Algebra 1

11. cvičení – KOMPLEXNÍ ČÍSLA, 2. ČÁST

Při nejasnostech si opět můžete pomoci s materiálem 08-a-komplexni-cisla.pdf v ISu.

Konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams dne 7. 5. v 16 hodin.

Do odevzdávárny nahrajte všechny příklady nejpozději 10.5.2020

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru jsou často velmi výhodná pro výpočty, jak bude zřejmé z tohoto cvičení!

Součin komplexních čísel z_1, z_2, kde

$z_1 = r_1(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, $z_2 = r_2(\cos\rho + i\sin\rho)$ je roven

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi+\rho) + i\cdot\sin(\varphi+\rho)\right)}$$

Podobně podíl čísel z_1, z_2 je

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi-\rho) + i\cdot\sin(\varphi-\rho)\right)}$$

Z pravidla pro výpočet součinu dvou komplexních čísel vychází Moivreova věta

[moavrova]

11 cvičení

MOIVREOVA VĚTA (rozšířená)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{[r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n (\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi))}$$

Př. 1. Umocněte a uveďte výsledek v algebraickém tvaru

a) $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{62}$

b) $(1-i)^{100}$

c) $(-1+i)^{66} - i(1+i)^{80}$

Podobně jako umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru funguje i jejich odmocňování. Toho se využívá u binomických rovnic.

BINOMICKÁ ROVNICE je rovnice tvaru $x^n - a = 0$, kde a je dané komplexní číslo, x je neznámá a $n > 1$ je přirozené číslo.

Binomická rovnice $x^n - |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 0$ má v komplexních číslech právě n různých kořenů tvaru

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Kořeny tvoří v Gaussově rovině vrcholy pravidelného n-úhelníku

Algebra 1

11. cvičení

například pro rovnici $x^4 + 2 - 2i = 0$ je $a = -2+2i$.

Zapíšeme v goniometrickém tvaru:

$$|a| = 2\sqrt{2} \qquad a = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

Kořeny x_k vypíšeme nejdříve obecně

$$x_k = \sqrt[4]{(2\sqrt{2})}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right),\ k = 0,1,2,3$$

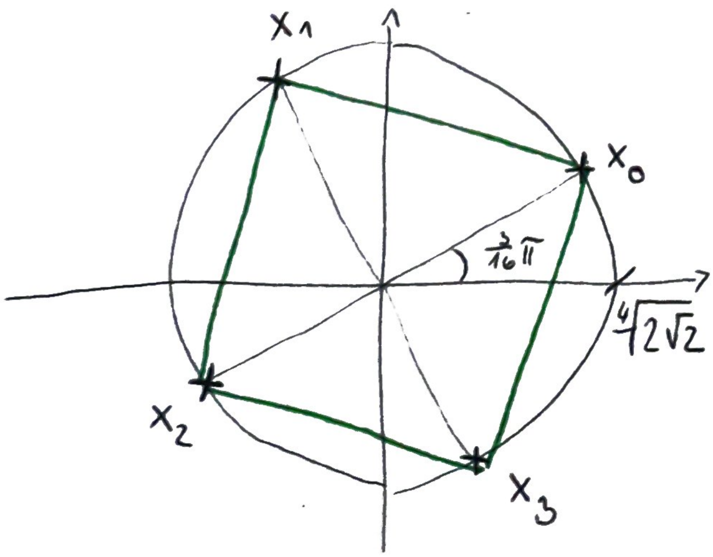
Vypíšeme každé řešení zvlášť a zakreslíme do Gaussovy roviny:

$$x_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3}{16}\pi + i\sin\frac{3}{16}\pi\right)$$

$$x_1 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11}{16}\pi + i\sin\frac{11}{16}\pi\right)$$

$$x_2 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19}{16}\pi + i\sin\frac{19}{16}\pi\right)$$

$$x_3 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{27}{16}\pi + i\sin\frac{27}{16}\pi\right)$$



11. cvičení

Př 2: Řešte binomické rovnice, výsledek zakreslete do Gaussovy roviny

a) $x^3 = 27$

b) $x^6 - i = 0$

c) $x^8 - 1 = 0$