# Algebra 1

## 4. cvičení

**Podgrupa grupy $(G,*)$** – jak ji poznáme? $S$ je podmnožina $G$, operace $*$

- stačí ověřit, že neprázdná podmnožina $S$ je uzavřená vzhledem k operaci $*$ a že s každým prvkem $a \in S$ obsahuje množina $S$ i prvek $a^{-1}$ (tím si zajistíme i přítomnost jednotkového prvku, protože $a * a^{-1} = e$ a $S$ je uzavřená vzhl. k $*$, tedy $e \in S$)

- triviální podgrupa – samotná grupa $(G,*)$ – tzn. $S = G$
  - grupa obsahující pouze jednotku $S = \{e\}$

- podgrupa grupy $(G,*)$ generovaná množinou $S$, značíme $\langle S \rangle$ – grupa, která vznikne vytvořením všech možných součinů (operace $*$) v rámci prvků ~~grupy~~ množiny $S$, např. $S = \{x, y\}$, pak $\langle S \rangle$ má prvky $x*y$, $x*x^{-1}*y$, $y^{-1}*x*y$, ....
  - je to nejmenší možná podgrupa obsahující prvky množiny $S$
  - pokud je celá grupa $(G,*)$ generována množinou $S$ obsahující jediný prvek, nazývá se cyklická grupa

**Př. 1:** Určete, zda množina $H$ spolu s operací $*$ tvoří podgrupu $(G,*)$

a) $(G,*) = (\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$, $H = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $(G,*) = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{\log a, a \in \mathbb{Z}, a > 0\}$

c) $(G,*) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x,y); y = 2x\}$

↓

vektory a jejich sčítání – provádí se po složkách

$(1,3) + (7,-2) = (8,1)$

Řešení: ~~a)~~

Naším úkolem je určit, zda je množina H uzavřená vzhledem k operaci, zda v ní existuje jednotkový prvek (je stejný jako v G) a zda ke **každému** prvku existuje prvek inverzní

a) $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ , $H=\{2^n, n\in\mathbb{Z}\}$

✓ U: $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$ , $n+m\in\mathbb{Z}$, protože $n\in\mathbb{Z}$ a $m\in\mathbb{Z}$

✓ ∃e: jednotkový prvek pro $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ je $e=1$, ten můžeme zapsat $e=1=2^0$ , $0\in\mathbb{Z}$ , $2^0\in H$

✓ $\exists x^{-1}$: $2^n\cdot\frac{1}{2^n}=1$ $\qquad \frac{1}{2^n}=2^{-n}$ , jestliže $n\in\mathbb{Z}$, také $-n\in\mathbb{Z}$ a proto $2^{-n}\in H$ pro $\forall n\in\mathbb{Z}$

$(H,\cdot)$ je podgrupa $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$

b) $(\mathbb{R},+)$ , $H=\{\log a,\ a\in\mathbb{Z},\ a>0\}$

známý vztah ze SŠ

✓ U: $\log a+\log b=\log(a\cdot b)$ , pokud $a,b\in\mathbb{Z}$ a jsou kladná, pak také $a\cdot b\in\mathbb{Z}$, $a\cdot b>0$

✓ ∃e: jednotkový prvek pro $(\mathbb{R},+)$ je $e=0$ , ten lze zapsat $e=0=\log 1$ , $1\in\mathbb{Z}$ , $1>0$ , proto $e\in H$

✗ $\exists x^{-1}$: $\log a+(-\log a)=0$ , patří $-\log a$ do H pro každé $a>0, a\in\mathbb{Z}$?

$-\log a=\log a^{-1}=\log\frac{1}{a}$ , např. pro $a=4$ $\frac{1}{a}=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$ , $\log a^{-1}\notin H$

$(H,+)$ není podgrupa $(\mathbb{R},+)$ , byla by však podgrupou pro $H=\{\log a,\ a\in\mathbb{Q},\ a>0\}$

c) $(G,*)=(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$, $H=\{(x,y), y=2x\}$

✓ U: $(a,2a)+(b,2b)=(a+b,2a+2b)=(a+b,2\cdot(a+b))\in H$

✓ $\exists e$: jednotkový prvek pro $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$ je $(0,0)$, platí $0=2\cdot 0$, proto $(0,0)\in H$

