# Algebra 1 - 5. cvičenie

- do odovzdávarny nahrajte v jednom súbore príklady do 29. 3. 2020
- je treba odovzdať vypočítané
  - príklady 1, 5, 6
  - aspoň jeden z príkladov 3, 4
- konzultácia k tomuto cvičeniu prebehne 26. 3. 2020 o $18^{00}$ na MS Teams

# Algebra 1

## 5. cvičení – Struktury se dvěma operacemi

Budeme se opírat o text doktora Fajmona ze studijních materiálů (strany 68–74), prostudujte si jej, prosím.

Zde uvedu pouze definice základních pojmů.

Vedle algebraických struktur s jednou operací existují i algebraické struktury se dvěma operacemi, typicky se sčítáním a násobením (jak budou operace značeny i v definicích), ale může se jednat i o obecně definované operace, např. $\circ, *$.

**Def.:** **OKRUH** je množina $M$ s operacemi $+, \cdot$, tedy $(M, +, \cdot)$, které splňují vlastnosti:

a) Množina $M$ je uzavřená vzhledem k operaci $+$, operace $+$ na $M$ je komutativní, asociativní, má jednotkový prvek a ke každému prvku existuje prvek inverzní, tj. $(M, +)$ je komutativní grupa.

b) Množina $M$ je uzavřená vzhledem k operaci $\cdot$, operace $\cdot$ na $M$ je asociativní a má jednotkový prvek, tj. $(M, \cdot)$ je monoid.

c) Operace $+$ a $\cdot$ na $M$ splňují distributivní zákon
$\forall x, y, z \in M: \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \;\wedge\; (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

**Def.:** **OBOR INTEGRITY** je okruh $(M, +, \cdot)$, který navíc splňuje, že $M$ neobsahuje netriviální dělitele nuly (vzhledem k operaci $\cdot$) a operace $\cdot$ je na $M$ komutativní.

(díky komutativitě $\cdot$ stačí psát jeden z distributivních zákonů)

**Def** NETRIVIÁLNÍ DĚLITELÉ NULY jsou taková prvky $a, b$ množiny $M$, které se nerovnají nule (ani jeden z nich), tedy neutrálnímu prvku v grupě $(M,+)$, ale jejich součin (výsledek operace $a \cdot b$) je roven nule, tedy $a \cdot b = 0$ → neutrální prvek $(M,+)$

**Př 1** Ve struktuře $(Z_6, \oplus, \odot)$ — zbytkové třídy po dělení 6, kde $[a] \oplus [b] = [a+b]$, $[a] \odot [b] = [a \cdot b]$, nalezněte dvě dvojice nenulových prvků, které po vynásobení dávají nulu.

**Def** TĚLESO je obor integrity $(M, +, \cdot)$, kde navíc operace $\cdot$ na $M-\{0\}$ splňuje vlastnost, že ke každému prvku existuje prvek inverzní, tedy $(M-\{0\}, \cdot)$ je grupa.

↓ neutrální prvek $(M,+)$

**Př. 2:** Určete typ struktury $(A, \circ, *)$, kde $A = \mathbb{Z}$,

$$x \circ y = x + y - 1$$
$$x * y = x + y - xy$$

**Řešení:**

**operace $\circ$**

U ✓ $x \circ y = x + y - 1$, pokud $x, y \in \mathbb{Z}$, pak i $x + y - 1 \in \mathbb{Z}$

K ✓ $x \circ y = x + y - 1$, $y \circ x = y + x - 1 = x + y - 1$

A ✓ $(x \circ y) \circ z = (x + y - 1) \circ z = x + y - 1 + z - 1 = x + y + z - 2$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 1) = x + y + z - 1 - 1 = x + y + z - 2$

