B. Odstranění násobných kořenů polynomu: Tento postup využívá derivace $p'(x)$ polynomu $p(x)$ a toho, že zderivováním se násobnost každého kořene sníží o 1.

Věta matematická: Vydělíme-li polynom $p(x)$ polynomem $d(x) = NSD(p, p')$ = největší společný dělitel polynomů p, p', dostaneme polynom $r(x)$, který má přesně stejné kořeny jako $p(x)$, ale jsou všechny pouze jednonásobné. Tedy postup $p(x) \rightarrow r(x)$ umožňuje snížit stupeň polynomu dříve, než začneme hledat jeho kořeny.

Př. 8.1. Pokud $p(x)$ žádné vícenásobné kořeny nemá, $d(x) = NSD(p, p') = 1$, takže $r(x) = p(x)$, polynom $p(x)$ se při převodu na $r(x)$ nijak nezmění.

Př. 8.2. Při řešení rovnice $16x^4+32x^3+40x^2+24x+9=0$ bychom pomocí Hornerova schématu zjistili, že žádné racionální řešení (průchodem všech potenciálních zlomků) neexistuje. Zkusme ještě dále algoritmus odstranění násobných kořenů:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= 16x^4+32x^3+40x^2+24x+9 \\ p'(x) &= 64x^3+96x^2+80x+24 \end{aligned}\right\}$$ hledejme NSD těchto polynomů Eukleidovým algoritmem (viz předmět Diskrétní matematika):

$$(16x^4+32x^3+40x^2+24x+9):(64x^3+96x^2+80x+24) = \frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$$
$$-(16x^4+24x^3+20x^2+6x)$$
$$8x^3+20x^2+18x+9$$
$$-(8x^3+12x^2+10x+3)$$
$$\underline{\underline{8x^2+8x+6}}$$

$$(64x^3+96x^2+80x+24):(8x^2+8x+6) = 8x+4$$
$$-(64x^3+64x^2+48x)$$
$$32x^2+32x+24$$
$$-(32x^2+32x+24)$$
$$0$$

tedy $d(x) = NSD =$ poslední nenulový zbytek tohoto procesu $= 8x^2+8x+6$

pak

$$r(x) = p(x):d(x) = (16x^4+32x^3+40x^2+24x+9):(8x^2+8x+6) = 2x^2+2x+\frac{3}{2},$$
$$-(16x^4+16x^3+12x^2)$$
$$16x^3+28x^2+24x+9$$
$$-(16x^3+16x^2+12x)$$
$$12x^2+12x+9$$
$$-(12x^2+12x+9)$$
$$0$$

tedy rovnici lze psát ve tvaru

$$(8x^2+8x+6)\cdot\left(2x^2+2x+\frac{3}{2}\right)=0$$

vytkneme 2 → vynásobíme 2

$$(4x^2+4x+3)\cdot(4x^2+4x+3)=0$$
$$(4x^2+4x+3)^2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-48}}{8} = \begin{cases} -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} & \text{... kořen násobnosti 2} \\ -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} & \text{... kořen násobnosti 2} \end{cases}$$

Celkově tedy náš polynom ze zadání lze rozložit do tvaru: (a na pravou stranu napíšeme $=0$)

$$16\cdot\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$$ ... algebraický rozklad dané rovnice v komplexním tvaru

C. Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ musí mít komplexní kořeny „po dvojicích", ve tvaru $a \pm i\cdot b$:

Pokud $c_1 = a+i\cdot b$ je kořenem polynomu $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, tj. polynomu s reálnými koeficienty, nutně z toho plyne, že i komplexní číslo $c_2 = a-i\cdot b$ je kořenem téhož polynomu. Čísla $a \pm i\cdot b$ se nazývají komplexně sdružená.

Pozn.: toto je velmi užitečný fakt, pokud se zabýváme polynomem s reálnými koeficienty, což se většinou zabýváme.