✓ $\exists x^{-1}$: $(a,2a)+(-a,-2a)=(0,0)$, platí $-2a=2\cdot(-a)$, proto $(-a,-2a)\in H$ pro $\forall a\in\mathbb{R}$

$(H,+)$ je podgrupa $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$

**Př. 2:** Nalezněte alespoň dvě podgrupy grupy $(G,*)$

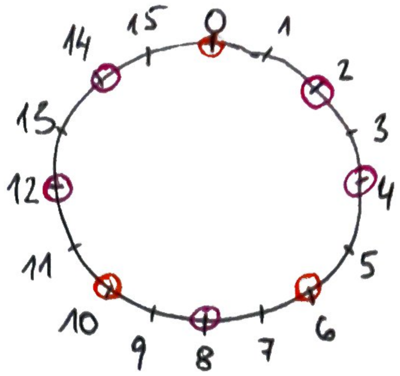
a) $(G,*)=(\mathbb{Z},+)$

b) $(G,*)=(F(\mathbb{R}),+)$, kde $F(\mathbb{R})$ je množina všech reálných funkcí

**Př. 3:** Vypište všechny prvky podgrupy $\langle 6\rangle$ grupy $(H_{16},+)$

tj. grupy pootočení hodinových ručiček o 1/16 plného úhlu

Řešení:




K prvku 6 musí grupa jistě obsahovat inverzní prvek $-6=10$ (v $H_{16}$ $10+6=0$), dále obsahuje všechny možné součty vzniklých prvků

$6+6=12$ $\quad 2+6=8$ $\quad 2+2=4$

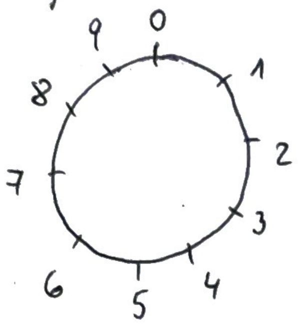
$12+6=2$ $\quad 8+6=14$

Součtem sudých čísel vždy dostaneme sudé číslo

$\langle 6\rangle=\{6,10,0,12,2,8,14,4\}$

**Př. 4:** Vypište všechny cyklické podgrupy grupy $(H_{10}, +)$

**Řešení:** Cyklická podgrupa je podgrupa generovaná jedním prvkem, vyzkoušíme tedy zvolit za generátor každý z prvků $H_{10}$ a budou-li některé prvky generovat stejnou podgrupu, vezmeme za výsledek jen jeden z nich.




$\langle 0 \rangle = \{0\}$ nevlastní (triviální) podgrupa

$\langle 1 \rangle = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ nevlastní (triv.) podgrupa

$\langle 2 \rangle = \{0,2,4,6,8\} = \langle 4 \rangle = \langle 6 \rangle = \langle 8 \rangle$

$\langle 3 \rangle = \langle 1 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 9 \rangle$

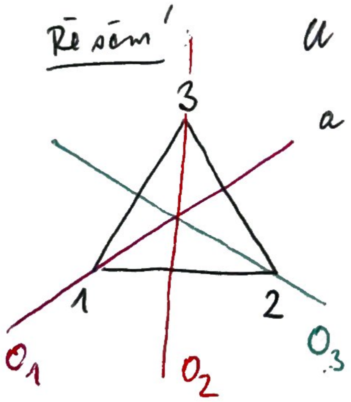
$\langle 5 \rangle = \{0,5\}$

Cyklické podgrupy jsou $\underline{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 5 \rangle}$

**Př. 5:** Vypište všechny prvky podgrupy $\langle 6, 9 \rangle$ grupy $(H_{12}, +)$

**Př. 6:** Určete všechny prvky grupy symetrií rovnostranného $\Delta$, vytvořte tabulku skládání symetrií. Je tato grupa komutativní?