$\exists e$ ✓ $x \circ e = x$

$x + e - 1 = x$

$e = 1 \in \mathbb{Z}$

$(M, \circ)$ je komutativní grupa

$\exists x^{-1}\ \forall x$ ✓ $x \circ x^{-1} = e$

$x + x^{-1} - 1 = 1$ pokud $x \in \mathbb{Z}$, pak i $2 - x \in \mathbb{Z}$

$x^{-1} = -x + 2$

**operace $*$**

U ✓ $x * y = x + y - xy$, pokud $x, y \in \mathbb{Z}$, pak i $x + y - xy \in \mathbb{Z}$

K ✓ $x * y = x + y - xy$, $y * x = y + x - yx = x + y - xy$

A ✓ $(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y - xy + z - zx - zy + xyz$

$x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz$ ✓

$\exists e$ ✓ $x * e = x$

$x + e - xe = x$

$e(1 - x) = 0$

$e = 0 \in \mathbb{Z}$

$(M, \cdot)$ je monoid, $\cdot$ je na $M$ komutativní

$\exists x^{-1}\ \forall x$ ✗ $x * x^{-1} = e$

$x + x^{-1} - xx^{-1} = 0$

$x^{-1} = \frac{-x}{1-x}$ např. pro $x = 3$

$x^{-1} = \frac{-3}{1-3} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

**Netriviální dělitelé 0?** ✗ $x + y - xy = 1 \wedge x \neq 1 \wedge y \neq 1$ nelze ($y = \frac{1-x}{1-x} \cdot 1$ pokaždé $x$)

Distributivní zákon? (Stačí jeden díky komutativitě $(M,*)$)

✓

$$x*(y\circ z) = x*y \circ x*z$$

L: $x*(y\circ z) = x*(y+z-1) = x+y+z-1-xy-xz+x$

P: $x*y\circ x*z = (x+y-xy)\circ(x+z-xz) = x+y-xy+x+z-xz-1$ ✓

$L = P$

## Struktura $(A,\circ,*)$ je obor integrity.

**Př. 3:** Určete typ struktury $(\mathbb{R},\circ,*)$, kde platí

$x\circ y = x+y+2$, $x*y = 2x+2y+xy+2$

**Př. 4:** Určete typ struktury $(\mathbb{Z}_5,\oplus,\odot)$, kde platí

$[x]\oplus[y] = [x+y]$, $[x]\odot[y] = [x\cdot y]$, $\mathbb{Z}_5$ jsou zbytkové třídy po dělení 5, tedy $\mathbb{Z}_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$

**Př. 5:** Určete typ struktury $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ s obyčejnými operacemi sčítání a násobení.

**Př. 6:** Určete typ struktury $(B,\circ,*)$, kde platí

$B = \{x, y\}$

| $\circ$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $x$ |

| $*$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $x$ |
| $y$ | $x$ | $y$ |

## částečné řešení

### operace ∘

U ✓   K ✓ (souměrnost)   ∃e ✓ $e = x$   $\exists x^{-1} \forall x$ ✓ $x^{-1} = x$, $y^{-1} = y$

A ✓ – pokud v trojici bude neutrální prvek x, pak v dané trojici platí asociativita
– zbývá ověřit pouze trojici $\underbrace{y \circ \underbrace{(y \circ y)}_{x}}_{y} = \underbrace{\underbrace{(y \circ y)}_{x} \circ y}_{y}$

(B, ∘) komutativní grupa

### operace *

U   K ✓   ∃e   $e =$   $\exists x^{-1} \forall x$   $x^{-1} =$, $y^{-1} =$

A

(B, *) je . . . .

(B − {0}, *) je . . . .

### dělitelé nuly

### distributivní zákon (stačí jeden, protože (B, *) je komutativní)

| a | b | c | a∘b | (a∘b)*c | a*c | b*c | (a*c)∘(b*c) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | x | x | x | x |
| x | x | y | | | | | |
| x | y | x | | | | | |
| y | x | x | | | | | |
| x | y | y | | | | | |
| y | x | y | | | | | |
| y | y | x | x | x | x | x | x |
| y | y | y | x | x | y | y | x |