D. Pro všechny kořeny polynomu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ platí:

$$\boxed{|x_i| < \underbrace{1 + \frac{\max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}}{|a_n|}}_{r}}$$

Označíme-li konstantu na pravé straně r,

tak všechny kořeny polynomu (reálné i komplexní) musí ležet v komplexní rovině uvnitř kruhu se středem v 0 a poloměrem r, protože absolutní hodnota komplexního čísla $|x_i|$ znamená vzdálenost x_i od počátku.

JINÝMI SLOVY, MEZI KOŘENY A KOEFICIENTY DANÉ ALGEBRAICKÉ ROVNICE EXISTUJE PRÁVĚ UVEDENÝ KRÁSNÝ VZTAH: KOŘENY JSOU BLÍŽE POČÁTKU NEŽ $\max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$ VYDĚLENÉ ABSOLUTNÍ HODNOTOU $|a_n|$.

E. Hranice algebry – vysvětleno na příkladu: řešme rovnici $2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 11x + 5 = 0$.

A) pomocí věty o racionálních kořenech polynomu ověříme zlomky $\pm 1, \pm 5, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$ a zjistíme, že polynom na levé straně žádné rac. kořeny nemá.

B) procesem odstranění násobných kořenů zjistíme, že polynom žádné vícenásobné kořeny nemá, $N(x) = p(x)$ ... tím jsme zjistili, že $p(x)$ má pět různých jednonásobných kořenů.

C) $p(x)$ má jen reálné koeficienty $\Longrightarrow$ pokud má komplexní kořeny, tak vždy po dvojicích, komplexně sdružené kořeny tvaru $a \pm b \cdot i$

D) Pro každý z pěti kořenů platí $|x_i| \le 1 + \frac{\max\{3, 7, 6, 11, 5\}}{2} = 1 + \frac{11}{2} = \underline{\underline{6{,}5}}$

Všechny kořeny leží uvnitř kruhu se středem v 0 a poloměrem 6,5.

Tím končí možnosti algebry a nastupuje

Řešení polynomických rovnic – numerické metody

Pokud se nespokojíme jen s tužkou a papírem a „sáhneme k využití počítače", tzv. počítačové = NUMERICKÉ metody nám pomohou všech pět řešení, třebaže jsou iracionální a komplexní a polynom je už stupně tak vysokého, že pro něj neexistují vzorce, najít!!!

Další postup řešení téže rovnice $p(x) = 0$

$$2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 11x + 5 = 0$$

F. Hrubá detekce reálných řešení

Z bodu D víme, že $|x_i| \le 6{,}5$, tj. vezměte si svůj oblíbený kreslící nástroj funkcí a nakreslete si graf funkce $p(x)$ .... polynom je funkce spojitá, tj. jejím grafem je „jednolitá" čárka. Vidíme, že tato čárka třikrát protne osu x na intervalu $\langle -6{,}5 ; 6{,}5 \rangle$, a tyto průsečíky s osou x jsou právě 3 různá reálná řešení x_1, x_2, x_3.

Z faktu, že průsečíky jsou jen 3, dále plyne, že čtvrté a páté řešení jsou komplexně sdružená čísla $x_{4,5} = a \pm i \cdot b$, kde a, b zatím neznáme.

Pokud nemáte kreslící program, ale jen kalkulačku, také můžete reálné kořeny detekovat, a sice následujícím způsobem (v jazyku R – skripta viz str. 77 až 80):

Dosazujte za x postupně čísla $-6{,}5$ a počítejte funkční hodnoty $p(-6{,}5) = -15598{,}25$

$-6{,}5$	$p(-6{,}5) = -15598{,}25$
-6	$p(-6) = -9865$
$-5{,}5$	$p(-5{,}5) = -5908{,}875$
-5	$p(-5) = -3290$
$-4{,}5$	$p(-4{,}5) = -1646{,}5$
-4	$p(-4) = -687$
$-3{,}5$	$p(-3{,}5) = -183{,}125$
-3	$p(-3) = 38$
$-2{,}5$	$p(-2{,}5) = 101{,}25$
-2	$p(-2) = 91$
$-1{,}5$	$p(-1{,}5) = 58{,}625$
-1	$p(-1) = 30$
$-0{,}5$	$p(-0{,}5) = 13$
0	$p(0) = 5$
$0{,}5$	$p(0{,}5) = 0{,}375$
1	$p(1) = -2$
$1{,}5$	$p(1{,}5) = 8{,}75$
2	$p(2) = 63$
⋮	⋮