**Řešení:** U rovnostranného $\Delta$ existují 3 možná pootočení (o $0°$, $120°$ a $240°$) a 3 osy souměrnosti viz obrázek




Popišme jednotlivé symetrie pomocí permutací:

$R_0 = id$ pootočení o $0°$

$R_1 = (1,2,3)$ pootočení o $120°$

$R_2 = (1,3,2)$ pootočení o $240°$

$R_3 = (2,3)$ osa $o_1$

$R_4 = (1,2)$ osa $o_2$

$R_5 = (1,3)$ osa $o_3$

| $\circ$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_0$ | id | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ |
| $R_1$ | $R_1$ | $R_2$ | id | $R_4$ | $R_5$ | $R_3$ |
| $R_2$ | $R_2$ | id | ... | | | |
| $R_3$ | $R_3$ | $R_5$ | ... | | | |
| $R_4$ | $R_4$ | | ... | | | |
| $R_5$ | $R_5$ | | | | | |

$R_0 = e$

$R_1 \circ R_2 = (1,2,3)\circ(1,3,2) = id$

$R_1 \circ R_1 = (1,2,3)\circ(1,2,3) = (1,3,2)$

$R_1 \circ R_3 = (1,2,3)\circ(2,3) = (1,2)$

$R_1 \circ R_4 = (1,2,3)\circ(1,2) = (1,3)$

$R_1 \circ R_5 = (1,2,3)\circ(1,3) = (2,3)$

$R_2 \circ R_1 = (1,3,2)\circ(1,2,3) = id$

$R_3 \circ R_1 = (2,3)\circ(1,2,3) = (1,3)$

$\vdots$

není komutativní grupa

**Př. 7:** Určete všechny prvky grupy symetrií čtverce. Vytvořte alespoň část tabulky skládání symetrií (alespoň 20 políček)

**Př. 8:** Vypište prvky cyklické podgrupy grupy $(S_6, \circ)$ generované prvkem $f = (1,2,3,4)\circ(5,6)$

Řešení: prvkem musí být jednotkový prvek, v případě skládání permutací tedy $id = e$. Zároveň s $f$ musí do grupy patřit $f^{-1}$, který dostaneme obrácením pořadí prvků v závorkách $f$

$f = (1,2,3,4)\circ(5,6)$ $\quad f^{-1} = (4,3,2,1)\circ(6,5)$

$f\circ f^{-1} = (1,2,3,4)\circ(5,6)\circ(4,3,2,1)\circ(6,5) = id$

Další prvky získáme skládáním $f$ se sebou a s dalšími prvky.

$g = f\circ f = (1,2,3,4)\circ(5,6)\circ(1,2,3,4)\circ(5,6) = (1,3)\circ(2,4)$

$g\circ g = (1,3)\circ(2,4)\circ(1,3)\circ(2,4) = id$

$f\circ g = (1,2,3,4)\circ(5,6)\circ(1,3)\circ(2,4) = (1,4,3,2)\circ(5,6) = f^{-1}$

při skombinování výsledků různých kombinací pomůže tabulka

| $\circ$ | $f$ | $id$ | $f^{-1}$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | $g$ | $f$ | $id$ | $f^{-1}$ |
| $id$ | $f$ | $id$ | $f^{-1}$ | $g$ |
| $f^{-1}$ | $id$ | $f^{-1}$ | $g$ | $f$ |
| $g$ | $f^{-1}$ | $g$ | $f$ | $id$ |

$$f^{-1}\circ f^{-1} = (4,3,2,1)\circ(6,5)\circ(4,3,2,1)\circ(6,5) = (1,3)\circ(2,4) = g$$

$$f^{-1}\circ g = (4,3,2,1)\circ(6,5)\circ(1,3)\circ(2,4) = (1,2,3,4)\circ(5,6) = f$$

$$g\circ f = (1,3)\circ(2,4)\circ(1,2,3,4)\circ(5,6) = (1,4,3,2)\circ(5,6) = f^{-1}$$

Prvky cyklické podgrupy generované $\langle (1,2,3,4)\circ(5,6)\rangle$ jsou

$$\{ (1,2,3,4)\circ(5,6)\,;\ (4,3,2,1)\circ(6,5)\,;\ id\,;\ (1,3)\circ(2,4) \}$$

**Př. 9:** Podgrupa grupy $(S_4,\circ)$ generovaná prvky $f = (1,3)\circ(2,4)$
$g = (3,4)$

má 8 prvků. Nalezněte je všechny.

**Př. 10:** Uvažujme grupu $(S_3,\circ)$. Kolik má prvků?

a) dokažte, že $(S_3,\circ)$ není cyklická grupa

b) nalezněte dvouprvkovou podmnožinu $S_3$ generující grupu $(S_3,\circ)$

Návod: u a) pracujte postupně s jednotlivými prvky $S_3$.