Algebra 1

10. cvičení – KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Kdo jste se ještě neseznámili s komplexními čísly, nastudujte si základy ze středoškolské učebnice nahrané ve studijních materiálech pod názvem 08-a-komplexni-cisla.pdf. Stejně tak můžete tohoto materiálu využít, jestliže bude výklad zde nedostatečný a nesrozumitelný.

Konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams 30.4. v 16 hod.

Do odevzdávárny nahrajte nejpozději 3.5. 2020 všechny příklady.

Komplexní číslo v algebraickém tvaru je výraz tvaru

$\boxed{a+bi}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, i je číslo, pro něž platí $i^2=-1$.

a – reálná část, b – imaginární část, i – imaginární jednotka

Je-li $a=0$, mluvíme o ryze imaginárním čísle.

Operace $+$ a $\cdot$ fungují u komplexních čísel tak, jak jsme zvyklí. Pouze se při násobení využívá vztah $i^2=-1$. Tedy

$i^1=i \qquad i^2=-1 \qquad i^3=i^1\cdot i^2=i\cdot(-1)=-i \qquad i^4=(i^2)^2=1$

$i^5=i^4\cdot i^1=i$ a tak dále

Algebra 1

10. cvičení

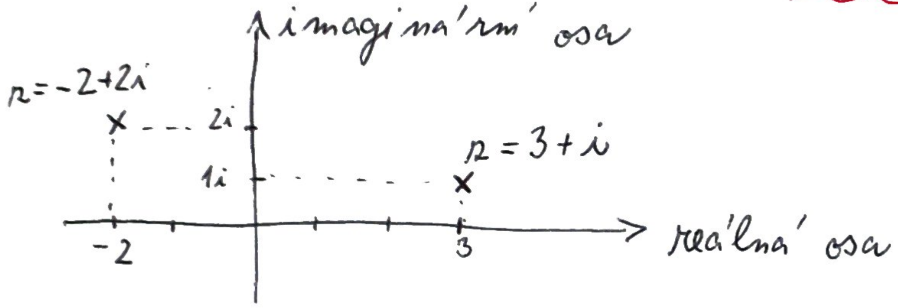
Př. 1. Vypočítejte a zapište v alg. tvaru $(a+bi)$

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50}$$

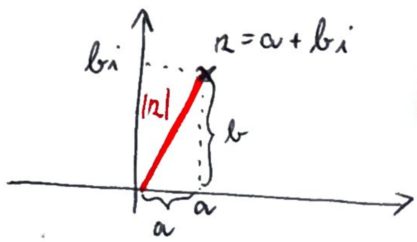
Číslo **KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ** s číslem $z = a+bi$ je $\bar{z} = a-bi$.

Platí $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ $\quad (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

Komplexní čísla lze zakreslit do **GAUSSOVY ROVINY**



Absolutní hodnota komplexního čísla je v Gaussově rovině jeho vzdálenost od počátku. Je-li $|z| = 1$, nazývá se z komplexní jednotka.



$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Př. 2. Upravte číslo z do algebraického tvaru a následně určete jeho absolutní hodnotu.

a) $z = \dfrac{1+2i}{2-i} + 1 - 2i$

b) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2}$

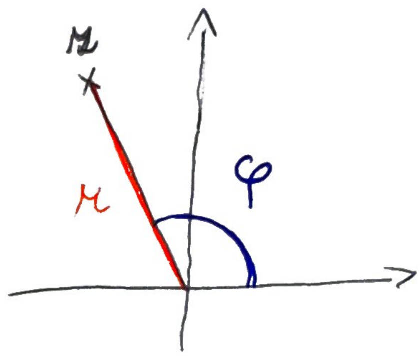
nápověda: Výrazu s i ve jmenovateli se zbavíte následovně

$$\frac{x}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{x(a-bi)}{a^2+b^2}, \quad x \in \mathbb{C}$$

10. cvičení

Př. 3: V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z, pro něž platí $|2+3i| \ge z > |1-i|$

GONIOMETRICKÝ TVAR komplexního čísla

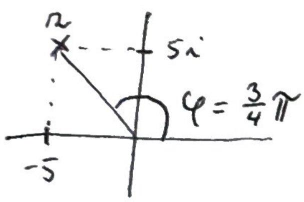


$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$r = |z|$ $\quad$ φ – argument komplexního čísla

– úhel svíraný průvodičem čísla ~~z~~ z a kladnou poloosou x

například $\quad z = -5+5i$



$|z| = r = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ $\qquad z = 5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \sin\frac{3}{4}\pi\right)$

~~Příklad~~ **Př. 4:** Zapište komplexní číslo v goniometrickém tvaru

a) $z = -1 + i\sqrt{3}$ $\quad$ b) $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ c) $z = \pi \cdot i$ $\quad$ d) $z = \frac{-3+i}{2+i}$

Nápověda: ve variantě d) nejprve upravte do algebraického tvaru

Př. 5: Zapište komplexní číslo v algebraickém tvaru

a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = \frac{1}{2}\left(\cos 193\pi + i \sin 193\pi\right)$