$p(-3{,}5),\ p(-3) \rightarrow x_1 \in \langle -3{,}5; -3 \rangle$

$p(0{,}5),\ p(1) \rightarrow x_2 \in \langle 0{,}5; 1 \rangle$

$p(1),\ p(1{,}5) \rightarrow x_3 \in \langle 1; 1{,}5 \rangle$

další funkční hodnoty už jsou vždy kladné!

Ze spojitosti funkce $p(x)$ plyne, že na tom intervalu, kde přecházíme od záporné funkční hodnoty v kladnou, musí existovat průsečík grafu $p(x)$ s osou x, tj. bod x_1 : $p(x_1) = 0$

x_2 : $p(x_2) = 0$

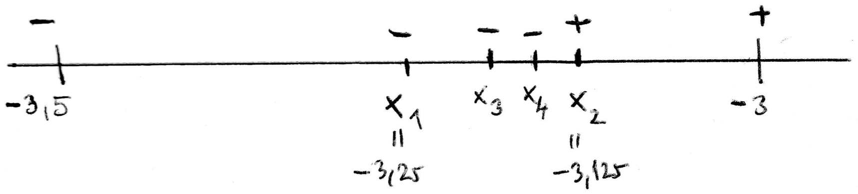
x_3 : $p(x_3) = 0$

x_1, x_2, x_3 jsou řešení naší rovnice!!!

G. Jemnější detekce reálných iracionálních řešení

Víme, že řešení x_1, x_2, x_3 jsou iracionální, tj. přesně je zjistit by nám trvalo celou věčnost, protože desetinný zápis jejich rozvoj je neperiodický nekonečný! Ale pokud se spokojíme s přesností třeba 5 platných číslic, spočítat tuto přesnost najde za chviličku. Podívejme se na dvě metody, jejichž pomocí k řešení dospějeme:

G.1. metoda půlení intervalu pro řešení rovnice $p(x) = 0$:



vycházíme ze situace

$p(-3{,}5) < 0$

$p(-3) > 0$

a) najdeme střed intervalu $\langle -3{,}5; -3 \rangle$, podle vzorce $\boxed{x_1 = \frac{a+b}{2}}$, tj. $x_1 = -3{,}25$

b) v tomto bodě $x_1 = -3{,}25$ spočteme funkční hodnotu $p(-3{,}25) = -46{,}06055\ldots$ důležité je, že je záporná, (−)
v další fázi ze intervalů $\langle -3{,}5; -3{,}25 \rangle$, $\langle -3{,}25; -3 \rangle$ vybereme $\langle -3{,}25; -3 \rangle$, protože v krajních bodech jsou rozdílná znaménka funkčních hodnot – záporné a kladné, tj. řešení leží na tomto intervalu

c) najdeme střed $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{-3{,}25-3}{2} = -3{,}125$, pak $p(-3{,}125) = 1{,}6476\ldots$ kladná hodnota (+)
tedy jako $\langle a_2; b_2 \rangle$ volíme interval $\langle -3{,}25; -3{,}125 \rangle$, protože $p(-3{,}25) < 0$, $p(-3{,}125) > 0$ …, tj. řešení leží na tomto intervalu

d) najdeme střed $x_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{-3{,}25-3{,}125}{2} = -3{,}1875$, pak $p(-3{,}1875) < 0$, volíme $\langle a_3; b_3 \rangle = \langle -3{,}1875; -3{,}125 \rangle$

e) najdeme střed $x_4 = \frac{a_3+b_3}{2} = -3{,}16525$, pak $p(-3{,}16525) < 0$, volíme $\langle a_4; b_4 \rangle = \langle -3{,}16525; -3{,}125 \rangle$

f) … atd po dalších deseti krocích $x_{15} \doteq -3{,}12991$ … a to je bod, který prohlásíme za řešení z_1 : $z_1 \doteq -3{,}12991$

