S = 52{,}78\ \mathrm{cm}^2$; **123.** $\varphi = 60°$; **124.** $V = \frac{1}{9}\pi v^3$; $S = \pi v^3$;
125. $\varphi = 252°$; **126.** $x = v\sqrt[3]{\rho}$; **127.** $V = \frac{1}{3}\pi\left(r_1 - r_2\right)\operatorname{tg}\varphi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$;
$V = 8\,684{,}47\ cm^3$; $S = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 - r_2^2}{\cos\varphi}\right)$; $S = 2\,645{,}22\ cm^2$;
128. $\Delta = \frac{1}{12}\pi v\left(r_1 - r_2\right)^2$; **129.** $v = 24$ cm; **130.** $x = \frac{v}{\sqrt[3]{3}}$; **132.** $r = 6$ cm;
$r = \sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3 + \ldots + r_n^3}$; **133.** 1 000; **134.** $r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} = 6{,}74$ cm; **136.** $\sqrt{6} : \sqrt{\pi}$;

137. $\Delta = v' - v = \frac{4r^3}{3R^2} = 4{,}5$ cm; **138.** $S_{koule} : S_{kužele} = 4 : 9$; **139.** $\Delta = 2{,}4$ mm;
$\Delta = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho_0}}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_{Cu} - \rho_0}{\rho_{Cu}}}\right)$; **140.** $t = \frac{d}{2} - \sqrt[3]{\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \frac{3m}{4\pi\rho}} = 6$ mm;
141. $V_{kužele} : V_{koule} = 1 : 4$; **142.** $V = \frac{\pi}{3}r^3\left(1 - \sin\varphi\right)\left(2 - \sin\varphi - \sin^2\varphi\right)$; asi 2,2 l
143. $0{,}612\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$; **144.** $S = 2\pi r^2\frac{h}{r + h}$; asi 2,2 % povrchu Země; **145.** $\frac{d}{r} = 3$;
146. $V = \frac{5}{12}\pi r^3$; **147.** $V = \frac{2}{3}\pi r^2 v = \frac{2}{3}\pi r^3\left(1 - \cos\varphi\right)$;
148. $V = \frac{2}{3}\pi r^2 v = \frac{2}{3}\pi\rho^3\left(\frac{1 - \cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right)$; **149.** $2\varphi = 120°$;
150. $S = \frac{1}{2}\pi r^2\left(2 + \sqrt{3}\right)$; **151.** $V = \frac{22\sqrt{5}}{75}\pi r^3$; $S = \frac{\pi r^2}{5}\left(4\sqrt{5} + 6\right)$