Zkrátka půlení intervalu spočívá v tom, že výchozí interval $\langle -3,5; -3 \rangle$ dělíme na poloviny, obě poloviny zase na poloviny, atd., a vždy z těch dvou polovin vezmeme po další dělení tu, v jejíž krajních bodech má polynom $p(x)$ opačná znaménka funkčních hodnot, což znamená, že tato polovina obsahuje hledané řešení.

Celý algoritmus jsme zastavili asi po 15 krocích, kdy už délka intervalu $\langle a_{14}, b_{14} \rangle$ byla menší než 0,00001, tedy je jasné, že jeho střed x_{15} je spočítán s přesností na pět desetinných míst.

Tentýž algoritmus půlení intervalu použijeme i na další dva hrubě vymezené intervaly a dostaneme další dvě řešení:

$r_2 \in \langle 0,5; 1 \rangle \Rightarrow \langle a_0, b_0 \rangle = \langle 0,5; 1 \rangle$ a asi po patnácti krocích dostaneme $\underline{x_{16} \doteq 0,54689 \doteq r_2}$

$r_3 \in \langle 1; 1,5 \rangle \Rightarrow \langle a_0, b_0 \rangle = \langle 1; 1,5 \rangle$ a asi po patnácti krocích dostaneme $\underline{x_{16} \doteq 1,22892 \doteq r_3}$

Zhodnocení metody půlení intervalu:

a) pokud na intervalu $\langle a_0, b_0 \rangle$ leží právě jedno řešení rovnice $p(x)=0$, a nikoli třeba dvě řešení nebo žádné řešení, metoda půlení je s jistotou najde (proto je důležité dané řešení nejprve nahrubo najít)

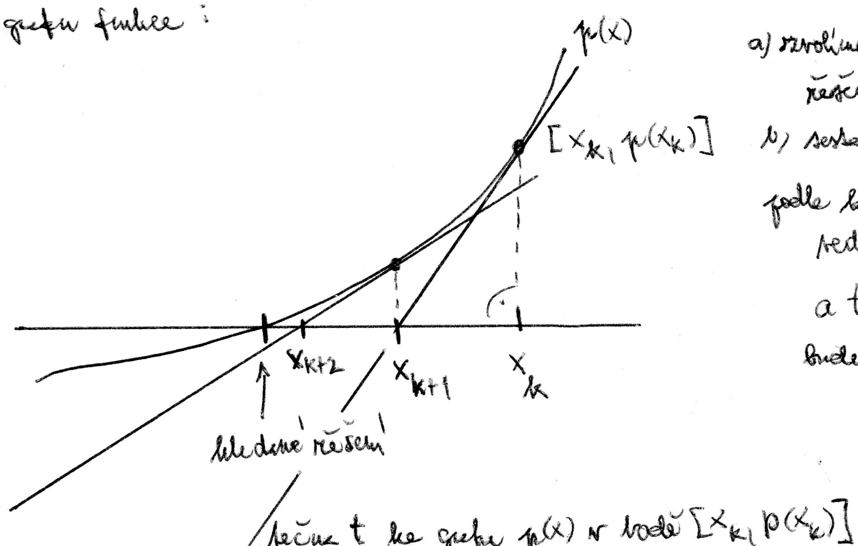
Abychom vyloučili možnost, že sledováním znamének funkčních hodnot nám nějaké řešení „uteklo", místo kroku 0,5 zvolíme krok menší, např. 0,1 a počítáme $p(-6,5)$
$p(-6,4)$
$p(-6,3)$
$\vdots$ atd.

Tímto způsobem bychom „nahrubo" získali intervaly $r_1 \in \langle -3,2; -3,1 \rangle$
$r_2 \in \langle 0,5; 0,6 \rangle$
$r_3 \in \langle 1,2; 1,3 \rangle$ a opět bychom pak zpřesnili dané řešení metodou půlení intervalu

b) metoda půlení intervalu pracuje sice jistě, ale je velmi pomalá – na zpřesnění o jedno desetinné místo potřebuje zhruba tři kroky; počítači sice nevadí, zda provede dvacet kroků nebo čtyři kroky, ale nešla by nějaká rychlejší metoda při počítání pouze na obyčejné kalkulačce?

6.2. Newtonova metoda = metoda tečen pro řešení polynomické/algebraické rovnice $p(x)=0$

S velmi rychlou metodou přišel už klasik moderní vědy Isaak Newton: využil přitom právě pojem tečny ke grafu funkce:



a) zvolíme bod x_0 vhodně blízko našeho řešení

b) sestrojujeme posloupnost bodů $x_1, x_2, x_3, \dots$ podle klíče:

vedeme tečnu ke grafu $p(x)$ v bodě $[x_k, p(x_k)]$ a tam, kde tato tečna protne osu x, bude ležet x_{k+1}:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}}$$

(vzoreček Newtonovy metody je získán dvojím vyjádřením tg α, jednou pomocí derivace a podruhé pomocí pravoúhlého trojúhelníku)

V našem příkladu by náš vzorec měl tvar

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{2\cdot x_k^5 + 3\cdot x_k^4 - 7\cdot x_k^3 + 6\cdot x_k^2 - 11\cdot x_k + 5}{10\cdot x_k^4 + 12\cdot x_k^3 - 21\cdot x_k^2 + 12\cdot x_k - 11}}$$

Ukazuje se, že se zbavíme zrádného MINUS před zlomkem a ušetříme několik operací, když rozdíl na pravé straně převedeme na společného jmenovatele:

$$x_{k+1} = \frac{10\cdot x_k^5 + 12\cdot x_k^4 - 21\cdot x_k^3 + 12\cdot x_k^2 - 11x_k - \left(2x_k^5 + 3x_k^4 - 7x_k^3 + 6x_k^2 - 11x_k + 5\right)}{10\cdot x_k^4 + 12\cdot x_k^3 - 21\cdot x_k^2 + 12\cdot x_k - 11}$$

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{8x_k^5 + 9x_k^4 + 28x_k^3 + 6x_k^2 - 5}{10\cdot x_k^4 + 12x_k^3 - 21\cdot x_k^2 + 12\cdot x_k - 11}} \longrightarrow$$ Tento vzorec použijeme u našeho příkladu!!

$r_1 \in \langle -3{,}5; -3\rangle$: volme $x_0 = -3{,}5 \Rightarrow x_1 = \dfrac{8\cdot(-3{,}5)^5 + 9\cdot(-3{,}5)^4 + 28(-3{,}5)^3 + 6\cdot 3{,}5^2 - 5}{10\cdot 3{,}5^4 - 12\cdot 3{,}5^3 - 21\cdot 3{,}5^2 - 12\cdot 3{,}5 - 11} = -3{,}229055$

$$x_2 = \frac{-8\cdot 3{,}229055^5 + 9\cdot 3{,}229055^4 - 28\cdot 3{,}229055^3 + 6\cdot 3{,}229055^2 - 5}{10\cdot 3{,}229055^4 - 12\cdot 3{,}229055^3 - 21\cdot 3{,}229055^2 - 12\cdot 3{,}229055 - 11} = -3{,}139302$$

$$x_3 = \frac{-8\cdot 3{,}139302^5 + 9\cdot 3{,}139302^4 - 28\cdot 3{,}139302^3 + 6\cdot 3{,}139302^2 - 5}{10\cdot 3{,}139302^4 - 12\cdot 3{,}139302^3 - 21\cdot 3{,}139302^2 - 12\cdot 3{,}139302 - 11} = -3{,}130003$$

$$x_4 = \frac{-8\cdot 3{,}130003^5 + 9\cdot 3{,}130003^4 - 28\cdot 3{,}130003^3 + 6\cdot 3{,}130003^2 - 5}{10\cdot 3{,}130003^4 - 12\cdot 3{,}130003^3 - 21\cdot 3{,}130003^2 - 12\cdot 3{,}130003 - 11} = -3{,}129909 \doteq \underline{\underline{-3{,}12991}}$$

Téhož výsledku Newtonova metoda dosáhla už po čtyřech krocích!!

$r_3 \in \langle 1; 1{,}5)$ volbou $x_0 = 1{,}5$ dostaneme po čtyřech krocích $\underline{\underline{x_4 \doteq r_3 = 1{,}22892}}$

$r_2 \in \langle 0{,}5; 1)$, volbou $x_0 = 0{,}5$ dostaneme už po dvou krocích $\underline{\underline{x_2 \doteq r_2 = 0{,}54689}}$

<u>zhodnocení Newtonovy metody</u>:

a) je zhruba třikrát rychlejší než metoda půlení, jeden krok zhruba vyřeší jedno desetinné místo

b) slabinou metody je to, že řešení nenajde vždy — teoreticky může tečna být i rovnoběžná s osou x, tudíž vždy průsečík s osou x neexistuje (prakticky to často nenastane, ale docela se stává, že díky tečně bod x_{k+1} „vystřelí" někam dost daleko od našeho řešení, popřípadě celá posloupnost bodů směřuje k $\infty/(-\infty)$.

Newtonova je vzhledem u spojitých funkcí rychlá a velmi dobrá — někdy může celý proces „odbočovat" od řešení, ale když zkoušíme volit různá x_0, postupně se k řešením dostaneme.

VELKOU PŘEDNOSTÍ NEWTONOVY METODY JE TO, ŽE NAJDE I KOMPLEXNÍ ŘEŠENÍ! MUSÍME JÍ OVŠEM TROCHU NAPOMOCI A VOLIT x_0 KOMPLEXNÍ ČÍSLO S NENULOVOU IMAGINÁRNÍ ČÁSTÍ, PROTOŽE NEWTONOVA METODA SAMA DO KOMPLEXNÍCH ČÍSEL NESKOČÍ

Určení dvojice komplexně sdružených řešení v našem příkladu:

$$2x^5+3x^4-7x^3+6x^2-11x+5=0$$

Víme, že $|r_4| < 6,5$

$|r_5| < 6,5$ ... budeme tedy volit jako x_0 různá komplexní čísla s velikostí menší než 6,5, a vložíme je do NEWTONOVY METODY (podle téhož vzorce z předchozí strany)

- $x_0 = 1+i$ ... po pěti krocích $x_5 \doteq 0,54689$ ... postupně se blíží k reálnému řešení, které už známe!! nic nového jsme nenašli.
- $x_0 = 1+2i$ ... po 11 krocích $x_{11} \doteq 0,54689$ ... tohle řešení je sice hezké, ale my se snažíme najít řešení s nenulovou imaginární částí!
- $x_0 = 1+3i$ ... po 10 krocích se metoda dostala k bodu $x_{10} \doteq -0,07295 + i\cdot 1,08773 \doteq r_4$!

a protože víme, že druhé komplexní řešení je pouze komplexně sdružené k předchozímu, můžeme bez počítání psát

$$r_5 \doteq -0,07295 - i\cdot 1,08773$$

Odpověď: Naše rovnice $2x^5+3x^4-7x^3+6x^2-11x+5=0$

má tři iracionální řešení $r_1 \doteq -3,12991$

$r_2 \doteq 0,54689$

$r_3 \doteq 1,22892$

a dvě komplexní řešení $r_4 \doteq -0,07295 + i\cdot 1,08773$

$r_5 \doteq -0,07295 - i\cdot 1,08773$

Běžnými algebraickými postupy nelze rovnici řešit přesně, pokud je stupně pátého a vyššího, ale jednoduché numerické/počítačové metody je dokážou nalézt s přesností, která je dostatečná.